УДК 531.011

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КОВАРИАНТНЫХ И КОНТРАВАРИАНТНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ В МЕХАНИКЕ

Морозов Е. А.[a,1], Морозова А. Р.[a,2], Морозова Л. Е.[b,3]

[a] Чайковский филиал Пермского национального исследовательского политехнического университета, г. Чайковский, 617760, Россия
[b] Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова, г. Ижевск, 426069, Россия

Обосновывается целесообразность использования контравариантных и ковариантных векторных пространств в механике. Для описания геометрических и кинематических векторных величин используются контравариантные векторные пространства. Для описания динамических величин используются ковариантные векторные пространства. Алгебраическая операция скалярного умножения векторов разных пространств заменяется операцией тензорного свертывания. Операция свертывания базисных векторов пространств различной природы индуцирует построение взаимных базисов этих пространств. Использование операции свертывание реализует аффинный формализм и не предполагает наличия евклидовой структуры. Определяется операция внешнего произведения векторов разных пространств и строится пространство бивекторов смешанного строения. Внешнее произведение базисных векторов определяет взаимную ориентацию базисов. Дается корректное определение векторного умножения векторов пространств различной природы. Использование алгебры внешнего умножения ковариантных и контравариантных векторов позволяет строить поливекторы смешанного строения. Поток вектора рассматривается как свертывание ковариантного 2-вектора физической величины с контравариантным 2-вектором площади.

Ключевые слова: ковариантные и контравариантные тензоры, внешние формы, внешнее произведение, сопряженные пространства.

ON THE USE OF COVARIANT AND CONTRAVARIANT VECTOR SPACES IN MECHANICS

Morozov E. A.[a,1], Morozova A. R.[a,2], Morozova L. E.[b,3]

[a] Tchaikovsky Branch of Perm National Research Polytechnic University, Tchaikovsky, 617760, Russia
[b] Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, 426069, Russia

The expediency of the use of contravariant and covariant vector spaces in mechanics is proved. To describe geometric and kinematic vector quantities, contravariant vector spaces are used. To describe dynamic quantities, covariant vector spaces are used. The algebraic operation of scalar multiplication of vectors of different spaces is replaced by the operation of tensor convolution. The operation of convolution of basic vectors of spaces of different nature induces the construction of mutual bases of these spaces. Using the operation convolution implements affine formalism and does not imply the presence of Euclidean structure. The operation of the outer product of vectors of different spaces is determined and the space of bivectors of mixed structure is constructed. The outer product of the basis vectors determines the mutual orientation of the bases. The correct definition of vector multiplication of vectors of spaces of different nature is given. The use of the algebra of external multiplication of covariant and contravariant vectors allows us to construct polyvectors of mixed structure. The vector flow is

[1]E-mail: morothov@yandex.ru
[2]E-mail: morothova0711@yandex.ru
[3]E-mail: luvial@mail.ru

considered as a convolution of a covariant 2-vector of a physical quantity with a counter-invariant 2-vector of an area.

Keywords: covariant and contravariant tensors, external forms, external product, conjugate spaces.

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2018.3.31-37

Введение

В отличие от математики в механике мы имеем дело, как с геометрическими, так и с динамическими векторными величинами. Во многих случаях математическая структура соответствующих векторных пространств одинакова или, как говорят, пространства эквивалентны с точностью до изоморфизма. Такая формальная неразличимость пространств может приводить к физически некорректным результатам.

Поясним сказанное простым примером. При векторном способе описания движения, работа однородного силового поля $\mathbf{F}$ на перемещении $\mathbf{s}$ определяется выражением

$$A = \mathbf{F} \times \mathbf{S} = FS\cos\alpha \tag{1}$$

где F, S – абсолютные значения силы и перемещения, α – угол между векторами $\mathbf{F}$, $\mathbf{S}$. Выражение (1) корректно, поскольку данная векторная форма является прямым опытным исчислением и не использует базисную структуру векторов.

Ситуация меняется при координатно-векторном способе задания движения, – формализма более высокого уровня абстракции. Прямое использование определения скалярного произведения в декартовой прямоугольной системе координат $OXYZ$ приводит нас к выражению

$$A = \mathbf{F} \times \mathbf{S} = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z, \tag{2}$$

где Δx, Δy, Δz – координаты вектора $\mathbf{S}$, F_x, F_y, F_z проекции вектора $\mathbf{F}$ на оси координат. Анализ выражения (2) выявляет его логическую некорректность. Действительно, вектор $\mathbf{S}$ является элементом векторного пространства $\mathbf{R}^3_S$ перемещения точки, вектор $\mathbf{F}$ – элементом векторного пространства $\mathbf{R}^3_F$ сил. Но скалярное произведение векторов разных пространств не имеет смысла, даже если оба пространства евклидовы. Указание, что F_x, F_y, F_z являются проекциями на оси координат, может иметь наглядное геометрическое пояснение, но также не имеет удовлетворительной формализации.

С другой стороны практическое использование формулы (2) ведет к вполне разумным результатам. Следовательно, необходима иная её математическая трактовка.

Аналогичная ситуация возникает в случае определения векторного произведения векторов различной природы, а также потока вектора.

Отмеченные несоответствия формализации могут быть исправлены, если изначально постулировать задание динамических и кинематических величин линейными пространствами двух различных классов, – ковариантных и контравариантных.

Использование ковариантных и контравариантных векторных пространств актуально при исследовании движения элементарных частиц в электромагнитных полях ускорителей [1] и приборов электронно-ионной оптики, поскольку фокусирующие свойства полей имеют аффинный характер и не зависят от задания на них евклидовой структуры.

Построение основных отношений между классами ковариантных и контравариантных векторных определяет цель данной работы.

1. Классы векторных пространств

Пусть $\mathbf{V}_n$ – линейное пространство с базисом $\mathbf{e_1}...\mathbf{e}_n$ и для любого элемента $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n$ имеет место разложение

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + ... + x^n\mathbf{e}_n = x^i\mathbf{e}_i \tag{3}$$

В выражении (3) мы использовали тензорную запись, подразумевая суммирование по буквенному индексу, если он записан дважды, один раз вверху, другой внизу. Эту запись мы будем использовать в дальнейшем, не всегда расписывая выражение в компонентах.

Элементы пространства $\mathbf{V}_n$ мы назовем *контравариантными векторами*, если преобразование базисов пространства при их замене $\mathbf{e}_1...\mathbf{e}_n \leftrightarrow \mathbf{e}_{1'}...\mathbf{e}_{n'}$ осуществляется по закону

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_i = A^{i'}_i\mathbf{e}_{i'}, \quad i, i' = 1, ..., n, \tag{4}$$

где $A^i_{i'}$, $A^{i'}_i$ взаимно обратные матрицы, т.е. $A^x_{i'}A^{k'}_x = \delta^{k'}_{i'}$, $A^k_{x'}A^{x'}_i = \delta^k_i$.

Пусть $\mathbf{V}^n$ – линейное пространство с базисом $\mathbf{e}^1...\mathbf{e}^n$ и для любого элемента $\mathbf{a} \in \mathbf{V}^n$ имеет место разложение в форме

$$\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}^i \tag{5}$$

Элементы пространства $\mathbf{V}^n$ мы назовем *ковариантными векторами*, если преобразование базисов пространства при их замене $\mathbf{e}^1...\mathbf{e}^n \leftrightarrow \mathbf{e}^{1'}...\mathbf{e}^{n'}$ осуществляется по закону

$$\mathbf{e}^{j'} = A^{j'}_j\mathbf{e}^j, \quad \mathbf{e}^j = A^j_{j'}\mathbf{e}^{j'}, \quad j, \quad j' = 1, ..., n, \tag{6}$$

где $A^j_{j'}$, $A^{j'}_j$ взаимно обратные матрицы, т.е. $A^x_{j'}A^{k'}_x = \delta^{k'}_{j'}$, $A^k_{x'}A^{x'}_j = \delta^k_j$.

Координаты x^i контравариантного вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n$ образуют одновалентный контравариантный тензор, а координаты a_i ковариантного вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}^n$ – одновалентный ковариантный тензор [2]. Для тензоров x^i, a_j может быть определена операция свертывания, результатом которой является инвариант

$$f = x^ia_i = a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_nx^n, \quad f \in R. \tag{7}$$

По аналогии, мы определим свертывания контравариантного вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n$ с ковариантным вектором $\mathbf{a} \in \mathbf{V}^n$, как операцию вида

$$a_1x^1\mathbf{e}^1\mathbf{e}_1 + a_2x^2\mathbf{e}^2\mathbf{e}_2 + ... + a_nx^n\mathbf{e}^n\mathbf{e}_n = a_ix^i\mathbf{e}^i\mathbf{e}_i.$$

Поскольку базисные вектора $\mathbf{e}_i \in \mathbf{V}_n$, $\mathbf{e}^j \in \mathbf{V}^n$ подчинены тензорным законам преобразования (4), (6), то их можно также рассматривать, соответственно, как контравариантный и ковариантный одновалентный тензор и применить к ним операцию свертывания. Тогда, по определению, полагаем

$$\mathbf{e}^j\mathbf{e}_i = \delta^j_i. \tag{8}$$

Заимствуя терминологию внешних форм [3], базисы пространств $\mathbf{V}_n$, $\mathbf{V}^n$, при выполнении условия (8) назовем *взаимными*, а сами пространства *сопряженными*. Подчеркнем, что свертывание базисных векторов (8) не предполагает наличия евклидовой структуры пространств $\mathbf{V}_n$, $\mathbf{V}^n$.

Таким образом, в отличие от известной теории [2, 3] скалярная функция (7) рассматривается как результат свертывания элементов векторных пространств, но не как 1-форма на векторе. С другой стороны, пространство ковариантных векторов $\mathbf{V}^n$ изоморфно пространству линейных 1-форм R^n, поэтому утверждения теории линейных форм могут быть отнесены к пространствам $\mathbf{V}_n$, $\mathbf{V}^n$, в частности, отношение взаимности базисов (8) взаимно однозначно. Кроме того, если на одном из пространств $\mathbf{V}^n$, $\mathbf{V}_n$ определена евклидова структура, то условие взаимности базисов индуцирует её на другом пространстве.

Для выполненного нами построения пространства $\mathbf{V}^n$, $\mathbf{V}_n$ формально эквивалентны. Для задач механики и физики, геометрические и кинематические векторные величины целесообразно относить к пространству контравариантных элементов, а динамические и физические величины, соответственно, к пространству ковариантных элементов.

Пример 1. Работа силы. Перемещение материальной точки $\mathbf{S}$, как геометрическую величину, будем задавать как элемент векторного пространства $\mathbf{S} \in \mathbf{V}_3$, силу, $\mathbf{F}$ – динамическую величину отнесем к пространству $\mathbf{F} \in \mathbf{V}^3$ ковариантных векторов. Пусть $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \in \mathbf{V}_3$, $\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3 \in \mathbf{V}^3$ и $\mathbf{e}^1...\mathbf{e}^n \in \mathbf{V}^n$ взаимные базисы этих пространств. Тогда, используя форму записи $\mathbf{S} = S^i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{F} = F_j\mathbf{e}^j$, определяем работу силы $\mathbf{F}$ на перемещении $\mathbf{S}$, как свертывание элементов сопряженных пространств $\mathbf{V}_3$, $\mathbf{V}^3$

$$A = \mathbf{F} \times \mathbf{S} = F^i S_i \mathbf{e}^i \mathbf{e}_i = F^i S_i,$$

что в декартовых координатах соответствует форме записи (2).

Таким образом, скалярному произведению векторов в определении работы (1), в координатно-векторном формализме соответствует операция свертывания элементов сопряженных линейных пространств.

2. Внешнее произведение

Напомним основные свойства внешнего произведения векторов. Пусть $\mathbf{V}_n$ векторное пространство с базисом $\mathbf{e}_1...\mathbf{e}_n \in \mathbf{V}_n$, $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = y^j\mathbf{e}_j$ – его произвольные векторы. Внешним произведением векторов [2] называется операция

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = 0,5\left(x^i y^j - x^j y^i\right)\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j. \tag{9}$$

Для базисных векторов справедливы определяющие алгебраические соотношения

$$\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i = 0, \quad 1 \wedge \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \wedge 1 = \mathbf{e}_i, \quad 1 \wedge 1 = 1, \quad (i, j = 1, ..., n).$$

Внешнее произведение (9) всех векторов пространства образует линейное пространство, элементы которого называются *бивекторами* или *2-векторами*

$$\mathbf{V}_n \wedge \mathbf{V}_n \equiv \mathbf{V}_{nn}, \quad \dim\mathbf{V}_{nn} = C_n^2.$$

Пусть теперь, перемножаются векторы трехмерного пространства, тогда можно считать $\mathbf{V}_3 \wedge \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_3$, т.е. результат внешнего произведения есть вектор того же пространства. Такая конструкция и определяет векторное произведение векторов пространства $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}_3$:

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = [\mathbf{xy}] = \mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{V}_3.$$

Операция внешнего произведения, конечно, может быть сформулирована и для пространства ковариантных векторов, в частности, определен внешний квадрат

$$\mathbf{V}^n \wedge \mathbf{V}^n = \mathbf{V}^{nn}, \quad \dim\mathbf{V}^{nn} = C_n^2.$$

Не ограничиваясь известными конструкциями, мы введем операцию внешнего умножения элементов сопряженных пространств $\mathbf{V}_n$, $\mathbf{V}^n$. Фиксируя базисы $\mathbf{e}_1...\mathbf{e}_n \in \mathbf{V}_n$, $\mathbf{e}^1...\mathbf{e}^n \in \mathbf{V}^n$ и используя представление (3), (5) для элементов пространств, пишем

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{x} = 0.5\left(a_i x^j - a_j x^i\right)\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}^j, \tag{10}$$

с условием кососимметричности

$$\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}_j \quad \Rightarrow \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}_i = 0, \quad i, j = 1, ..., n.$$

Таким образом, внешнее произведение пространств $\mathbf{V}^n$, $\mathbf{V}_n$ ковариантных и контравариантных векторов дает линейное пространство смешанного строения

$$\mathbf{V}^n \wedge \mathbf{V}_n = \mathbf{V}_n^n, \quad \dim \Lambda^2 \mathbf{V}_n^n = C_n^2.$$

Поскольку $\mathbf{V}_n^n$ линейное пространство с базисом, для него определены отображения

$$\mathbf{V}_n^n \to \mathbf{V}^n, \quad \mathbf{V}_n^n \to \mathbf{V}_n. \tag{11}$$

Выбор конкретного отображения определяется из физического смысла векторного произведения.

Пусть, теперь, перемножаются элементы трехмерных пространств $\mathbf{V}^3 \wedge \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_3^3$. Хотя результирующее пространство трехмерно, отождествить его с каким либо из исходных пространств нельзя, поскольку его элементы имеют смешанную структуру. После применения одного из отображений (11), мы получим трехмерное пространство, не тождественное исходным пространствам. Эта ситуация соответствует векторному произведению векторов различной природы

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{x} = [\mathbf{a}\mathbf{x}] = \mathbf{f}, \quad \mathbf{a} \in \mathbf{V}^3, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{V}_3,$$

при этом $\mathbf{f} \in \mathbf{V}_3'$ или $\mathbf{f} \in V'^3$ в зависимости от физического смысла векторного произведения.

Как и в случае свертывания элементов сопряженных пространств операция их внешнего произведения не предполагает наличия евклидовой структуры исходных пространств. Как было отмечено выше, если такая структура определена на одном из исходных пространств, то условие взаимности базисов (8) индуцирует её на другом пространстве. Если, кроме того, определено отображение (11), то евклидова структура будет индуцирована и на векторах внешнего произведения.

Пример 2. Сила Лоренца. Скорость частицы $\mathbf{v}$ – кинематическую величину определяем как элемент контравариантного векторного пространства $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_3$, индукцию магнитного поля $\mathbf{B}$ – физическую величину отнесем к пространству ковариантных векторов $\mathbf{B} \in \mathbf{V}^3$. Пусть $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \in \mathbf{V}_3$ и $\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3 \in \mathbf{V}^3$ базисы этих пространств. Вводя операцию внешнего умножения базисных векторов (10) определяем силу Лоренца $\mathbf{F}$, действующую на частицу как внешнее произведение элементов пространств

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{B} = B_i \mathbf{e}^i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = [\mathbf{v}\mathbf{B}] = 0.5\left(v^i B_j - v^j B_i\right) \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}^j = F_k \mathbf{e}^k.$$

Поскольку сила – физическая величина, относим её к пространству ковариантных векторов $\mathbf{F} = F_k \mathbf{e}^k \mathbf{V}_F^3$.

Таким образом, векторному умножению векторов различной природы, в координатно-векторном формализме соответствует операция внешнего умножения векторов сопряженных пространств.

3. Поток вектора

Дальнейшим развитием рассматриваемой концепции является использование линейных пространств контравариантных и ковариантных поливекторов. Рассмотрим использование 2-вектороных пространств для определения потока вектора, величину имеющее многочисленное применение в прикладных вопросах динамики.

При определении потока вектора, следует иметь ввиду, что этим термином могут обозначаться разные, хотя и близкие по смыслу, величины [2-5].

Пусть $\mathbf{V}_3, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ – геометрическое векторное пространство, $\mathbf{V}^3, \mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3$ – сопряженное ему пространство некоторой динамической величины. Определяя операцию внешнего произведения базисных векторов $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$, $\mathbf{e}^k \wedge \mathbf{e}^l$, построим 2-векторные пространства контравариантных и ковариантных элементов

$$\mathbf{V}_3 \wedge \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_{33}, \quad \mathbf{V}^3 \wedge \mathbf{V}^3 = \mathbf{V}^{33}.$$

Каждой паре векторов

$$\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} = y^j\mathbf{e}_j \in \mathbf{V}_3 \quad \text{и} \quad \mathbf{a} = a_k\mathbf{e}^k, \quad \mathbf{b} = b_l\mathbf{e}^l \in \mathbf{V}^3$$

будут соответствовать 2-векторы

$$\mathbf{s} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = s^{[ij]}\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \in \mathbf{V}_{33}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = h_{[lk]}\mathbf{e}^l \wedge \mathbf{e}^k \in \mathbf{V}^{33}, \quad i < j, \ k < l,$$

где $s^{[ij]} = x^i y^j - x^j y^i$, $h_{[kl]} = a_k b_l - a_l b_k$.

Определим операцию свертывания элементов пространств$\mathbf{V}_3$, $\mathbf{V}^3$. Поскольку базисные элементы обоих пространств можно рассматривать, как 2-валентные тензоры $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_{ij}$, $\mathbf{e}^k \wedge \mathbf{e}^l = \mathbf{e}^{kl}$, для них может быть определена операция свертывания. Используя свойство (8) и алгебраические соотношения (10), заключаем $\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = 1$. После чего свертывание элементов пространств будет выражаться инвариантом

$$h\left(\mathbf{h}, \mathbf{s}\right) = h_{[ij]} s^{[ij]} \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = h_{[ij]} s^{[ij]}. \tag{12}$$

Векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ входят в формулу (12) равноправным образом. Если фиксировать векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}_3$, то выражение (12) можно рассматривать как определение внешней 2-формы на этих векторах [3] $\omega^2\left(\mathbf{x}, \mathbf{y}\right) = \omega^2\left(\mathbf{h}, \mathbf{x}, \mathbf{y}\right)$.

Пусть $\mathbf{V}_3$ – геометрическое векторное пространство, $\mathbf{V}^3$ – однородное векторное поле физической величины. Поскольку в геометрической интерпретации бивектор $\mathbf{s}$ – направленный параллелограмм, построенный на векторах $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, то (12), в той же интерпретации, выражает поток 2-вектора $\mathbf{h}$ через параллелограмм $\mathbf{s}$. Поскольку $\dim\mathbf{V}^{33} = 3$, то можно определить отображение $\mathbf{V}^{33} \to \mathbf{V}^3$ и рассматривать $\mathbf{h}$ как вектор исходного пространства $\mathbf{V}^3$. Аналогично можно определить отображение $\mathbf{V}_{33} \to \mathbf{V}_3$, и рассматривать $\mathbf{s}$ как вектор, определяющий направленный параллелограмм. Тогда поток вектора $\mathbf{h}$ через $\mathbf{s}$ (12) выразится в форме

$$h\left(\mathbf{h}, \mathbf{s}\right) = h_k s^k \mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}^k. \tag{13}$$

При этом условие сопряженности базисов обеспечивает согласование ориентаций образованных пространств$\mathbf{V}^3$, $\mathbf{V}_3$.

Если исходные пространства евклидовы, то (13) выражает поток вектора $\mathbf{h}$ через площадь $\mathbf{s}$.

Заключение

При построении координатно-векторных моделей динамических и физических процессов геометрические и кинематические векторные величины целесообразно представлять элементами контравариантных векторных пространств, а динамические и физические векторные величины, относить к пространствам ковариантных векторов. Определение алгебраических операций свертывания и внешнего умножения между элементами обоих пространств позволяет корректно определять различные операции между векторами различных типов в механике и физике, на основе их аффинных свойств.

Перспективным является использование, ковариантных и контравариантных пространств в теории поля для определения дифференциальных операторов и построении фазовых пространств частиц движущихся в электромагнитных полях.

Список литературы

1. Ефимов И.Н., Морозов Е.А. Прецизионный высокочастотный магнитный ускоритель // Интеллектуальные системы в производстве. 2015. № 1. С. 149–151.

2. Рашевский К.Р. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.

3. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.

4. Зорич В.А. Математический анализ. Часть II. М.: Наука, 1984. 640 с.

5. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т.2. М.: Мир, 1977. 300 с.

References

1. Efimov I.N., Morozov E.A. Precision, high frequency magnetic accelerator. *Intelligent systems in production*, 2015, no. 1, pp. 149-151. (In Russian)

2. Rashevsky R.K. *Riemannian geometry and tensor analysis*. Moscow, Nauka Publ., 1967. 664 p. (In Russian)

3. Arnold V.I. *Mathematical methods of classical mechanics*. Moscow, Nauka Publ., 1974, 432 p. (In Russian)

4. Zorich V.A. *Mathematical analysis*. Moscow, Nauka Publ., 1984. Pt. 2, 640 p. (In Russian)

5. Feynman R., Leighton R., Sands M. *Feynman lectures on physics*. Moscow, Mir Publ., 1977. Vol. 2, 300 p. (In Russian)

Авторы

Морозов Евгений Александрович, д.т.н., профессор, Чайковский филиал Пермского национального исследовательского политехнического университета, ул. Ленина, 73, г. Чайковский, 617760, Россия.
E-mail: morothov@yandex.ru

Морозова Амина Рафкатовна, к.т.н., доцент, Чайковский филиал Пермского национального исследовательского политехнического университета, ул. Ленина, 73, г. Чайковский, 617760, Россия.
E-mail: morothova0711@yandex.ru

Морозова Людмила Евгеньевна, к.ф.-м.н., доцент, Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова, ул. Студенческая, 7, г. Ижевск, 426069, Россия.
E-mail: luvial@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Морозов Е. А., Морозова А. Р., Морозова Л. Е. Об использовании ковариантных и контравариантных векторных пространств в механике // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2018. № 3. С. 31—37.

Authors

Morozov Evgeny Alexandrovich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Tchaikovsky Branch of Perm National Research Polytechnic University, Lenin street, 73, Tchaikovsky, 617760, Russia.
E-mail: morothov@yandex.ru

Morozova Amina Rafkatovna, PhD, associate Professor, Tchaikovsky Branch of Perm National Research Polytechnic University, Lenin street, 73, Tchaikovsky, 617760, Russia.
E-mail: morothova0711@yandex.ru

Morozova Lyudmila Evgenievna, PhD in Physics, associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Studencheskaya str., 7, Izhevsk, 426069, Russia.
E-mail: luvial@mail.ru

Please cite this article in English as:
Morozov E. A., Morozova A. R., Morozova L. E. On the use of covariant and contravariant vector spaces in mechanics. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2018, no. 3, pp. 31–37.