

УДК 519.711.3+551.5.001.57+517.957

Ю. Г. Игнатьев<sup>1</sup>, А. Р. Самигуллина<sup>2</sup>

## ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СКМ MAPLE. II. АВТОМАТИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Описаны инструменты численно-аналитического моделирования нелинейных динамических систем на основе авторского прикладного пакета программ DifEqTools, приведены примеры вычислений.

**Ключевые слова:** нелинейные динамические системы, математическое моделирование, качественная теория дифференциальных уравнений, сплайновая аппроксимация, численные методы интегрирования, визуализация вычислений, прикладные математические пакеты.

**PACS:** 02.60.Cb, 07.05.Tr, 04.25.-g

*This work was founded by the subsidy allocated to Kazan Federal University for the state assignment in the sphere of scientific activities.*

### 1. Основные задачи визуализации математических моделей нелинейных динамических систем в системе компьютерной математики Maple

Важнейшим этапом численно-аналитического моделирования нелинейных динамических систем является визуализация численных результатов компьютерного моделирования. Визуализация математической модели позволяет не только выявить основные закономерности описываемого ею процесса, но и обнаружить некоторые детали, недоступные выявлению аналитическими методами исследования. В этой статье мы будем рассматривать инструменты исследования так называемых *обобщенно - механических* систем [2], описываемых системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений [3]:

$$y_i^{(n_i)} = F_i(y_1, \dots, y_N, y_1', \dots, y_N', y_1'', \dots, y_N'', \dots, y_1^{(n_1-1)}, \dots, y_N^{(n_N-1)}, t); \quad (i = \overline{1, N}), \quad (1)$$

где  $y^{(n)} = d^n y / dt^n$  — обозначение  $n$ -той производной функции  $y(t)$  по независимой переменной  $t$ , временной переменной<sup>3</sup>, а  $F_i$  — непрерывно-дифференцируемые функции своих переменных. Будем в дальнейшем полагать выполненными начальные условия для системы (1):

$$y_i^{(k)}(t) \Big|_{t=t_0} = C_i^k; \quad (k = \overline{1, n_i - 1}; i = \overline{1, N}), \quad (2)$$

соответствующие задаче Коши, где  $C_i^k$  — начальные значения производных  $k$ -го порядка функций  $y_i(t)$ . Ясно, что путем известных преобразований, которые автоматически выполняет представленный ранее пакет программ DifEq [4]<sup>4</sup>, система (2) преобразуется к стандартной нормальной системе (вообще говоря, неавтономной) обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \dots, x^n, t) \quad (i = \overline{1, n}) \Rightarrow \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(t). \quad (3)$$

с начальными условиями Коши

$$(x^1(t_0), \dots, x^n(t_0)) = (x_{(0)}^1, \dots, x_{(0)}^n) \Rightarrow \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_{(0)}. \quad (4)$$

<sup>1</sup>Е-mail: [ignatev\\_yu@rambler.ru](mailto:ignatev_yu@rambler.ru)

<sup>2</sup>Е-mail: [alsu\\_sam@rambler.ru](mailto:alsu_sam@rambler.ru)

<sup>3</sup>Хотя это может быть и не обязательно физическое время.

<sup>4</sup>как и расширенный пакет DifEqTools

Поэтому все функции  $y_i(t)$  и их производные до  $n_i - 1$  порядка включительно мы будем называть *динамическими переменными*:

$$y_1(t), \dots, y_N(t), y_1'(t), \dots, y_N'(t), y_1''(t), \dots, y_N''(t), \dots, y_1^{(n_1-1)}(t), \dots, y_N^{(n_N-1)}(t).$$

При этом необходимо оперативно получить графическую информацию об исследуемой динамической системе в различных форматах:

1. графики зависимости одной из динамических переменных от временной переменной,  $x^i(t)$  на заданном интервале  $t \in [t_1, t_2]$ ;
2. графики двумерных фазовых траекторий вида  $[x^i(t), x^k(t)]$  на заданном интервале временной переменной  $t \in [t_1, t_2]$ ;
3. трехмерные графики фазовой траектории вида  $[x^i(t), x^k(t), x^l(t)]$  на заданном интервале временной переменной  $t \in [t_1, t_2]$ ;
4. графики зависимости заданной функции динамических переменных от временной переменной,  $f(x^1(t), \dots, x^N(t))$  на заданном интервале  $t \in [t_1, t_2]$ ;
5. графики зависимости интегралов и производных от заданных функций динамических функций по временной переменной, на заданном интервале  $t \in [t_1, t_2]$ ;
6. графики двумерных фазовых траекторий двух заданных функций динамических переменных от временной переменной,  $[f_1(x^1(t), \dots, x^N(t)), f_2(x^1(t), \dots, x^N(t))]$ , на заданном интервале временной переменной  $t \in [t_1, t_2]$ ;
7. графики трехмерных фазовых траекторий трех заданных функций динамических переменных от временной переменной,  $[f_1(x^1(t), \dots, x^N(t)), f_2(x^1(t), \dots, x^N(t)), f_3(x^1(t), \dots, x^N(t))]$ ,  $[x^i(t), x^k(t)]$  на заданном интервале временной переменной  $t \in [t_1, t_2]$ ;
8. динамические графики (анимации) для всех указанных случаев.

При этом следует также предусмотреть возможность изменять методы решения и вывода численных и численно - аналитических решений, разработанных в предыдущих авторских пакетах **DifEq** и **SDplines**:

1. возможность изменять методы численного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями (2);
2. расширенные возможности управления точностью решений и допустимым числом итерационных шагов;
3. возможность представления решения в управляемом сплайновом формате.

Целью этой статьи, как и ряда предыдущих и последующих, является создание программного инструментария автоматизации численно-аналитического моделирования и полного исследования нелинейных динамических систем произвольного порядка. Центральной идеей Авторы является освобождение исследователей от громоздких вычислений и сложных специальных процедур программирования, позволив, тем самым, исследователю сосредоточиться на основных задачах научного исследования. Ясно, что процесс совершенствования такой системы программ не имеет конца, поэтому мы периодически будем вносить коррективы в программные продукты, сопровождая их необходимыми комментариями и примерами.

В этой статье мы опишем авторский расширенный пакет программ **DifEqTools** численно - аналитического моделирования нелинейных динамических систем и автоматизированного построения графических компьютерных моделей<sup>5</sup> и приведем примеры исследований на основе этого пакета. Пакет вместе

<sup>5</sup>Пакет обновлен 05.05.2017

с примерами использования размещен в свободном доступе на сайте журнала <http://www.stfi.ru/ru/software.html>. Авторы просят исследователей ссылаться на этот пакет при его использовании.

## 2. Инструменты исследования математических моделей нелинейных динамических систем в системе компьютерной математики Maple

### 2.1. Формат ввода задачи Коши и вывода информации о системе ОДУ

Пусть задача Коши определяется системой (1) и начальными условиями (2). Система обыкновенных дифференциальных уравнений (разрешенных относительно старших производных), как и система начальных условий, записывается в пакете `DiffEqTools` в форме списка (внутри квадратных скобок) даже в случае одиночного уравнения. Для простоты приведем пример системы формата записи двух линейных дифференциальных уравнений максимального третьего порядка, записанного с помощью дифференциального оператора  $(D@@n)(x)(t) \equiv \frac{d^n x(t)}{dt^n}$ :

```
>Eqs1:=[(D@@3)(x)(t)=-0.1*D(y)(t)-x(t),(D@@2)(y)(t)=0.1*D(x)(t)-y(t)];
```

В обычных обозначениях `convert(Eqs1,diff)` эта система имеет вид;

$$\left[ \frac{d^3 x(t)}{dt^3} = -0.1 \frac{d(t)}{dt} - x(t), \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = 0.1 \frac{dx(t)}{dt} - y(t) \right]; \quad (5)$$

Введем также начальные условия для системы (5):

```
>Ics1:=[x(0)=2,D(x)(0)=0,(D@@2)(x)(0)=0,y(0)=0,D(y)(0)=1];
```

$$\Rightarrow \left[ x(0) = 2, \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0, \left. \frac{d^2 x}{dt^2} \right|_{t=0} = 0, y(0) = 0, \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 1 \right] \quad (6)$$

Заметим, что полная информация о введенной задаче Коши извлекается с помощью команды

```
>DiffEqTools[SysCauchy_ConvNorm](Eqs1,Ics1);
```

В результате получим:

```
[5, 3], [[X[1](t), X[2](t)], [Y[1](t), Y[2](t)], [Z[1](t)]]],
[x(t) = X[1](t), (D(x))(t) = Y[1](t), ((D@@2)(x))(t) = Z[1](t),
y(t) = X[2](t), (D(y))(t) = Y[2](t), t = t],
[diff(X[1](t), t) = Y[1](t), diff(Y[1](t), t) = Z[1](t), diff(X[2](t), t) = Y[2](t),
diff(Z[1](t), t) = .1*Y[2](t)-X[1](t), diff(Y[2](t), t) = .1*Y[1](t)-X[2](t)],
[X[1](0) = 2, Y[1](0) = 0, Z[1](0) = 0, X[2](0) = 0, Y[2](0) = 1], 0]
```

В полученном списке первый список `[5, 3]` содержит число динамических переменных (5) и наивысший порядок производных системы ОДУ (3). Второй список содержит перечисление некоторых канонических переменных задачи, причем имя переменной ( $X, Y$ ) относится к номеру искомым функций по порядку правой части уравнений, а индекс — к порядку производной этой функции. Третий список содержит набор замен динамических переменных к каноническим переменным, в которых система ОДУ принимает нормальную форму (четвертый список). Пятый список представляет запись начальных условий в канонических переменных, а шестой список содержит один элемент — начальное значение временной переменной.

Обратим внимание также на команду пакета `DiffEqTools[InitialVars](Eqs)`, которая выводит список имен всех динамических переменных по заданной системе ОДУ. Для системы (5) исполнение команды

```
>DiffEqTools[InitialVars](Eqs1)
```

дает следующий список имен:

$$\left[ x(t), y(t), t, \left[ \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt} \right], \left[ \frac{d^2x(t)}{dt^2} \right] \right] \quad (7)$$

Здесь первый список содержит имена всех искомых функций, а также имя независимой переменной; второй список содержит имена первых производных искомых функций, а третий список в нашем случае содержит лишь одну величину – имя второй производной функции  $x(t)$ , так как высший порядок производной этой функции в системе ОДУ равен 3.

## 2.2. Вывод численных решений

Пакет `DifEqTools` позволяет автоматически выводить численные решения задачи Коши (1) – (2) в двух форматах. Первый из них реализуется командой

```
DifEqTools[NumDsolve](Eqs, ICS, [Method]),
```

где `Eqs` – система ОДУ и `ICS` – система начальных условий, записанных в виде списка (пример см. выше); `[Method]` – список параметров численных методов интегрирования системы ОДУ. Этот список должен содержать хотя бы один параметр – метод интегрирования, в форме `method=Method`, где `Method` – конкретный метод интегрирования системы ОДУ в СКМ Maple (см. Табл. 1).

Табл. 1. Некоторые методы численного интегрирования систем ОДУ в СКМ Maple

Название метода	Имя параметра в Maple	Характеристики метода
метод Рунге - Кутты - Фелберга 4-5 порядка	rkf45	Наиболее простой и быстрый метод интегрирования
метод Рунге - Кутты 7-8 порядка	dverk78	Метод интегрирования повышенной точности
метод Розенброка	rosenbrock	Метод интегрирования, сравнимый по точности с rkf45, применимый для интегрирования жестких систем ОДУ
классический метод	classical	Метод интегрирования с фиксированным размером шага интегрирования, дает большие ошибки
метод Тейлора	taylorseries	Метод интегрирования, основанный на разложении в ряд Тейлора, низкая скорость вычисления

Заметим, что метод Розенброка тоже с успехом работает для жестких систем и, пожалуй, является самым быстрым при сохранении точности вычислений. Кроме метода численного интегрирования в списке `[Method]` могут быть указаны дополнительные параметры численного интегрирования: абсолютная точность вычисления `abserr`, относительная допустимая ошибка вычисления `relerr`, максимально допустимое число шагов интегрирования `maxfun`. Заметим, что еще в версии Maple 18 максимальное значение этого параметра составляло 500000. В последней версии Maple 2016 это ограничение снято. Во-всяком случае интегрирование осуществляется даже с `maxfun=15000000`.

Командная процедура `DifEqTools[NumDsolve](Eqs, ICS, [Method])` выводит решение в формате списка. Приведем пример численного решения задачи Коши (5) – (6):

```
>SS:=DifEqTools[NumDsolve](Eqs1, ICS1, [method=rkf45]);
```

```
SS:=[[proc(t)...end proc,proc(t)...end proc],[proc(t)...end proc,proc(t)...end proc],[proc(t)...end proc]]
```

```
SS(0);SS(1);
```

```
[[2., 0.], [0., 1.], [0.1000000000000000]]
[[1.70287092152896, .848308700994169], [-.932817872564193, .568714400167878], [-1.91440840979363]]
```

Аналогичная командная процедура `NumericDsolve(Eqs, IC, [Method])` выводит решение в формате `operator`:

```
>RR:=DifEqTools[NumericDsolve](Eqs1, ICS1, [method=rkf45]);
```

```
RR:=[t=proc(t)...end proc,x=proc(t)...end proc,D(x)=proc(t)...end proc,
D^(2)(x)=proc(t)...end proc,y=proc(t)...end proc,D(y)=proc(t)...end proc]
```

```
>RR(0);RR(1);
```

```
[t = 0., x(0) = 2., (D(x))(0) = 0., ((D@@2)(x))(0) = .1000000000000000, y(0) = 0., (D(y))(0) = 1.]
[t = 1., x(1) = 1.70287092152896, (D(x))(1) = -.932817872564193, ((D@@2)(x))(1) =
-1.91440840979363, y(1) = .848308700994169, (D(y))(1) = .568714400167878]
```

Этот формат удобен для осуществления подстановки решения в пользовательские функции.

Команда `DifEqTools[NumericDsolve](Eqs, IC, [method=name])` выводит численное решение задачи Коши для системы ОДЕ `Eqs`, разрешенных относительно старших производных, начальных условий `IC` с помощью метода численного интегрирования `name`, при этом имя метода численного интегрирования может быть дополнено специальными опциями интегрирования, абсолютной и относительной точностью, максимальным числом шагов и другими.

Продемонстрируем применение команды к решению уравнений свободных колебаний<sup>6</sup>

```
>Eq_osc:=[diff(x(t),t$2)=-x(t)];
```

$$Eq\_osc := \left[ \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -x(t) \right] \quad (8)$$

```
>IC_osc:=[x(0)=0,D(x)(0)=1];
```

$$[x(0) = 0, D(x)(0) = 1] \quad (9)$$

Точное решение этой задачи Коши есть:  $x(t) = \sin(t)$ . Применяя команду, введем процедуру вывода решения:

```
PP1:=DifEqTools[NumericDsolve](Eq_osc, IC_osc, [method=rkf45]);
```

```
PP1 := [t=proc(t) ... end proc,x=proc(t) ... end proc,D(x)=proc(t) ... end proc]
```

Само численное решение можно вывести простой функцией:

```
>PP1(1);
```

```
[t = 1., x(1) = .841471101155307, (D(x))(1) = .540302331778567];
```

Рассмотрим еще один пример:

```
> Eqs:=[(D@@2)(x)(t)=-0.1*D(y)(t)-x(t), (D@@2)(y)(t)=-0.1*D(x)(t)-y(t)];
```

$$Eqs := \left[ D^{(2)}(x)(t) = -0.1D(y)(t) - x(t), D^{(2)}(y)(t) = -0.1D(x)(t) - y(t) \right]; \quad (10)$$

Введем также начальные условия для системы уравнений (10):

```
>ICS:=[x(0)=2,D(x)(0)=1,y(0)=0,D(y)(0)=0];
```

$$ICS := [x(0) = 2, D(x)(0) = 1, y(0) = 0, D(y)(0) = 0]; \quad (11)$$

<sup>6</sup>Читателя пусть не смущает простота приведенного примера, численные методы пакета Maple с одинаковой скоростью интегрируют линейные и нелинейные системы ОДУ. Данный пример приведен лишь в силу его простоты и прозрачности, а также для возможности сравнения с точным решением задачи Коши. Более сложные примеры будут рассмотрены ниже.

### 2.3. Программа вывода произвольных функций от численного решения задачи Коши

Команда `NumericDsolveFun(Eqs, ICs, [Metod], tau, F(t))` устроены аналогично предыдущим, но теперь она уже позволяют выводить функции  $F(t)$  от численных решений. Здесь `tau` - значение временной переменной, при котором выводится функция  $F(t)$ , а  $F(t)$  может быть и списком выводимых функций (а также и их производных) вида:

$$F(t) = [f_1(x(t), y(t), \dots, t), \dots, f_k(x(t), y(t), \dots, t)].$$

Приведем пример для задачи Коши (5) – (6):

```
>RRF:=(tau)->DifEqTools[NumericDsolveFun](Eqs1,ICS1,method=rkf45,
tau,[sin(x(t))^2,y(t)^2,D(x)(t)^2]);
```

```
RRF := proc → DifEqToolsNumericDsolveFun(Eqs1,ICS1,method = rkf45,
tau,[sin(x(t))^2 + : 2,y(t)^2,(D(x))(t)^2]) end proc
```

```
>RRF(1);
```

```
[1.982657493, .719627652182414, .870149183375188]
```

### 2.4. Программа вычисления определенных интегралов от функций, построенных на численных решениях системы ОДУ

Определенные интегралы вида:

$$J(s_0, s) = \int_{s_0}^s f(x(t), y(t), \dots, t) dt, \quad (12)$$

где  $x(t), y(t)$  – численные решения задачи Коши для системы ОДУ в пакете `DifEqTools`, а  $f(x(t), y(t), \dots, t)$  – заданная функция этих решений, вычисляются с помощью команды `NumericDsolveIntFun(Eqs, IC, metod, ff, L, N, k)`,

где первые три параметра описаны выше,  $ff(t) = [t, f(x(t), y(t), \dots, t)]$ ,  $L = [s_0, s]$ ,  $N$  – число отрезков разбиения интервала интегрирования,  $k$  – метод интегрирования ( $k=T$  – метод трапеций,  $k=S$  – метод Симпсона).

Приведем примеры интегрирования. Рассмотрим интеграл вида

$$J(s) = \int_0^s e^{x(t)} dt, \quad (13)$$

где  $x(t)$  – численное решение задачи Коши (8) – (9). Этот интеграл вычисляется методом трапеций с разбиением интервала интегрирования на 100 отрезков командой

```
>SS_T:=(s)->DifEqTools[NumericDsolveIntFun](Eq_osc,IC_osc,
method=rkf45,[t,exp(x(t))],[0,s],100,T);
```

```
>SS_T(1);
```

```
1.6551289004143868
```

при интегрировании методом трапеций и командой

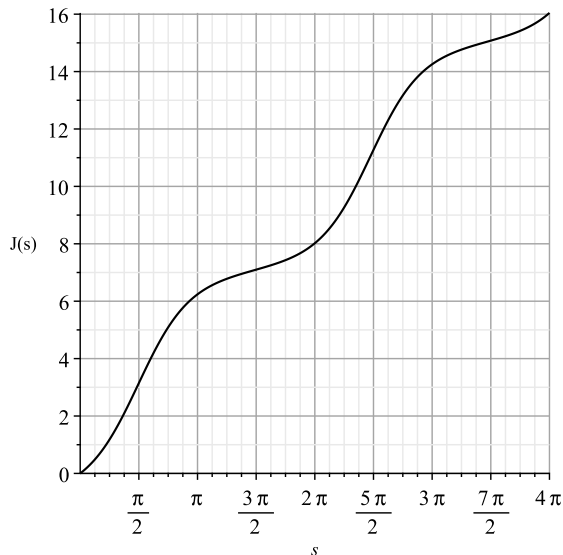
```
>SS_S:=(s)->DifEqTools[NumericDsolveIntFun](Eq_osc,IC_osc,
method=rkf45,[t,exp(x(t))],[0,s],100,S);
```

```
>SS_S(1);
```

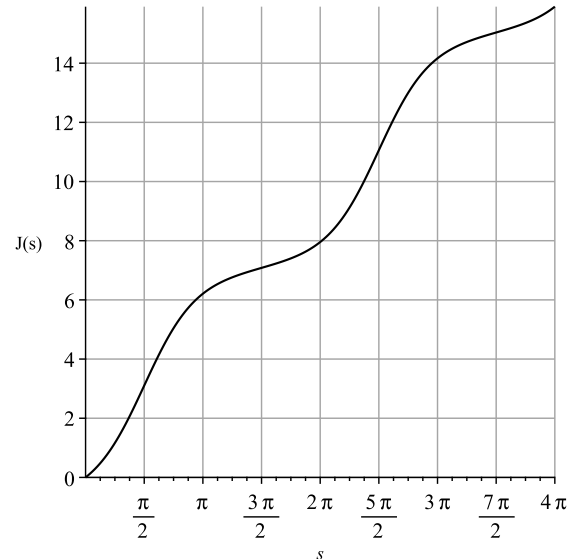
```
1.63186967646492
```

при интегрировании методом Симпсона.

На рисунках (Рис. 1 и Рис. 2) показаны результаты численного интегрирования на основе интегрирования численного решения задачи Коши (8) – (9) методом трапеций и Симпсона, соответственно.



**Рис. 1.** Интеграл  $J(s)$ , вычисленный на решении задачи Коши методом трапеций.



**Рис. 2.** Интеграл  $J(s)$ , вычисленный на решении задачи Коши методом Симпсона.

Для сравнения точности и скорости интегрирования вычислим интегралы на точном решении задачи Коши (8) – (9) и на основе команд численного интегрирования. Рассмотрим, например, интегралы:

$$S2(s) = \int_0^s x(s)^2 ds \equiv \frac{1}{2}s - \frac{1}{4} \sin 2s;$$

$$C2(s) = \int_0^s x'(s)^2 ds \equiv \frac{1}{2}s + \frac{1}{4} \sin 2s, \quad (14)$$

так что:

$$S2(s) + C2(s) \equiv s. \quad (15)$$

Вычислим интегралы  $S2(s)$  и  $C2(s)$  методом трапеций при разбиении интервала интегрирования на 1000 отрезков:

```
>SS_2T:=(s)->DifEqTools[NumericDsolveIntFun](Eq_osc,IC_osc,method=rkf45,
[t,x(t)^2],[0,s],1000,T);
CC_2T:=(s)->DifEqTools[NumericDsolveIntFun](Eq_osc,IC_osc,method=rkf45,
[t,D(x)(t)^2],[0,s],1000,T);
CS2T:=(s)->SS_2T(s)+CC_2T(s);
```

и методом Симпсона с таким же разбиением

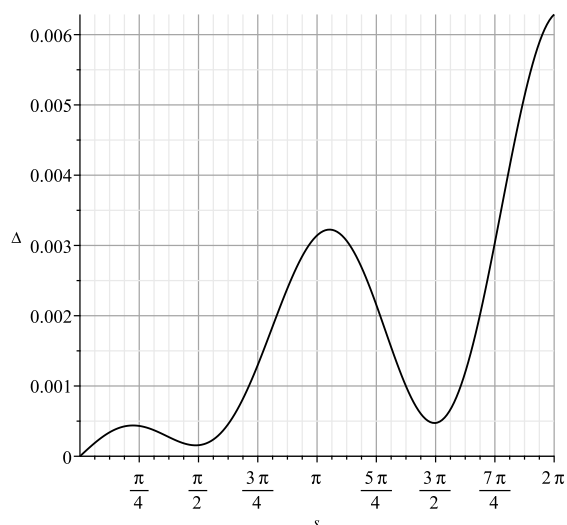
```
>SS_2S:=(s)->DifEqTools[NumericDsolveIntFun](Eq_osc,IC_osc,method=rkf45,
[t,x(t)^2],[0,s],1000,S);
CC_2S:=(s)->DifEqTools[NumericDsolveIntFun](Eq_osc,IC_osc,method=rkf45,
[t,D(x)(t)^2],[0,s],1000,S);
CS2S:=(s)->SS_2S(s)+CC_2S(s);
```

и полученные результаты сравним с точным результатом (15), выводя с помощью простой процедуры и время вычислений, T:

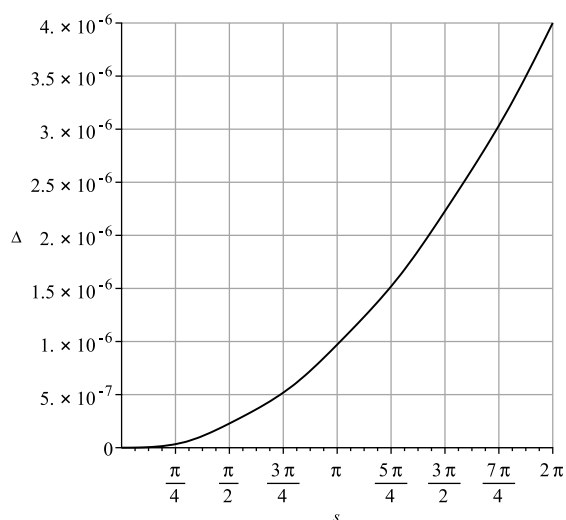
```
>T:=time():
plot(CS2T(s)-s,s=0..2*Pi);
time()-T;
```

```
>T:=time():
plot(CS2S(s)-s,s=0..2*Pi);
time()-T;
```

На рисунках представлены результаты интегрирования.



**Рис. 3.** Абсолютная ошибка интегрирования функции численного решения методом трапеций при разбиении интервала на 1000 отрезков. Время вычислений 177 с.



**Рис. 4.** Абсолютная ошибка интегрирования функции численного решения методом Симпсона при разбиении интервала на 1000 отрезков. Время вычислений 60 с.

Таким образом, метод Симпсона дает точность примерно на 3 порядка выше, чем метод трапеций с одновременным уменьшением времени вычислений примерно в 3 раза.

## 2.5. Программа вычисления производных от функций, построенных на численных решениях системы ОДУ

Хотя производные от численных решений и их функции можно выводить и с помощью описанной выше команды `NumericDsolveFun(Eqs,ICs,[Metod],tau,F(t))`, в пакете `DifEqTools` существует и специальная команда `Differential(Eqs,IC,[metod],[dff])` прямого вычисления производных с заданной точностью `d`, где первые три параметра описаны выше, а список `[dff]` определяется следующим образом:

`[dff]=[k,θ,n]`, где `k` — номер выводимой функции, `n` — порядок ее производной.

Покажем пример применения команды для вычисления первой производной численного решения рассмотренной задачи Коши

```
>PP3:=(t)->DifEqTools[NumericDifferential](Eq_osc,IC_osc,[method=rkf45],[1,θ,1,t,θ.001]);
```

и второй производной

```
>PP4:=(t)->DifEqTools[NumericDifferential](Eq_osc,IC_osc,[method=rkf45],[1,θ,2,t,θ.001]);
```

с точностью `d=θ.001`.



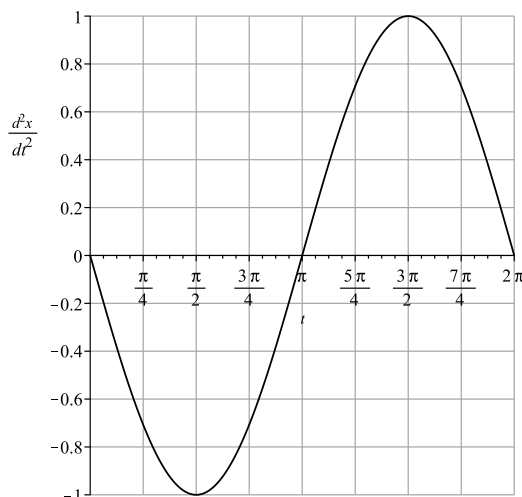
```
>PP3(Pi/3);
```

```
0.5000000612220347
```

```
>PP4(Pi/3);
```

```
-0.866025493890739
```

На рисунке (Рис. 5) показан график второй производной численного решения задачи Коши (8) – (9), выведенный с точностью  $d=0.01$ . Видно, что график совпадает с графиком функции  $-\sin(t)$ .



**Рис. 5.** График второй производной численного решения задачи Коши (8) – (9), точность вычисления производной – 0.01.

### 3. Благодарности

Авторы благодарны ректорату Казанского университета и дирекции Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского за материальную поддержку экспериментального проекта необходимым компьютерным и другим оборудованием, а также лицензионным программным обеспечением.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Игнатьев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Численно - аналитические методы математического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2016. Вып. 4(17). С. 78–105.
2. Игнатьев Ю.Г. Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. 298 с.
3. Игнатьев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Программный комплекс численно - аналитического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2016. Вып. 4(17). С. 147–148.
4. Игнатьев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Программный комплекс численно-аналитического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple // Пакет программ. URL: <http://www.stfi.ru/ru/software.html>.

Поступила в редакцию 02.07.2017

**Игнатьев Юрий Геннадьевич**, д. ф.-м. н., профессор, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35.

E-mail: [ignat'ev\\_yu@rambler.ru](mailto:ignat'ev_yu@rambler.ru)

**Самигуллина Алсу Ринатовна**, ассистент, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35.

E-mail: [alsu\\_sam@rambler.ru](mailto:alsu_sam@rambler.ru)

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Игнат'ев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Численно-аналитические методы математического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple. II. Автоматизация математического анализа нелинейных математических моделей // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2017. № 2. С. 74–83.

***Yu. G. Ignat'ev, A. R. Samigullina***

**Numerically - analytical methods for mathematical modeling of nonlinear dynamic systems in CAS Maple. II. Automation of the mathematical analysis of nonlinear mathematical models**

*Keywords:* nonlinear dynamical systems, mathematical modeling, qualitative theory of differential equations, spline approximation, numerical integration methods, visualization computing, application mathematical packages.

PACS: 02.60.Cb, 07.05.Tp, 04.25.-g

Describe the tools of numerical and analytical modeling of nonlinear dynamic systems based on the author's applied software package DifEqTools and examples of calculations.

## REFERENCES

1. Ignat'ev Yu.G., Samigullina A.R. Numerically-analytical methods for mathematical modeling of nonlinear dynamic systems in CAS Maple, *Space, Time and Fund. Interact.*, 2016, issue 4(17), p. 78–105.
2. Ignatyev Yu.G. *Matematicheskoe modelirovanie fundamental'nyh objektov i yavlenij v sisteme komp'yuternoj matematiki Maple. Lekcii dlya shkoly po matematicheskomu modelirovaniyu* (Mathematical modeling of fundamental objects and phenomena in system of computer mathematics Maple. Lectures for school on mathematical modeling), Kazan: Kazan University, 2013, 298 p.
3. Ignat'ev Yu.G., Samigullina A.R. Program complex for numerical and analytical mathematical modeling of nonlinear dynamic systems in CAS Maple, *Space, Time and Fund. Interact.*, 2016, issue 4(17), p. 147–148.
4. Ignat'ev Yu.G., Samigullina A.R. Program complex for numerical and analytical mathematical modeling of nonlinear dynamic systems in CAS Maple, *Space, Time and Fund. Interact.*, 2016. <http://www.stfi.ru/ru/software.html>.

Received 02.07.2017

**Ignat'ev Yuri Gennadievich**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 35A, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: [ignat'ev\\_yu@rambler.ru](mailto:ignat'ev_yu@rambler.ru)

**Samigullina Alsu Rinatovna**, assistant lecturer, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: [alsu\\_sam@rambler.ru](mailto:alsu_sam@rambler.ru)

**Please cite this article in English as:**

Ignat'ev Yu. G., Samigullina A. R. Numerically - analytical methods for mathematical modeling of nonlinear dynamic systems in CAS Maple. II. Automation of the mathematical analysis of nonlinear mathematical models, *Space, Time and Fund. Interact.*, 2017, no. 2, pp. 74–83.