

УДК 517.917

© Зарипов Ф. Ш., Нжийа Н., 2023

**РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ В ИНДУЦИРОВАННОЙ ТЕОРИИ
МОДИФИЦИРОВАННОЙ ГРАВИТАЦИИ ДЛЯ СЛУЧАЯ
ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА**Зарипов Ф. Ш.^{а,1}, Нжийа Н.^{а,2}^а Казанский федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Работа является продолжением цикла работ, в которых была предложена модифицированная теория индуцированной гравитации (MTIG). В работе рассматриваются численное решение уравнений MTIG с квадратичным потенциалом. На фоне полученных решений для метрики центрально-симметричного пространства решаются уравнения геодезических линий для различных значений параметров. Колебательный характер решений приводит к появлению гравитационного потенциала, содержащего спектр минимумов, а не один — как в теории Эйнштейна (решение Шварцшильда — де Ситтера); а также может привести во второй половине периода к антигравитации, что выражается в противоположном ускорении пробного тела. Такие решения приводят к распределению потенциала гравитационного поля, создающего дополнительный массовый эффект на больших расстояниях, что подходит для моделирования влияния тёмной материи в галактиках.

Ключевые слова: темная материя, гравитация, галактика, звездообразование.

**SOLUTION OF THE GEODESIC EQUATION IN THE INDUCED THEORY OF
MODIFIED GRAVITY FOR THE CASE OF A CENTRALLY SYMMETRIC SPACE**Zaripov F. Sh.^{а,1}, Njiya N.^{а,2}^а Kazan Federal University, Kazan, 420008, Russia

The work is a continuation of a series of works in which a modified theory of induced gravity (MTIG) was proposed. The paper considers the numerical solution of the MTIG equations with a quadratic potential. Against the background of the solutions obtained for the metric of a centrally symmetric space, the equations of geodesic lines are solved for various values of the parameters. The oscillatory nature of the solutions leads to the appearance of a gravitational potential containing a spectrum of minima, and not just one, as in the Einstein theory (the Schwarzschild-de Sitter solution); and can also lead to antigravity in the second half of the period, which is expressed in the opposite acceleration of the test body. Such solutions lead to the distribution of the potential of the gravitational field, which creates an additional mass effect at large distances, which is suitable for modeling the influence of dark matter in galaxies.

Keywords: dark matter, gravity, galaxy, star formation.

PACS: 34D08, 93C15

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2023.1.55–59

Введение

Существует проблема «точности измерения гравитационной постоянной» G (см., например, [1]). Это расхождение результатов различных экспериментов по измерению G , до четвёртого знака после запятой. Существует множество астрономических свидетельств присутствия темной материи (ТМ) в галактиках и вокруг них (см. [2]). Мы попытались решить вышеуказанные проблемы в

¹ E-mail: farhat.zaripov@kpfu.ru² E-mail: nestornjiya@gmail.com

рамках модифицированной теории индуцированной гравитации (МТИГ), описанной в работах [3]-[5]. При решении уравнений теории для случая квадратичного потенциала поля Z были найдены осциллирующие решения для гравитационного поля как в космологических моделях, так и в центрально-симметричном пространстве (см. [4]). Наибольший интерес представляют решения, полученные для центрально-симметричного пространства. Колебательные решения гравитационного поля приводят к необычному распределению орбит пробных тел, создавая эффект дополнительной массы на больших расстояниях.

1. Уравнения МТИГ

Для системы с веществом были получены следующие уравнения МТИГ ([?]):

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\xi Y}[-B + U]g_{\alpha\beta} + \frac{1}{Y}[\nabla_\alpha \nabla_\beta - g_{\alpha\beta}\square]Y - \frac{w}{2\xi Y}T_{(e)\alpha\beta}, \quad (1.1)$$

где $G_{\alpha\beta}$ - тензор Эйнштейна; $T_{(e)\alpha\beta}$ - тензор энергии-импульса полей материи. Уравнения (1.1) были получены (с учётом дополнительных условий) на основе попытки обобщить теорию струн на объекты большей размерности ([3]). Функции $X^A = X^A(\sigma^\mu)$, где $A, B = 1, 2, \dots, D$, $\mu, \nu = 0, 1, \dots, n-1$, отображают n -мерное риманово многообразие M , описываемое метрикой $g_{\mu\nu}$, в D -мерное плоское пространство - время Π с метрикой η_{AB} [3]. Здесь мы устанавливаем $n = 4$. $Y \equiv (X, X) = X^A X^B \eta_{AB}$. Для простоты в этой статье $U(X^A) = U(Y(X^A))$. Для случая $B = const$ параметр B интерпретируется как член, связанный с плотностью энергии поляризации вакуума $\varepsilon_{vac} = (B_0 - B)/w$, $B_0 = const$ [3]. В этой небольшой статье мы не можем вдаваться в подробности нашей теории, отметим только, что уравнения (1.1) можно получить, варьируя действие

$$S_1 = \frac{1}{w} \int \left\{ \xi R Y + \tilde{U}(Y) + L_m(Y, S) \right\} \sqrt{-g} \hat{d}^n \sigma, \quad (1.2)$$

по метрике g , где $\tilde{U}(Y) = \Lambda_X Y^2 + f_w Y - B$ - потенциал. Действие в виде (1.2) можно рассматривать в рамках принципа П. А. Дирака, сводящегося к возможной зависимости физических констант друг от друга, а также от космологической эволюции. Это идея о том, что фундаментальные константы возникают за счёт фиксации некоторых динамических полей, например, в результате механизма спонтанного нарушения симметрии.

Ковариантный закон сохранения для (1.1) имеет вид:

$$\nabla_\beta Y \cdot \left(\xi R + \frac{d\tilde{U}}{dY} \right) - w \nabla_\alpha T_{(e)\beta}^\alpha = 0. \quad (1.3)$$

Как следует из (1.2), при $Y = const$ уравнения сводятся к уравнениям Эйнштейна (ES - стадия). Мы заметили, что для случая $Y \neq const$ (стадия RS) появляется уравнение, которое исчезает для стадии ЭС [3]. Таким образом, мы также исследуем решения, содержащие переходы от ES к RS и наоборот. Как показано в предыдущих работах, такие решения напоминают фазовые переходы и содержат элементы стохастичности [4]. Здесь $g \equiv g(Z) = f_n - 2B_n/Z$. Уравнения (2.2)–(2.4) также содержат решение $Z = Z_1 = const$ (RS стадия) при следующем условии на параметры: $g(Z_1) \approx 0 \rightarrow f_n \approx 2B_n/Z_1$. В точках, где выполняется это соотношение, возможны переходы от RS к ES. Однако мы пока не рассматриваем этот вопрос. Исходя из интереса к этой точке неустойчивости, а также из-за желания уменьшить количество параметров, мы будем использовать это соотношение в различных анзацах в дальнейших расчетах. В этой статье мы будем использовать следующее соотношение для констант: $f_n \approx 2B_n$.

2. Уравнения для центрально-симметрической метрики

Рассмотрим уравнения (1.1) для случая квадратичного потенциала скалярного поля $\tilde{U}(Y) = \Lambda_X Y^2 + f_w Y - B$, $B = const$, в случае центрально-симметрического, статического пространства

с метрикой:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2), \quad (2.1)$$

где $\nu = \nu(r)$, $\lambda = \lambda(r)$, $T_{(e)\alpha\beta} = 0$.

Для удобства введем также $U_{eff}(Z) = 3(L_n Z + f_n - B_n/Z)$, где введены обозначения: $f_n = f_w/(6\xi)$, $L_n = \Lambda_X C_m/(6\xi)$, $B_n = B/(6C_m \xi)$, и $Z = Y/C_m$. Здесь, из сравнения с космологической моделью для случая $Y = C_m = const$, космологическая постоянная равна: $\Lambda_{eff} = U_{eff}(C_m)$. Фиксируем значение C_m равным современному космологическому значению Y и переходим к безразмерной функции $Z = Y/C_m$.

Путём алгебраических операций над уравнениями (1.1), для метрики (2.1), получены три независимых уравнения для функций $F(r)$, $\lambda(r)$, $Z(r)$. Вместо $\nu(r)$ используется функция $F(r) = \lambda(r) + \nu(r)$. Два из них – уравнения первого порядка, одно – уравнения второго порядка:

$$F' = \frac{2r}{Z'r + 2Z} \left[Z' \left[\left((U_{eff}(Z) - g(Z))r - \frac{1}{r} \right) e^\lambda + \frac{Z'}{Z} - \frac{1}{r} \right] - 2Zg(Z)e^\lambda \right]; \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \lambda' = & \frac{2Z'r}{Z'r + 2Z} \left[\left((U_{eff}(Z) - g(Z))r - \frac{1}{r} \right) e^\lambda + \frac{Z'}{Z} + \frac{1}{r} \right] + \\ & + \frac{2Z}{Z'r + 2Z} \left[e^\lambda \left(r(U_{eff}(Z) - 2g(Z)) - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$Z'' = Z' \left[\frac{Z'}{Z} + e^\lambda \left[r(U_{eff}(Z) - g(Z)) - \frac{1}{r} \right] - \frac{1}{r} \right] - 2Ze^\lambda g(Z). \quad (2.4)$$

Здесь введена функция $g \equiv g(Z) = f_n - 2B_n/Z$.

В точке минимума потенциала $U_{eff}(Z)$: $Z_0^2 = -\frac{B_n}{L_n} \Rightarrow U_{eff}(Z) = -\frac{B_n}{Z} \left(\frac{Z}{Z_0} - 1 \right)^2 + k_2$, предполагается, что $f_n - 2B_n/Z_0 = k_2 \Rightarrow U_{eff}(Z_0) = k_2$.

Упрощаем тензорные уравнения геодезических линий, на плоскости эклиптики $\theta = \pi/2$:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0, \quad (2.5)$$

где Γ_{kl}^i - символы Кристоффеля по метрике $g_{\nu\mu}$; $x^i = (t, r, \theta, \phi)$. Два уравнения из системы (2.5) можно один раз проинтегрировать и получим:

$$\frac{d}{ds} \phi(s) = \frac{L_\varphi}{(r(s))^2}; \quad \frac{d}{ds} t(s) = Ee^{-\nu(s)}, \quad (2.6)$$

где s - параметр вдоль геодезической, L_φ, E - постоянные интегрирования, имеющие смысл углового момента и параметра связанного с полной энергией. Введем новую функцию $\alpha(r)$ вместо $\lambda(r)$, по формуле

$$e^{\lambda(r)} = \frac{e^{\alpha(r)}}{T(r)}; \Rightarrow e^{\nu(r)} = e^{F(r) - \alpha(r)} T(r), \quad T(r) \equiv 1 - \frac{\Lambda_{eff}}{3} r^2 - \frac{r g}{r}, \quad (2.7)$$

$T(r)$ - Шварцшильдовский потенциал, с учётом космологической постоянной. В работе [5] был найден новый параметр τ , после перехода к которой по формуле $ds/d\tau = e^{F(r)/2}$, уравнения принимают гамильтонов вид

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} V_\tau; \quad v_\tau(r)^2 \equiv \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = E^2 - V_\tau, \quad (2.8)$$

где, $V_\tau/2 \equiv (L_\varphi^2/r^2 + \varepsilon) e^{F(r) - \alpha(r)} \cdot T(r)/2$ - модифицированный потенциал; $\varepsilon = 1$ для пространственноподобных кривых и $\varepsilon = 0$ для изотропных кривых. Из (2.8) следует, что в данной параметризации $E^2/2$ имеет смысл полной энергии.

Численными методами решаются системы уравнений (2.2)-(2.4) и (2.6)-(2.8). Мы получили численные решения и графики геодезических линий. Например приведем графики гравитационного радиального ускорения и скорости вращения вокруг галактики, при следующих значениях

параметров: $GM = 10^{10}GM_{\odot}$, $B_n \approx 0.332\text{kpc}^{-2}$. Граничные условия (ic1) для решения уравнения. (1.1) следующие $\alpha(s_0) = 0$, $F(s_0) = 0$, $Z(s_0) \equiv Z_1 \approx 1.00000124$, $Z'(s_0) = 0$, при начальном радиусе $s_0 \approx 3.78 \cdot 10^{-10} \text{kpc} = r_g \cdot (1 + 0.0001)$ - чуть больше радиуса горизонта событий r_g .

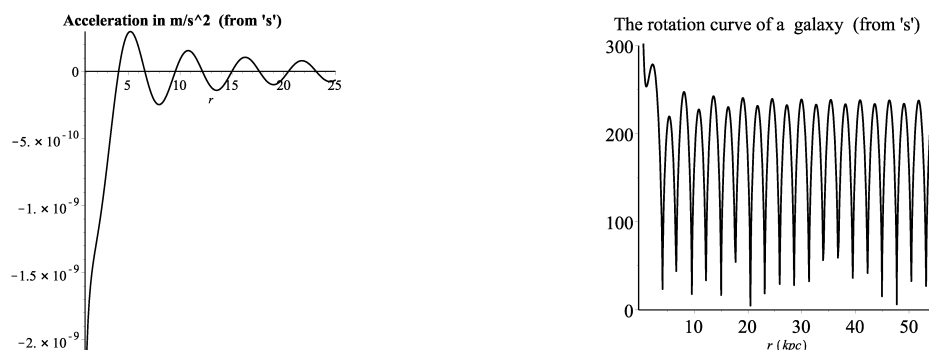


Рис. 1. (а) Радиальное ускорение (в m/s^2) при нулевом угловом моменте ($L_{\phi} = 0$); (б) Кривая вращения галактики (v_{orb} в km/s).

Мы показали, что усреднённые периоды колебаний, которые в нашем случае около 6kpc зависят от значения параметра B_n . Решения при малых радиусах $r_g > r < r_{cr}$ почти совпадают с Шварцшильдовскими решениями, затем при $r > r_{cr} \approx 0.1\text{kpc}$ решения переходят в колебательный режим. Для тех r , когда гравитационное ускорение принимает положительные значения (см. рисунок) имеет место эффект антигравитации [4], [5].

Заключение

Существование колебательного режима связана с неустойчивостью частных решений $Z = const$. Как следует из (1.3) существует две ветви решений рассматриваемых уравнений и переходы между ними невозможно предсказать. Одна из ветвей ведет колебательным решениям, которые в принципе объясняют тёмную материю вокруг галактики. Существенными параметрами этих решений являются B_n , центральная масса, $Z(s_0)$, $Z'(s_0)$. Параметр B_n можно связать с плотностью энергии вакуума. $Z(s_0)$ имеет смысл отклонение аналога Хиггсовского поля от среднего космологического значения, которая, возможно, связана с неоднородностью пространства-времени из-за центральной симметрии. В будущих исследованиях мы рассматриваем возможность связать существенными параметры между собой по аналогии с механизмом Хиггса для стандартной квантовой теорией поля.

Список литературы

1. Rosi G. Sorrentino F., Cacciapuoti L. Prevedelli M., Tino G.M. Precision measurement of the Newtonian gravitational constant using cold atoms. *J. Nature*, 2014, vol. 510, no. 7506, pp 518–521.
2. Zasov A.V., Saburova A.S., Khoperskov A.V., Khoperskov S.A. Dark matter in galaxies. *Phys. Usp. (Advances in Physical Sciences)*, 2017, vol. 60, no. 1, pp. 3–39.
3. Zaripov F.Sh. Phenomenological Model of Multiphase Cosmological Scenario in Theory of Induced Gravity. *Russian Physics Journal*, 2017, vol. 59, no. 11, pp. 1834–1841.
4. Zaripov F. The Ambiguity in the Definition and Behavior of the Gravitational and Cosmological ‘Coupling Constants’ in the Theory of Induced Gravity. *J. Symmetry*, 2019, 11, 81, pp. 1–45.
5. Zaripov F. Dark Matter as a Result of Field Oscillations in the Modified Theory of Induced Gravity. *J. Symmetry*, 2020, 12, 41, pp. 1–15.

References

1. Rosi G. Sorrentino F., Cacciapuoti L. Prevedelli M., Tino G.M. Precision measurement of the Newtonian gravitational constant using cold atoms. *J. Nature*, 2014, vol. 510, no. 7506, pp 518–521.
2. Zasov A.V., Saburova A.S., Khoperskov A.V., Khoperskov S.A. Dark matter in galaxies. *Phys. Usp. (Advances in Physical Sciences)*, 2017, vol. 60, no. 1, pp. 3–39.
3. Zaripov F.Sh. Phenomenological Model of Multiphase Cosmological Scenario in Theory of Induced Gravity. *Russian Physics Journal*, 2017, vol. 59, no. 11, pp. 1834–1841.
4. Zaripov F. The Ambiguity in the Definition and Behavior of the Gravitational and Cosmological ‘Coupling Constants’ in the Theory of Induced Gravity. *J. Symmetry*, 2019, 11, 81, pp. 1–45.
5. Zaripov F. Dark Matter as a Result of Field Oscillations in the Modified Theory of Induced Gravity. *J. Symmetry*, 2020, 12, 41, pp. 1–15.

Авторы

Зарипов Фархат Шаукатович, к.ф.-м.н., доцент, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, 35, г. Казань, 420008, Россия.

E-mail: farhat.zaripov@kpfu.ru

Нжийа Нестор, аспирант, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, 35, г. Казань, 420008, Россия.

E-mail: nestornjiya@gmail.com

Просьба сослаться на эту статью следующим образом:

Зарипов Ф.Ш., Нжийа Н. Решение уравнения геодезической в индуцированной теории модифицированной гравитации для случая центрально-симметрического пространства. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2023. № 1. С. 55–59.

Authors

Zaripov Farkhat Shaukatovich, Ph.D., Associate Professor, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: farhat.zaripov@kpfu.ru

Njiya Nestor, Postgraduate, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: nestornjiya@gmail.com

Please cite this article in English as:

Zaripov F. Sh., Njiya N. Solution of the geodesic equation in the induced theory of modified gravity for the case of a centrally symmetric space. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2023, no. 1, pp. 55–59.