

УДК 517.917

© Зарипов Ф. Ш., Ульянова Е. С., 2023

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ В ИНДУЦИРОВАННОЙ ТЕОРИИ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ГРАВИТАЦИИ ДЛЯ СЛУЧАЯ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙЗарипов Ф. Ш.^{a,1}, Ульянова Е. С.^{a,2}^a Казанский федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Работа является продолжением цикла работ, в которых была предложена модифицированная теория индуцированной гравитации (МТИГ). Рассматривается модель с веществом в виде идеальной жидкости, взаимодействующей со скалярным полем. На полученных решениях для масштабного фактора и скалярного поля для метрики Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера решаются уравнения геодезических линий для различных значений параметров. Цель этой статьи состоит в исследовании геодезических линий, в модели с колебательным характером космологических параметров, таких как масштабный фактор и параметр Хаббла.

Ключевые слова: тёмная энергия, гравитация, космология, постоянная Хаббла.

SOLUTION OF THE GEODESIC EQUATION IN THE INDUCED THEORY OF MODIFIED GRAVITY FOR THE CASE OF COSMOLOGICAL MODELSZaripov F. Sh.^{a,1}, Ulyanova E. S.^{a,2}^a Kazan Federal University, Kazan, 420008, Russia

The work is a continuation of a series of works in which a modified theory of induced gravity (MTIG) was proposed. A model with matter in the form of an ideal fluid interacting with a scalar field is considered. Based on the obtained solutions for the scale factor and the scalar field for the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metric, the equations of geodesic lines are solved for various parameter values. The purpose of this article is to study geodesic lines in a model with an oscillatory nature of cosmological parameters such as the scale factor and the Hubble parameter.

Keywords: dark matter, gravity, galaxy, star formation.

PACS: 34D08, 93C15

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2023.1.60–64

Введение. Уравнения МТИГ

В данной статье рассматривается одна из актуальных проблем современной космологии: проблема истинного значения скорости расширения Вселенной. Значение, полученное различными учеными и группами учёных, далеко от их рекомендаций. В 1998 году Адам Рисс и компания получили для постоянной Хаббла значение 65,2 км/с/Мпс [1]. Ещё одна наблюдение, проведённая А.Рисс в 2016 году оценивает значение постоянной Хаббла порядка 73 км/с/Мпс данные европейского телескопа Планка дают значение 67 км/с/Мпс значение, которое не совпадает с тем, что дает телескоп Хаббла [2]. Фактическое значение постоянной Хаббла колеблется между 63 км/с/Мпс и 73 км/с/Мпс. Такое расхождение в наблюдениях требует своего объяснения.

¹E-mail: farhat.zaripov@kpfu.ru²E-mail: ulyanovaese@mail.ru

Наша модель основана на теории индуцированной гравитации изложенной в работах [3–5], в которых вводится в начальном действии квадратичное поле $Y \equiv (X, X) = X^A X^B \eta_{AB}$, индуцирующие обе гравитационные и космологические постоянные. Функции $X^A = X^A(\sigma^\mu)$, где $A, B = 1, 2, \dots, D$, $\mu, \nu = 0, 1, \dots, n-1$, отображают n -мерное Риманово многообразие, описываемое метрикой $g_{\mu\nu}$, в D -мерное плоское пространство-время с метрикой η_{AB} [3]. Можно просто считать что имеется мультиплет скалярных полей $X^A(\sigma^\mu)$. В дальнейших вычислениях мы положим $n = 4$. Эффективное космологическое и гравитационное постоянные связаны с Y по следующей формуле:

$$k_{eff} = \pm \frac{wc^3}{16\pi\xi Y \hbar} \equiv G_{eff} \frac{c^3}{8\pi\hbar}, \quad \Lambda_{eff} = \frac{1}{2\xi Y}(-B + U_{eff}), \quad n = 4, \quad (I)$$

где \hbar — постоянная планка, c — скорость света, $B = B_0 - w\varepsilon_v$, ε_v — энергия вакуума B_0 , w , ξ — постоянные теории, $U_{eff} = U_{eff}(Y)$ — эффективный потенциал теории.

Обобщение эйнштейновской теории строится исходя из действия [5]:

$$S_0 = \frac{1}{w} \int \{ \xi R(X, X) + U + L_m(X, S) \} \sqrt{-g} d^n \sigma, \quad (II)$$

где R — скалярная кривизна по метрике $g_{\nu\mu}$, $U = U(X^A)$ — потенциал зависящий от поля Y , ξ , w — некоторые постоянные взаимодействия. $L_m(X, S)$ — характеризует всевозможные взаимодействия X^A с другими полями материи.

В предыдущих работах [4], [5] рассматривался квадратичный потенциал по полю Y : $U = U(Y) = Y^2 \lambda + Y f_w - B$. Варьированием по $g_{\nu\mu}$, из (II), для системы с материей, были получены следующие самосогласованные уравнения:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\xi Y} U g_{\alpha\beta} + \frac{1}{Y} [\nabla_\alpha \nabla_\beta - g_{\alpha\beta} \square] Y - \frac{w}{2\xi Y} T_{(e)\alpha\beta}, \quad (III)$$

где $G_{\alpha\beta}$ — тензор Эйнштейна; $T_{(e)\alpha\beta}$ — тензор энергии-импульса (ТЭИ) полей материи (например, идеальной жидкости).

Следствием этих уравнений является закон сохранения энергии, имеющего вид:

$$\nabla_\beta Y \cdot (\xi R + \frac{dU}{dY}) - w \nabla_\alpha T_{(e)\beta}^\alpha = 0. \quad (IV)$$

Уравнения (III) — есть аналог уравнений Эйнштейна для макроскопической среды.

Как следует из (IV), при $Y = const$ уравнения сводятся к уравнениям Эйнштейна (ES - стадия). Мы заметили, что для случая $Y \neq const$ (стадия RS) появляется уравнение, которое исчезает для стадии ES. Таким образом, мы также исследуем решения, содержащие переходы от ES к RS и наоборот. Как показано в предыдущих работах, такие решения напоминают фазовые переходы и содержат элементы стохастичности [4].

1. Уравнения для метрики Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера

Рассмотрим уравнения (III) для случая квадратичного потенциала скалярного поля $U(Y) = \Lambda_X Y^2 + f_w Y - B$, $B = const$, для случая однородной и изотропной космологической модели, с метрикой $g_{\nu\mu}$, задаваемой 4-интервалом:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - k_0 r^2(t)} + r^2(t) d\Omega^2 \right], \quad (1.1)$$

где $k_0 = 0, 1, -1$ соответственно, для плоской, закрытой и открытой модели Вселенной. $d\Omega^2 = d^2\theta + \sin^2\theta d^2\phi$ — метрическая форма единичной сферы. Было показано, что статические решение $Y = Y_0 = const$, приводящие к эйнштейновской теории, могут быть неустойчивыми и решения переходят в колебательный режим, в окрестности точки $Y = Y_0$, что приводит к осциллирующему решению для масштабного фактора $a(t)$ и параметра Хаббла $H = \dot{a}/a$. Например, на рис. 1 показаны характерное поведение нормированных функций масштабного фактора и параметра Хаббла,

для случая $Y \neq const$. Как следует из рисунков, не монотонные изменения масштабного фактора и параметра Хаббла могут привести к ошибочной интерпретации наблюдательных данных. Поскольку космологическое красное смещение $z(t) = a_0/a(t) - 1$ фотонов зависят от значения масштабного фактора в момент времени t , соответствующего моменту испускания. Исходя из красного смещения вычисляются расстояния до космологических объектов. В работах [3], [4] рассмотрены также более сложные случаи связанные со случайными переходами решений со стадии $Y = const$ в стадию $Y \neq const$. Исходя из изложенного является актуальной задачей исследования геодезических линий в пространстве-времени Фридмана для предлагаемой модели.

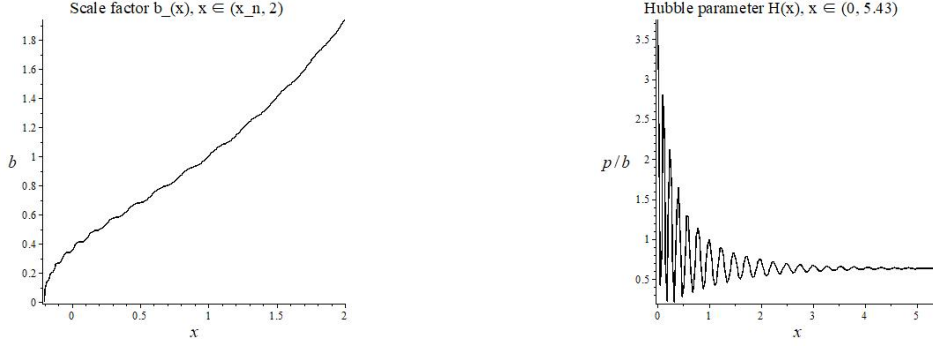


Рис. 1. (а) эволюция масштабного фактора во времени; (б) эволюция параметра Хаббла во времени.

Уравнения (III) после некоторых преобразований можно привести к следующей системе дифференциальных уравнений, на нормированный (на современное значение a_0) масштабный фактор $b(t) = a(t)/a_0$ и скалярное поле $Z(t) = Y(t)/Y_0$, нормированное на среднее вакуумное значение [4]. Также вводится собственное время $x = t/t_0$ нормированное на возраст Вселенной t_0 .

$$\dot{Z} \left(\frac{\dot{p}}{b} + \frac{p^2}{b^2} + \frac{k}{b^2} - \frac{2}{Z_0} \left(\frac{Z}{Z_0} - 1 \right) \left(B_1 + \frac{\rho_p}{b^3} + \frac{\rho_r}{b^4} \right) + K_{rv} \right) = 0, \quad p = \dot{b}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\dot{Z}}{Z} p + \frac{p^2}{b^2} + \frac{k}{b^2} - \frac{1}{Z} \left(\frac{Z}{Z_0} - 1 \right)^2 \left(B_1 + \frac{\rho_p}{b^3} + \frac{\rho_r}{b^4} \right) + K_{ev} = 0, \quad (1.3)$$

которые решаются численно, для различных значений постоянных параметров (B_1, ρ_r, K_{rv} ...) теории. В данной феноменологической модели вводится взаимодействие скалярного поля $Z(t)$ с идеальной жидкостью [4, 5] и $B_1 = B/(6\xi)$.

Упрощаем тензорные уравнения геодезических линий, на плоскости эклиптики $\theta = \pi/2$:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0, \quad (1.4)$$

где Γ_{kl}^i — символы Кристоффеля по метрике $g_{\nu\mu}$; $x^i = (t, r, \theta, \phi)$. Два уравнения из системы (1.4) можно один раз проинтегрировать и получим:

$$\frac{d}{ds} \phi = \frac{L_\varphi}{r^2 a^2}; \quad \frac{d}{ds} t = \varepsilon + \frac{C_t}{a^2}, \quad (1.5)$$

где s — параметр вдоль геодезической, L_φ , C_t — постоянные интегрирования, имеющие смысл углового момента и параметра связанного с полной энергией, $\varepsilon = 1, 0$ — для временноподобной или изотропной линии. Приведем оставшиеся уравнения:

$$\left(\frac{d}{dx} r(x) \right)^2 \left(\varepsilon_n b(x)^2 + 1 \right) = \frac{1 - k_0 r(x)^2}{(b(x))^2} \left(1 - \frac{m^2}{(r(x))^2} \right), \quad (1.6)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} r(x) = \frac{1}{\varepsilon_n (b(x))^2 + 1} \left(- \left(2\varepsilon_n (b(x))^2 + 1 \right) \left(\frac{d}{dx} r(x) \right) H_b(x) + \frac{-r^4 k_0 + m^2}{r^3 (b(x))^2} \right), \quad (1.7)$$

где $H_b(x) = \frac{db(x)}{dx} \frac{1}{b(x)} = \frac{da(t)}{dt} \frac{1}{a(t)} = H(t) \cdot t_0$ - нормированный (на возраст Вселенной) параметр Хаббла, $m^2 = L_\varphi^2/C_t$, $\varepsilon_n = \varepsilon/C_t$.

В общем случае, численными методами решаются системы уравнений (1.2), (1.3) и (1.5)-(1.7). Однако, аналитически проанализированы частные случаи $C_t = 0$ и $L_\varphi = 0$. Уравнение для нахождения вида траектории имеет вид:

$$\left(\frac{d}{d\phi}r(\phi)\right)^2 = \frac{(r(\phi))^2 \left(1 - k_0 (r(\phi))^2\right) \left((r(\phi))^2 - m^2\right)}{m^2} \quad (1.8)$$

Исходя из уравнения (1.8), делаем вывод, что траектория геодезической не зависит от масштабного фактора. От масштабного фактора зависят лишь динамические параметры, такие как скорости пробных тел, зависимости $r = r(t)$, $\phi(t)$. Последнее уравнение можно решить. Например, интересный вывод мы получили проанализировав решение этого уравнения для закрытой модели $k_0 = 1$. Решение имеет вид:

$$r(\phi) = \pm \frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{m^2 + 1 + |m^2 - 1| \sin(2\phi)}}; \quad (1.9)$$

В полярное системе координат это есть уравнение эллипса. При $m^2 = 1$ эллипс является окружностью радиуса 1. Интересно, что это решение распространяется и на область $1 < r^2 < m^2$, если $m^2 > 1$. Для значений параметров $m^2 < 1$ следует $r^2 \leq 1$ (рис. 1). Геодезические нарушают первоначальную сигнатуру пространства-времени, поскольку компонента метрики g_{11} меняет знак при переходе через гиперповерхность $r^2 = 1$. В стандартной закрытой космологической модели считается, что $r^2 \leq 1$ и используется переход к координате χ , $r = \sin\chi$.

Заключение

Таким образом, мы получили что масштабный фактор, параметр Хаббла, а также зависимость красного смещения от времени могут носить колебательный характер, например, как показано на рисунке 1. Это может приводит к не совсем правильной интерпретации наблюдательных данных, в том числе и к неточности измерению расстояния исходя из красного смещения. При этом сами траектории геодезических линий не зависят от масштабного фактора. Для закрытой модели расширение метрики на область $1 < r^2 < m^2$ требует теоретического обоснования и возможно новых топологических не тривиальных однородных и изотропных моделей, в которых существует граница $r^2 = 1$, а к этой границе «приклеено» другое многообразие. Стандартно принято представлять трёхмерную часть закрытой модели как сферу в четырёхмерном евклидовом пространстве. Возникает вопрос об расширении такого представления с геометрической точки зрения, пока не затрагивая физическую сторону.

Список литературы

1. Riess A.G., Casertano S., Yuan W., Macri L., Anderson J., Mackenty J.W., Bowers J.B., Clubb K.I., Filippenko A.V., Jones D.O., Tuckeret B.E. New Parallaxes of Galactic Cepheids from Spatially Scanning the Hubble Space Telescope: Implications for the Hubble Constant. arXiv:1801.01120. 2018.
2. Riess A.G., Macri L.M., Hoffmann S.L., Scolnic Dan, Casertano Stefano, Filippenko A.V., Tucker B.E., Reid M.J., Jones D.O., Silverman J.M., et al. Determination of the Local Value of the Hubble Constant. *Astrophys. J.*, 2016.
3. Zaripov F. The Ambiguity in the Definition and Behavior of the Gravitational and Cosmological 'Coupling Constants' in the Theory of Induced Gravity. *Symmetry*, 2019, 11, 81. <https://doi.org/10.3390/sym11010081>
4. Zaripov F. Oscillating Cosmological Solutions in the Modified Theory of Induced Gravity. *Advances in Astronomy*, 2019, vol. 2019, 15 ps. <https://doi.org/10.1155/2019/1502453>
5. Zaripov F.S. Phenomenological Model of Multiphase Cosmological Scenario in Theory of Induced Gravity. *Russ. Phys. J.*, 2017, 59, pp. 1834–1841.

References

1. Riess A.G., Casertano S., Yuan W., Macri L., Anderson J., Mackenty J.W., Bowers J.B., Clubb K.I., Filippenko A.V., Jones D.O., Tuckeret B.E. New Parallaxes of Galactic Cepheids from Spatially Scanning the Hubble Space Telescope: Implications for the Hubble Constant. arXiv:1801.01120. 2018.
2. Riess A.G., Macri L.M., Hoffmann S.L., Scolnic Dan, Casertano Stefano, Filippenko A.V., Tucker B.E., Reid M.J., Jones D.O., Silverman J.M., et al. Determination of the Local Value of the Hubble Constant. *Astrophys. J.*, 2016.
3. Zaripov F. The Ambiguity in the Definition and Behavior of the Gravitational and Cosmological 'Coupling Constants' in the Theory of Induced Gravity. *Symmetry*, 2019, 11, 81. <https://doi.org/10.3390/sym11010081>
4. Zaripov F. Oscillating Cosmological Solutions in the Modified Theory of Induced Gravity. *Advances in Astronomy*, 2019, vol. 2019, 15 ps. <https://doi.org/10.1155/2019/1502453>
5. Zaripov F.S. Phenomenological Model of Multiphase Cosmological Scenario in Theory of Induced Gravity. *Russ. Phys. J.*, 2017, 59, pp. 1834–1841.

Авторы

Зарипов Фархат Шаукатович, к.ф.-м.н., доцент, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, 35, г. Казань, 420008, Россия.

E-mail: farhat.zaripov@kpfu.ru

Ульянова Екатерина Сергеевна, аспирант, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, 35, г. Казань, 420008, Россия.

E-mail: ulyanovaese@mail.ru

Пробьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Зарипов Ф. Ш., Ульянова Е. С. Решение уравнения геодезической в индуцированной теории модифицированной гравитации для случая космологических моделей. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2023. № 1. С. 60–64.

Authors

Zaripov Farkhat Shaukatovich, Ph.D., Associate Professor, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: farhat.zaripov@kpfu.ru

Ulyanova Ekaterina, Postgraduate, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: ulyanovaese@mail.ru

Please cite this article in English as:

Zaripov F. Sh., Ulyanova E. S. Solution of the Geodesic Equation in the Induced Theory of Modified Gravity for the Case of Cosmological Models. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2023, no. 1, pp. 60–64.