

УДК 5530.12+531.51+517.944+519.713+514.774+519.711.3+551.5.001.57+517.957

*Ю. Г. Игнатьев,¹ А. Р. Самигулина²***ЧИСЛЕННО - АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СКМ MAPLE³**

Описаны численно - аналитические методы математического моделирования нелинейных динамических систем, основанные на комбинированном применении качественной теории дифференциальных уравнений, численных методов интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений и методов сплайновой аппроксимации функций в прикладном математическом пакете Maple. Показаны примеры исследования нелинейных динамических систем.

Ключевые слова: нелинейные динамические системы, математическое моделирование, качественная теория дифференциальных уравнений, сплайновая аппроксимация, численные методы интегрирования, визуализация вычислений, прикладные математические пакеты.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S, 52.27.Ny, 02.60.Cb, 07.05.Tr, 04.25.-g

Введение: нелинейные динамические системы в теоретической физике и теории гравитации

Нелинейные динамические системы, с математической точки зрения описываемые системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), являются фундаментальной моделью нелинейных процессов, возникающих, как в системах частиц (механических системах), так и в сложных системах частиц и полей (электродинамических системах, системах с гравитационным и скалярным взаимодействием). Многие базовые модели гравитации и космологии, несмотря на их существенно полевой характер, часто также сводятся к нелинейным динамическим системам. Простейшим примером таких систем являются все однородные космологические модели. Как известно, до сих пор не существует универсальных математических методов нахождения точных решений нелинейных систем ОДУ, и проблема исследования таких систем в последние годы становится особенно острой в связи с возросшим интересом теоретической физики к нелинейным процессам. В последние 30 лет, в связи с исследованием таких систем, например, солитонов, растет понимание того, что линейные модели физических процессов являются весьма приближенными, достаточно хорошо описывающими реальные явления лишь при достаточно малых временах, то есть, линейные модели являются как бы первым членом разложения Тейлора истинных закономерностей природы. К сожалению, математика пока не отвечает на этот вызов времени. Исключением является лишь качественная теория динамических систем, с помощью которой можно получить и классифицировать некоторые асимптотические свойства таких систем.

В этих условиях для исследования нелинейных динамических систем приходится применять различные методы численного интегрирования систем нелинейных ОДУ, то есть, неизбежно переходить к методам компьютерного моделирования. Система компьютерной математики (СКМ) Maple хорошо приспособлена к такому моделированию. В ней помимо большого набора инструментов численного интегрирования есть специальные средства для построения фазовых портретов динамических систем, а также очень хорошо проработанные средства сплайновой экстраполяции, что позволяет совместить численные и аналитические методы исследования динамических систем. Важным обстоятельством для гравитационистов является наличие в Maple продвинутого пакета тензорных вычислений.

Целью статьи является ознакомление физиков - теоретиков, сталкивающихся с проблемами исследования нелинейных динамических систем, с методами численно - аналитического исследования таких систем в СКМ Maple. При этом мы рассмотрим ряд простых, но поучительных

¹E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

²E-mail: alsu_sam@rambler.ru

³This work was founded by the subsidy allocated to Kazan Federal University for the state assignment in the sphere of scientific activities.

примеров такого исследования. Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского федерального университета обладает тремя компьютерными классами с установленными лицензионными версиями Maple XVIII, Mathematica, MatLab. В настоящее время стоимость лицензии последней версии Maple (XIX) \$2800, стоимость 15 лицензий - \$18750, что, в принципе, приемлемо для Российских ВУЗов.

В этой статье мы рассмотрим, как классические методы исследования нелинейных динамических систем, так и современные, основанные на сочетании методов численного интегрирования систем нелинейных ОДУ с методами сплайновой аппроксимации функций, позволяющих в системах компьютерной математики (СКМ) осуществить вывод решений нелинейных ОДУ в форме аналитических кусочно заданных непрерывных вместе со своими r первыми производными функций. С полученными таким образом сплайновыми решениями можно в дальнейшем производить вычисления как с обыкновенными аналитическими функциями. Соответствующие методы компьютерного моделирования разработаны в ряде работ одного из Авторы с учениками [1-8]. С более сложными примерами численно - аналитических исследований нелинейных космологических систем с помощью СКМ Maple можно ознакомиться в статьях этого же журнала более ранних выпусков. Заметим, что Редакция открывает специальный раздел «Программное обеспечение» на сайте журнала <http://www.stfi.ru>, который будет содержать, как пакеты программ специального назначения, так и инструкции к ним. Мы же обращаемся к Читателям с просьбой: при использовании авторских пакетов ссылаться на них в своих публикациях.

1. Необходимые сведения из качественной теории нелинейных динамических систем

В этом разделе мы с некоторыми упрощениями изложим основные понятия качественной теории динамических систем и приведем соответствующие оригинальные примеры исследования. Упрощения, в частности, касаются ограничением рассмотрения динамических систем только с ненулевыми и невырожденными собственными значениями.

1.1. Автономные динамические системы

Наиболее известным методом исследования нелинейных динамических систем является метод качественного исследования динамических систем, основы которого были сформулированы в работах Пуанкаре [10], [11]. В наше время развитие этой теории было дано в работах Арнольда с учениками (см., например, [12]). Приложения качественной теории дифференциальных к космологии и астрофизике рассмотрены в книге О.И. Богоявленского [13]. Качественная теория динамических систем применима к так называемым *автономным* системам обыкновенных дифференциальных уравнений (в дальнейшем - ОДУ), то есть, к системам ОДУ, явно не зависящим от временной переменной t^4 . *Нормальная система* ОДУ для автономной динамической системы с n степенями свободы относительно динамических переменных x_i имеет вид:

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \dots, x^n) \quad (i = \overline{1, n}) \Rightarrow \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}. \quad (1.1)$$

Решения этой системы уравнений при заданных начальных условиях

$$(x^1(t_0), \dots, x^n(t_0)) = (x_{(0)}^1, \dots, x_{(0)}^n) \Rightarrow \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_{(0)} \quad (1.2)$$

описывает *фазовую траекторию* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \equiv (x^1(t), \dots, x^n(t))$ в n -мерном арифметическом фазовом пространстве X_n .

1.2. Особые точки динамической системы

Определение 1. Точка $M_0(\mathbf{r}_0)$ называется особой точкой динамической системы (1.1), если в этой точке:

$$f^i(x_0^1, \dots, x_0^n) = 0 \quad (i = \overline{1, n}) \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{0}. \quad (1.3)$$

⁴Любая неавтономная система сводится к автономной введением новой переменной x_{n+1} , такой что $dx_{n+1} = 1$; то есть, неавтономная динамическая система имеет на 1 большее число степеней свободы, чем соответствующая ей автономная система.

Таким образом, особые точки динамической системы (1.1) определяются решением системы n алгебраических уравнений относительно координат точки.

1.3. Основная теорема качественной теории динамических систем

Рассмотрим некоторую особую точку динамической системы (1.1) и определим *собственные векторы* \mathbf{u}_0 и *собственные значения* матрицы динамической системы в этой точке

$$a_k^i(\mathbf{r}_0) = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x^k} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \Rightarrow A_0 \equiv A(\mathbf{r}_0) = \|a_k^i(\mathbf{r}_0)\|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \quad (1.4)$$

$$\|A_0 - \lambda E\| \mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \Rightarrow A_\lambda(\mathbf{r}_0) \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}. \quad (1.5)$$

Матрица $A_\lambda(\mathbf{r}_0) \equiv \|A_0 - \lambda E\|$ называется *характеристической матрицей* динамической системы (1.1) в точке M_0 . Для нетривиальной совместности системы (1.5) необходимо и достаточно равенство нулю определителя характеристической матрицы A_λ :

$$\det \|A_0 - \lambda E\| = 0. \quad (1.6)$$

Определение 2. Корни характеристического уравнения (1.6) $\lambda_i, i = \overline{1, n}$ называются *собственными числами* динамической системы (1.1) в особой точке M_0 . Особая точка называется *невырожденной*, если вещественные части всех собственных чисел в этой точке отличны от нуля: $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0, i = \overline{1, n}$.

1.4. Основная теорема качественной теории динамических систем

Исследуем поведение решений вблизи особых точек динамической системы (1.1). Для этого разложим правые части этих уравнений в ряд Тейлора вблизи особой точки M_0 , ограничиваясь линейным приближением:

$$f_i(\mathbf{r}) \approx f_i(\mathbf{r}_0) + \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial f_i}{\partial x^k} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} (x^k - x_0^k) \Rightarrow \frac{d\Delta \mathbf{r}}{dt} = A_0 \Delta \mathbf{r}, \quad (1.7)$$

где $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. Заметим, что отсюда следует: если $\Delta \mathbf{r} \sim \mathbf{u}_0$, то $\Delta \dot{\mathbf{r}} \approx \lambda \Delta \mathbf{r} \Rightarrow$

$$\mathbf{r} \approx \mathbf{r}_0 + \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}.$$

Таким образом, справедлива теорема:

Теорема 1. Если особая точка M_0 динамической системы (1.1) является невырожденной, то существует непрерывное взаимно-однозначное преобразование фазовой окрестности этой точки, которое переводит фазовые траектории (1.1) в фазовые траектории (1.7).

Итак, пусть матрица A_0 имеет n различных собственных чисел λ_k и пусть \mathbf{u}_k - соответствующие собственные векторы. Тогда матричное уравнение (1.7) имеет следующее решение:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \text{Re} \sum_{k=1}^n C_k \mathbf{u}_k e^{\lambda_k t}. \quad (1.8)$$

Отсюда следует, что поведение решений вблизи особых точек полностью определяется собственными значениями и собственными векторами динамической системы в этих точках.

1.5. Классификация особых точек

В классификации особых точек динамической системы используется следующая теорема.

Теорема 2. Если динамическая система (1.1) имеет в особой точке M_0 p собственных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ($p \leq n$) с отрицательными вещественными частями $\alpha_i \equiv \text{Re}(\lambda_i) < 0$, причем $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_p$, то при $t \rightarrow +\infty$ все траектории динамической системы в инвариантном p -мерном подпространстве X_+^p входят в эту особую точку, причем для каждой траектории

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |\Delta \mathbf{r}|}{t} = \alpha_i \quad (1.9)$$

при некотором i^5 .

Если же собственное число с максимальной отрицательной вещественной частью единственно, то почти все траектории в указанном подпространстве касаются соответствующего единственного собственного вектора и имеют при $t \rightarrow +\infty$ асимптотику (1.9). В противоположном случае r собственных чисел с положительной вещественной частью все траектории в инвариантном подпространстве X_-^r выходят из этой особой точки. Указанные траектории, входящие при $t \rightarrow \pm\infty$ в особую точку, называются *сепаратрисами*. Поведение сепаратрис вблизи особых точек определяется теоремой 1, в частности, (1.8).

Определение 3. Невырожденная особая точка M_0 называется *седловой* (неустойчивой), если динамическая система (1.1) имеет в этой точке p собственных чисел с отрицательной вещественной частью и $n - p$ собственных чисел с положительной вещественной частью.

Согласно теореме 2 существуют два инвариантных подпространства X_+^p и X_-^{n-p} , проходящие через данную особую точку, в которых лежат входящие и выходящие сепаратрисы. Подпространство X_+^p устойчивым подпространством динамической системы (1.1), проходящим через особую точку M_0 , а подпространство X_-^{n-p} - неустойчивым подпространством системы. При этом все остальные фазовые траектории, не лежащие целиком в подпространствах X_+^p и X_-^{n-p} , не входят в данную седловую точку.

2. Качественное исследование механических динамических систем

2.1. Особенности механических динамических систем

Как известно, фазовые траектории механических систем определяются ОДУ 2-го порядка вида⁶:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = F^i(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n); \quad (i = \overline{1, n}), \quad (2.1)$$

где n - размерность пространства, $\dot{x}^i = dx^i/ds \equiv v^i$, s - инвариантная временная переменная: либо время в классической динамике ($s = t$), либо канонический параметр в релятивистской динамике, либо оптическая длина пути ($s = \tau$) в геометрической оптике. Стандартным преобразованием, система уравнений движения приводится к нормальной автономной системе ОДУ:

$$\frac{dx^i}{ds} = y^i; \quad \frac{dy^i}{ds} = F^i(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n), \quad (i = \overline{1, n}). \quad (2.2)$$

Согласно (1.3) и (2.2) в особых точках механической системы скорость обращается в нуль:

$$y_0^i = 0; \Rightarrow M_0(x_0^1, \dots, x_0^n, 0, \dots, 0), \quad (2.3)$$

причем *конфигурационные координаты* особой точки x_0^1, \dots, x_0^n определяются решением системы алгебраических уравнений:

$$F^i(x_0^1, \dots, x_0^n, 0, \dots, 0) = 0; \quad (i = \overline{1, n}), \quad (2.4)$$

что значительно облегчает задачу.

⁵При этом учитывается кратность всех собственных чисел, k_α , так что $\sum_{\alpha=1}^p k_\alpha = n$.

⁶Исключение составляют электродинамические системы с тормозным электромагнитным излучением, для которых уравнения движения имеют третий порядок [2].

2.2. Пример: одномерные нелинейные колебания

При увеличении амплитуды колебаний вблизи точки равновесия начинают проявляться *нелинейные свойства* движения механической системы. Рассмотрим разложение потенциала $U(x)$ вблизи точки равновесия $x = 0$ в ряд Тейлора до 4-го порядка по x , полагая, что потенциал является четной функцией относительно точки равновесия.

Итак, положим:

$$U(x) = a_0 + \frac{1}{2}a_2x^2 + \frac{1}{4}a_4x^4. \quad (2.5)$$

Для того, чтобы получить потенциальную яму, необходимо, чтобы

$$a_4 > 0. \quad (2.6)$$

Вычисляя первую производную от $U(x)$, получим уравнение на точки экстремумов:

$$x(a_2 + a_4x^2) = 0. \quad (2.7)$$

Одна точка экстремума всегда существует: $x = 0$. В случае, если $a_2 > 0$, больше экстремумов нет, и мы имеем параболу 4-го порядка. Если $a_2 < 0$, имеются еще две симметричные точки минимумов, в этом случае $x = 0$ - точка максимума. Выбирая коэффициенты согласно (2.8), мы добьемся того, чтобы точки максимума находились в нуле энергии. Тогда получим искомый потенциал 4-го порядка (см. Рис. 1):

$$U(x) = -\frac{k^2x^2}{2} + \frac{\alpha^2x^4}{2}; \quad a_0 = 0, a_2 = -k^2/2, a_4 = \alpha^2/2. \quad (2.8)$$

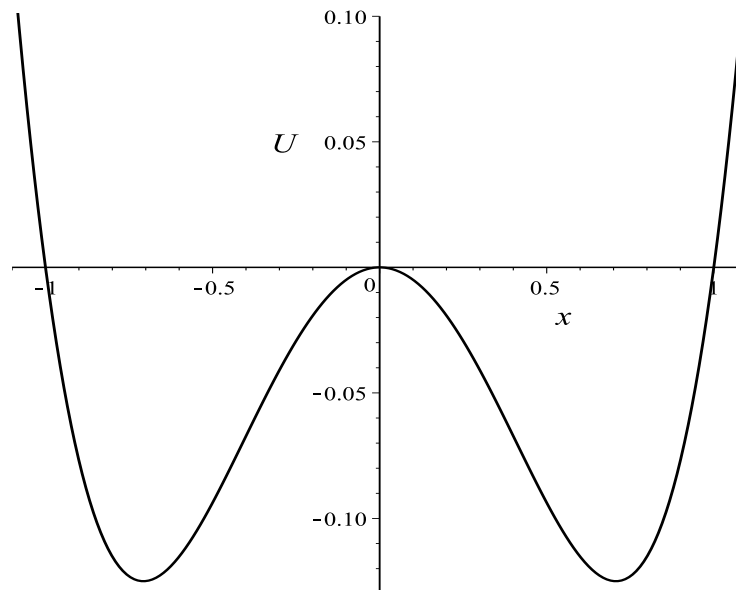


Рис. 1. График потенциала 4-го порядка (2.8) при $k = 1, \alpha = 1$: точки минимума $x_{\pm} = \pm \frac{k}{\sqrt{2}\alpha}$.

Таким образом, полная энергия системы в отсутствие трения равна:

$$E = T + U = m\dot{x}^2 - \frac{k^2x^2}{2} + \frac{\alpha^2x^4}{2} = \text{Const}. \quad (2.9)$$

Уравнение свободных колебаний с потенциалом 4-го порядка с учетом линейной силы трения $F_{\text{Тд}} = -\beta\dot{x}$ ($\beta > 0$ - коэффициент линейного трения) принимает вид:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} - \frac{k^2}{m}x + 2 \frac{\alpha^2}{m}x^3 = 0. \quad (2.10)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение с кубической нелинейностью. Его решение можно получить только численным интегрированием. Предварительно, однако, можно провести качественный анализ нелинейных колебаний. Произведя стандартное преобразование $\dot{x} = y$ приведем уравнение (2.10) к стандартному виду системы ОДУ на плоскости:

$$\dot{x} = P(x, y); \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (2.11)$$

где в нашем случае:

$$P(x, y) = y; \quad Q(x, y) = -\frac{\beta}{m}y + \frac{k^2}{m}x - 2\frac{\alpha^2}{m}x^3. \quad (2.12)$$

Таким образом, найдем 3 особые точки системы, совпадающие с точками экстремума потенциальной энергии:

$$M_0(0, 0); \quad M_{\pm}(x_{\pm}, 0); \quad \left(x_{\pm} = \pm \frac{k}{\sqrt{2\alpha}}\right). \quad (2.13)$$

Найдем частные производные функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в особых точках:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{k^2}{m} - 6\frac{\alpha^2}{m}x^2; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\beta}{m} \Rightarrow$$

$$A_0(M_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k^2}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{pmatrix}; \quad \Delta(M_0) = -\frac{k^2}{m} < 0; \quad (2.14)$$

$$A_0(M_{\pm}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\frac{k^2}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{pmatrix}; \quad \Delta(M_{\pm}) = 2\frac{k^2}{m} > 0. \quad (2.15)$$

Получим значения собственных чисел в особых точках динамической системы:

$$M_0: \quad \lambda_0 = -\frac{\beta}{2} \pm \frac{\sqrt{4k^2m + \beta^2}}{2m}; \quad (2.16)$$

$$M_{\pm}: \quad \lambda_{\pm} = -\frac{\beta}{2} \pm i\frac{\sqrt{8k^2m - \beta^2}}{\sqrt{m}}; \quad 8k^2m - \beta^2 > 0. \quad (2.17)$$

Таким образом, особая точка M_0 является притягивающей седловой, так как собственные значения динамической системы в этой точке вещественны и имеют разные знаки ($\lambda_1 \lambda_2 = \Delta(M_0) < 0$). Симметричные же особые точки M_{\pm} являются притягивающими фокусами, так как собственные значения динамической системы в этих точках являются комплексно сопряженными с отрицательной вещественной частью.

2.3. Фазовые портреты нелинейной механической системы в пакете Maple

Фазовые портреты двумерной динамической системы можно легко построить в СКМ Maple. Для этого зададим систему уравнений (2.11) - (2.12):

```
SODE:=(beta, alpha, k, m)->[diff(x(t), t)=y(t),
diff(y(t), t)=-beta*y(t)/m+k^2*x(t)/m-2*alpha^2*x(t)^3/m];
```

и применим команду библиотеки DEtools[DEplot]:

```
DEtools[DEplot](SODE(0.1, 0.1, 1, 1), [x(t), y(t)], t=0..100, [[x(0)=0, y(0)=10]],
stepsize=0.1, method=rkf45, arrows=SMALL,
color=COLOR(RED, 0.3, 0.3, 0.3), linecolor=BLACK, thickness=2,
labels=["x(t)", "y(t)"], labelfont=[BOLD, 14], axes=BOXED);
```

В этой команде первыми тремя обязательными параметрами являются: система ОДУ в нормальной форме, список неизвестных функций, пределы изменения временной переменной, список начальных условий. Остальные необязательные параметры, вводимые с помощью знака =, ответственны за шаг интегрирования, метод интегрирования, формат стрелок поля направлений касательных к фазовым траекториям, цвет этих стрелок, цвет линии фазовой траектории,

толщину изображаемой линии, метки координатных осей, шрифт этих меток и формат координатных осей.

На представленных фазовых портретах (Рис. 2 - 3) начальные условия соответствуют положительной и отрицательной начальной скорости, соответственно. При этом система опускается в левую либо в правую потенциальную яму. Фазовые портреты наглядно демонстрируют все 3 особые точки динамической системы (2.11) - (2.12).

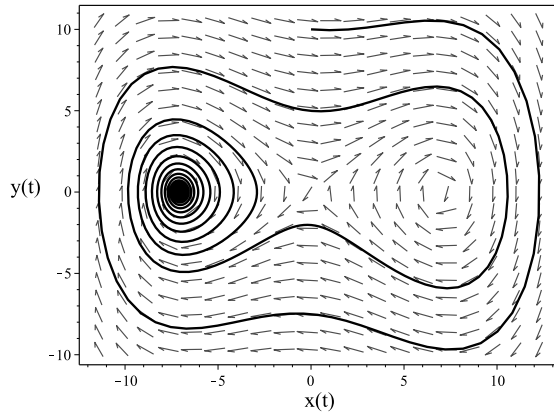


Рис. 2. Фазовый портрет динамической системы (2.11) - (2.12) с параметрами: $k = 1, m = 1, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$ при начальных условиях $x(0) = 0; y(0) = 10; t \in [0, 100]$.

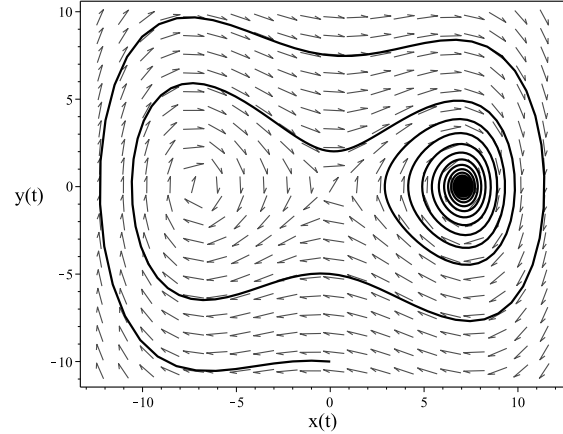


Рис. 3. Фазовый портрет динамической системы (2.11) - (2.12) с параметрами: $k = 1, m = 1, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$ при начальных условиях $x(0) = 0; y(0) = -10; t \in [0, 100]$.

3. Геодезические линии

Геодезические линии являются частным случаем автономных динамических систем, они описываются системой ОДУ второго порядка:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (3.1)$$

3.1. Общий анализ

Прямое применение качественной теории к системе (3.1) приводит к противоречию: любые точки риманова пространства являются особыми. Однако, это не так. Дело в том, что производные координат dx^i/ds связаны соотношением нормировки:

$$g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} = e, \quad (3.2)$$

где $e = 1$ для времениподобных траекторий и $e = 0$ - для изотропных траекторий. Видно, что при $e = 1$ соотношение нормировки прямо противоречит результату прямого применения качественной теории. Соотношение нормировки налагает дополнительную связь, которую необходимо учесть, прежде, чем применять качественную теорию динамических систем. Полагая $e = 1$, найдем из соотношения нормировки⁷ ($\alpha, \beta, \gamma = \overline{1, 3}$):

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} = u^4 \frac{dx^\alpha}{dt} \equiv u^4 y^\alpha \Rightarrow u^4 \equiv \frac{dx^4}{ds} = \frac{1}{\sqrt{g_{44} + 2g_{4\alpha} y^\alpha + g_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta}}, \quad (3.3)$$

где $t \equiv x^4, \dot{x} = dx/dt$ ⁸. Таким образом, в случае гравитационного поля мы проводим 3+1 разбиение уравнений движения. В результате мы получаем систему ОДУ на относительно пространственных координат:

$$\dot{x}^\alpha = y^\alpha; \quad \dot{y}^\alpha = y^\alpha (\Gamma_{44}^4 + 2\Gamma_{4\beta}^4 y^\beta + \Gamma_{\beta\gamma}^4 y^\beta y^\gamma) - \Gamma_{44}^\alpha - 2\Gamma_{4\beta}^\alpha y^\beta - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha y^\beta y^\gamma. \quad (3.4)$$

⁷Для геодезических в локально евклидовых римановых пространствах необходимо исключить производную любой координаты.

⁸Здесь и в дальнейшем мы полагаем $G = \hbar = c = 1$.

Таким образом, для геодезических линий особые точки определяются координатами:

$$M_0: \quad y_0^\alpha = 0; \quad \Gamma_{44}^\alpha(x_0^\alpha) = 0. \quad (3.5)$$

Вычисляя частные производные от функции f^i в особой точке, найдем элементы матрицы a динамической системы 6×6 :

$$\begin{aligned} a_\beta^\alpha &= \left. \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} \right|_{x_0^i} = 0; & a_{\beta+3}^\alpha &= \delta_\beta^\alpha, \\ a_\beta^{\alpha+3} &= \left. \frac{\partial f^{\alpha+3}}{\partial x^\beta} \right|_{x_0^i} = -\partial_\beta \Gamma_{44}^\alpha \Big|_{x_0^i}; & a_{\beta+3}^{\alpha+3} &= \delta_\beta^\alpha \Gamma_{44}^\alpha(x_0^i) - 2\Gamma_{4\beta}^\alpha(x_0^i). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Заметим, что строгое применение качественной теории динамических систем в такой постановке задачи возможно лишь для стационарных полей тяготения ($\partial_4 g_{ik} = 0$), иначе система динамических уравнений не будет являться автономной. В статических же гравитационных полях ($\partial_4 g_{ik} = 0$, $g_{\alpha 4} = 0$) $\Gamma_{44}^\alpha = 0$; $2\Gamma_{4\beta}^\alpha = 0$, поэтому $a_{\beta+3}^{\alpha+3} = 0$ и матрица динамической системы принимает вид:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\partial_1 \Gamma_{44}^1 & -\partial_2 \Gamma_{44}^1 & -\partial_3 \Gamma_{44}^1 & 0 & 0 & 0 \\ -\partial_1 \Gamma_{44}^2 & -\partial_2 \Gamma_{44}^2 & -\partial_3 \Gamma_{44}^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\partial_1 \Gamma_{44}^3 & -\partial_2 \Gamma_{44}^3 & -\partial_3 \Gamma_{44}^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{M_0}. \quad (3.7)$$

Определитель этой матрицы, очевидно, равен:

$$\Delta(A_0) = \begin{vmatrix} \partial_1 \Gamma_{44}^1 & \partial_2 \Gamma_{44}^1 & \partial_3 \Gamma_{44}^1 \\ \partial_1 \Gamma_{44}^2 & \partial_2 \Gamma_{44}^2 & \partial_3 \Gamma_{44}^2 \\ \partial_1 \Gamma_{44}^3 & \partial_2 \Gamma_{44}^3 & \partial_3 \Gamma_{44}^3 \end{vmatrix}_{M_0}. \quad (3.8)$$

В случае, когда удастся найти первые интегралы уравнений геодезических, порядок исследуемой динамической системы можно понизить. Кроме того, выражая с помощью этих первых интегралов первые производные координат через функции координат, мы тем самым избежим указанного выше противоречия. В этом случае в качестве временной переменной можно сохранить и канонический параметр. Как известно, при наличии группы движений метрики гравитационного поля G_r существует r независимых векторов Киллинга $\xi^i_{(a)}$, вдоль направления которых сохраняется метрика⁹:

$$\mathbb{L}_{\xi^i_{(a)}} g_{ik} = 0, \Leftrightarrow \xi^i_{,ik} + \xi^i_{,ki} = 0; \quad (a = \overline{(1, r)}). \quad (3.9)$$

При этом существует и r первых интегралов уравнений геодезических линий:

$$C_{(a)} = \left(\xi^i_{(a)}, u \right) \equiv g_{ik} \xi^i_{(a)} u^k, \quad u^i = \frac{dx^i}{ds}. \quad (3.10)$$

3.2. Вычисление геометрических объектов в СКМ Maple

СКМ Maple содержит пакет `tensor`, позволяющий проводить вычисления с тензорными объектами. Кроме того, в последних версиях этой системы содержится пакет `Tensor`, расширяющий возможности пакета `tensor` в области дифференциальной геометрии, а также пакет `Physics`, позволяющий работать непосредственно с индексными объектами. Следует отметить, что в последних версиях Maple, начиная с XV, исправлены ошибки, содержащиеся в пакете `tensor` более ранних версий Maple. Привычно громоздкие и малополезные для ума вычисления с тензорными объектами пакет `tensor` позволяет проводить в считанные минуты. Следует отметить

⁹ см., например, [20]

лишь следующее обстоятельство, тензор Риччи, определяется в пакете `tensor` сверткой тензора кривизны по первому и четвертому индексам, а не как принято в отечественной традиции¹⁰, - по первому и третьему. В связи с этим, ряд тензорных объектов меняют знак:

$$R_{ik}^{TF} = -R_{ik}^{Maple}; \quad R^{TF} = -R^{Maple}; \quad G_{ik}^{TF} = -G_{ik}^{Maple}. \quad (3.11)$$

Поэтому необходимо учитывать соотношения (3.11) в конечных выражениях, если мы хотим сохранить запись уравнений Эйнштейна в стандартной для отечественной традиции форме

$$G_{ik} = \kappa T_{ik} + \Lambda g_{ik}, \quad (3.12)$$

где $\Lambda > 0$ - космологическая постоянная.

Итак, проведем необходимые вычисления в метрике Шварцшильда:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (3.13)$$

Сначала подключим специализированные пакеты тензорных операций и линейной алгебры:

```
>with(tensor):
with(linalg):
```

Зададим далее координаты в виде упорядоченного списка `coord`, создадим ковариантный метрический тензор `g` и контрвариантный метрический тензор `g_1`¹¹

```
coord:=[r,theta,phi,tau]:
g_compts:=array(symmetric,sparse,1..4,1..4):
g_compts[1,1]:=-1/(1-2*m/r):
g_compts[2,2]:=-r^2:
g_compts[3,3]:=-r^2*sin(theta)^2:
g_compts[4,4]:=1-2*m/r:
g:=create([-1,-1],eval(g_compts));
g_1:=invert(g,'detg');
```

$$g := \text{table} \left(\left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} -\frac{1}{1-\frac{2m}{r}} & 0 & 0 & 0 \\ = 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \sin(\theta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{2m}{r} \end{array} \right] \right) \right) \right)$$

На следующем этапе вычислим частные производные метрического тензора (`dg`) по заданному списку координат и вычислим символы Кристоффеля I-го (`Christ1`) и II-го (`Gamma`) рода¹²:

```
dg:=d1metric(g,coord):
Christ1:=Christoffel1(dg):
Gamma:=Christoffel2(g_1,Christ1):
```

Выводимые компоненты символа Кристоффеля II-го рода имеют валентность (`index_char`) $= [1, -1, -1]$, то есть соответствуют следующему порядку компонент символа Кристоффеля второго рода $\Gamma_{jk}^i: [i, j, k]$.

Для вывода уравнений геодезических `geo_eqns0` в формате упорядоченного списка применим следующую программную процедуру:

```
>geo_eqns0:=[op(subs({t=t(s),r=r(s),theta=theta(s),phi=phi(s),
t(s)=t(s),r(s)=r(s),theta(s)=theta(s),phi(s)=phi(s)}),
geodesic_eqns(coord,s,Gamma)))];
```

¹⁰См., например, классический учебник Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [19], (TF).

¹¹Имена этих объектов придаются пользователем произвольно.

¹²Во избежание громоздких выражений мы их здесь не приводим.

Указанная процедура преследует 2 цели: запись уравнений геодезических в форме упорядоченного списка для возможности извлечения необходимого уравнения, а также - приведение системы уравнений к полной форме записи системы дифференциальных уравнений. Дело в том, что встроенная в пакет `tensor` процедура `geodesic_eqns` выводит производные координат в форме $dx^i(s)/ds$, тогда как метрические функции, входящие в уравнения геодезических, имеют формат $f(x^i)$. К сожалению, эта ошибка переходит из одной версии Maple в другую. В результате получаем систему уравнений:

$$\left[\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \tau(s) - 2 \frac{m \left(\frac{d}{ds} r(s) \right) \frac{d}{ds} \tau(s)}{(-r(s) + 2m)r(s)} = 0, \frac{d^2}{ds^2} \phi(s) + 2 \frac{\left(\frac{d}{ds} r(s) \right) \frac{d}{ds} \phi(s)}{r(s)} \\ + 2 \frac{\cos(\theta(s)) \left(\frac{d}{ds} \theta(s) \right) \frac{d}{ds} \phi(s)}{\sin(\theta(s))} = 0, \frac{d^2}{ds^2} \theta(s) + 2 \frac{\left(\frac{d}{ds} r(s) \right) \frac{d}{ds} \theta(s)}{r(s)} \\ - \sin(\theta(s)) \cos(\theta(s)) \left(\frac{d}{ds} \phi(s) \right)^2 = 0, \frac{d^2}{ds^2} r(s) + \frac{m \left(\frac{d}{ds} r(s) \right)^2}{(-r(s) + 2m)r(s)} \\ + (-r(s) + 2m) \left(\frac{d}{ds} \theta(s) \right)^2 + (-r(s) + 2m) (\sin(\theta(s)))^2 \left(\frac{d}{ds} \phi(s) \right)^2 \\ - \frac{(-r(s) + 2m) m \left(\frac{d}{ds} t(s) \right)^2}{(r(s))^3} = 0 \end{aligned} \right]. \quad (3.14)$$

Для извлечения из этой системы любого уравнения, например, второго, достаточно применить команду: `geo_eqns0[2]`.

3.3. Масштабирование и преобразование уравнений геодезических в СКМ Maple

Система уравнений (3.14) не совсем удобна для исследования. Во-первых, ее необходимо разрешить относительно старших производных, во-вторых, с помощью масштабирования избавиться от параметра m и, в-третьих, упростить систему учитывая тот факт, что движение в центральном поле всегда происходит в экваториальной плоскости, например, в плоскости:

$$\theta = \frac{\pi}{2}. \quad (3.15)$$

Итак, введем:

```
>Eqs1:=(m)->geo_eqns0;
```

и сделаем подстановку SUBS:

```
SUBS:={s=2*m*t, r(s)=2*m*x(t), tau(s)=2*m*tau(t), phi(s)=phi(t),
diff(tau(s),s)=diff(tau(t),t), diff(tau(s),s,s)=
1/(2*m)*diff(tau(t),t$2), diff(r(s),s)=diff(x(t),t), diff(r(s),s,s)=
1/(2*m)*diff(x(t),t$2), diff(phi(s),s)=1/(2*m)*diff(phi(t),t), theta(s)=
Pi/2, diff(theta(s),s)=0,
diff(theta(s),s,s)=0, diff(phi(s),s,s)=1/(4*m^2)*diff(phi(t),t$2)};
```

```
EQS0:=[seq(normal(simplify(subs(SUBS, expand(2*m*Eqs1(m)[i])))), i=1..4)];
```

В вышеприведенной программной процедуре осуществлена следующая последовательность операций: умножение i -го уравнения на $2m$ → раскрытие скобок `expand` в полученном уравнении → подстановка `subs` системы `SUBS` → упрощение `simplify` полученного уравнения → базовые упрощения над рациональными функциями `normal` → составление упорядоченной последовательности `[seq(, i=1..4)]` полученных уравнений. Полученную таким образом систему уравнений разрешим относительно старших производных для удобства применения в дальнейшем численно - аналитических методов исследования.

```
EQS1:=op(solve(EQS0, [diff(tau(t),t$2), diff(x(t),t$2), diff(phi(t),t$2)]));
```

В результате получим систему:

$$\left[\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \tau(t) &= -\frac{\frac{d}{dt} x(t) \frac{d}{dt} \tau(t)}{(x(t)-1)x(t)}, & \frac{d^2}{dt^2} x(t) &= \frac{1}{2} \frac{1}{x(t)^3(x(t)-1)} \left(2 \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)^2 (x(t)-1)x(t)^3 \right. \\ & & & \left. + \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 x(t)^2 - \left(\frac{d}{dt} \tau(t) \right)^2 (x(t)-1)^2 \right), & \frac{d^2}{dt^2} \phi(t) &= -2 \frac{\frac{d}{dt} x(t) \frac{d}{dt} \phi(t)}{x(t)}. \end{aligned} \right. \quad (3.16)$$

4. Численное моделирование геодезических линий с помощью пакета DifEq

4.1. Команды распознавания систем ОДУ и их численного интегрирования в пакете DifEq

В принципе, система уравнений (3.16) полностью подготовлена для автоматизированного численного интегрирования в авторском пакете программ DifEq [4]¹³. Для работы с пакетом необходимо поместить файлы YuDifEquat.m и YuSplines.m в папку с Maple-файлом рабочей страницы (.mw), либо прописать путь к этим файлам в рабочей странице:

```
>read 'YuSplines.m';
read 'YuDifEquat.m';
```

Пакет DifEq позволяет, во-первых, автоматически распознавать систему обыкновенных дифференциальных уравнений любого порядка, разрешенную относительно старших производных, и конвертировать ее к задаче Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, то есть, к системе дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных [2, 3]. Это достигается с помощью команды SysCauchy_ConvNorm(EqSys, Inits), в которой первым аргументом EqSys является упорядоченная система обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенная относительно старших производных, то есть, система, заданная в виде списка, аналогичного (3.16):

[Eq_1, ..., Eq_n].

Такая система может состоять и из одного уравнения любого порядка. Вторым аргументом команды является упорядоченный набор начальных условий, то есть, опять-таки списочный набор вида (см. [3]):

[x1(t0)=x1_0, D(x1)(t0)=dx_1_0, ..., D[k1-1](x1)(t0)=d_k1-1_x1_0, ..., xn(t0)=xn_0, D(xn)(t0)=dx_n_0, ..., D[kn-1](xn)(t0)=d_kn-1_xn_0],

где k_j - наивысший порядок производной j -той функции. Результат процедуры выводит упорядоченный список из шести упорядоченных списков: в первом содержится два числа: S - число уравнений нормальной системы и $M = \max(n_1, \dots, n_N)$ - максимальный порядок уравнений в исходной системе уравнений, во втором - упорядоченные списки новых переменных, - число этих списков равно M , выбранных по следующему принципу - в первом списке содержатся новые переменные, $X[i]$, полученные из независимых функций пользователя, во втором - первые производные от этих переменных, $Y[i]$, если вторые производные от этих переменных содержатся в системе ОДУ, и так далее, - до $M-1$ -го списка. Таким образом, количество внутренних списков независимых функций совпадает с максимальным порядком уравнений исходной системы, M . Третий список содержит преобразования пользовательских функций к унифицированным функциям нормальной системы, четвертый список - есть упорядоченная нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений, причем первые $S-N$ уравнений представляют собой результат стандартной замены переменных вида $y' = z$, в пятом - начальные условия для нормальной системы ОДУ в форме списка, в шестом - один элемент - начальное значение независимой переменной. Созданная процедура удобна для извлечения различной информации об исходной системе дифференциальных уравнений и начальных условий.

¹³Этот пакет программ вместе с другими будет доступен для всех пользователей на сайте журнала.

Применим указанную команду к полученной выше системе уравнений (3.16):

```
>DifEq[SysCauchy_ConvNorm](EQS1, [x(0)=2, tau(0)=1, phi(0)=0,
D(x)(0)=1, D(tau)(0)=1, D(phi)(0)=1]);
```

В результате получим:

$$\begin{aligned} & [[6, 2], [[X_1(t), X_2(t), X_3(t)], [Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t)]], [\tau(t) = X_1(t), \frac{d}{dt}\tau(t) = Y_1(t), x(t) = X_2(t), \\ & \frac{d}{dt}x(t) = Y_2(t), \phi(t) = X_3(t), \frac{d}{dt}\phi(t) = Y_3(t), t = t], [\frac{d}{dt}X_1(t) = Y_1(t), \frac{d}{dt}X_2(t) = Y_2(t), \\ & \frac{d}{dt}X_3(t) = Y_3(t), \frac{d}{dt}Y_1(t) = -Y_2(t)Y_1(t)/((X_2(t) - 1)X_2(t)), \frac{d}{dt}Y_2(t) = \\ & \frac{2Y_3(t)^2 X_2(t)^5 - 4Y_3(t)^2 X_2(t)^4 + 2Y_3(t)^2 X_2(t)^3 + Y_2(t)^2 X_2(t)^2 - Y_1(t)^2 X_2(t)^2 + 2Y_1(t)^2 X_2(t) - Y_1(t)^2}{2(X_2(t) - 1)X_2(t)^3}, \\ & \frac{d}{dt}Y_3(t) = -2Y_2(t)Y_3(t)/X_2(t)], [X_2(0) = 2, X_1(0) = 1, X_3(0) = 0, Y_2(0) = 1, Y_1(0) = 1, Y_3(0) = 1], 0] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Расшифруем выведенный список данных. Первый список [6,2]: 6 - число уравнений нормальной системы (число степеней свободы), 2 - наивысший порядок производных исходной системы. Второй список: $[[X_1(t), X_2(t), X_3(t)], [Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t)]]$: присвоенные «канонические» имена трех функций $X_i(t)$ и их производных $Y_i(t)$. Независимой канонической переменной является t . Третий список - список замен функций задачи на канонические переменные. Этот список может понадобиться при выводе численных решений. Четвертый список - нормальная система уравнений в каноническом виде. Пятый список содержит начальные условия для канонических переменных. Наконец, шестой элемент списка 0 - начальное значение независимой переменной. Надо заметить, что данная информация является дополнительной и не всегда может пригодиться. Для вывода какой-либо частной информации о системе уравнений, например, о произведенных заменах необходимо выделить конкретный элемент списка:

```
>DifEq[SysCauchy_ConvNorm](EQS1, [x(0)=2, tau(0)=1, phi(0)=0,
D(x)(0)=1, D(tau)(0)=1, D(phi)(0)=1])[3];
```

$$\left[\tau(t) = X_1(t), \frac{d}{dt}\tau(t) = Y_1(t), x(t) = X_2(t), \frac{d}{dt}x(t) = Y_2(t), \phi(t) = X_3(t), \frac{d}{dt}\phi(t) = Y_3(t), t = t \right]$$

Численное решение заданной системы достигается командой `DifEq[NumDsolve](EqSys, Inits, method)`, где параметр `method`, определяющий метод численного интегрирования, может принимать следующие значения: 45 - метод Рунге-Кутты 4-5 порядков, 78 - метод Рунге-Кутты 7-8 порядков, `rosenbrock` - метод Розенброка, `stiff` - метод интегрирования жестких уравнений, `classic` - классический метод (по умолчанию метод Эйлера), `taulor` - метод разложения в ряды Тейлора. В [2] на основе результатов тестирования показано, что самыми точными методами, являются методы 78 и `rosenbrock`, при этом метод Розенброка работает на порядок быстрее и приспособлен к интегрированию жестких систем. Заметим, что процесс численного интегрирования с помощью команды `DifEq[NumDsolve]` проходит весьма быстро даже для систем с большим числом степеней свободы, поэтому не возникает необходимости упрощения системы уравнений с помощью ее первых интегралов. Кроме того, процесс вывода численных решений также крайне прост - решение выводится в виде списка функций от независимой переменной.

Приведем пример:

```
>SG:=DifEq[NumDsolve](EQS1, [x(0)=2, tau(0)=1, phi(0)=0,
D(x)(0)=0, D(tau)(0)=1, D(phi)(0)=0.3], rosenbrock);
```

```
>SG(1);
```

$$\left[[1.9977250715720918, 2.0137695764005357, 0.2986322615244307], [0.9932084872314211, 0.02757733193824453, 0.29591128345993845] \right]$$

Здесь первый и второй список данных соответствуют второму и третьему списку переменных в (4.2).

4.2. Численное моделирование геодезических в пакете DifEq

Приведем некоторые результаты численного интегрирования уравнений геодезических в поле Шварцшильда (3.16).

Классическая розетка:

```
>SG2:=op(DifEq[NumDsolve](EQS1,[x(0)=4,tau(0)=1,phi(0)=0,
  D(x)(0)=-0.1,D(tau)(0)=1,D(phi)(0)=0.1],rosenbrock));
  [proc(t)...end;,proc(t)...end;,proc(t)...end;],[proc(t)...end;,proc(t)...end;,proc(t)...end;]
>SG2(1);
  [2.0041576376033685,3.9035895860074987,0.10250133953686505],
  [1.0083010795875524,-0.09272131936597361,0.10500063988285738]
```

Таким образом, получаем 2 списка функций $[\tau(t), r(t), \phi(t)]$ и их производных $[\dot{\tau}(t), \dot{r}(t), \dot{\phi}(t)]$. Построим график траектории частицы в координатах $[x, y] = [r \cos \phi, r \sin \phi]$:

```
>plots[display](plot([SG2(s)[1,2]*cos(SG2(s)[1,3]),SG2(s)[1,2]*sin(SG2(s)[1,3]),
  s=0..5000],scaling=CONSTRAINED,color=black,axes=BOXED,label s=[x,y],
  label font=[TIMES,ROMAN,14]),DSK);
```

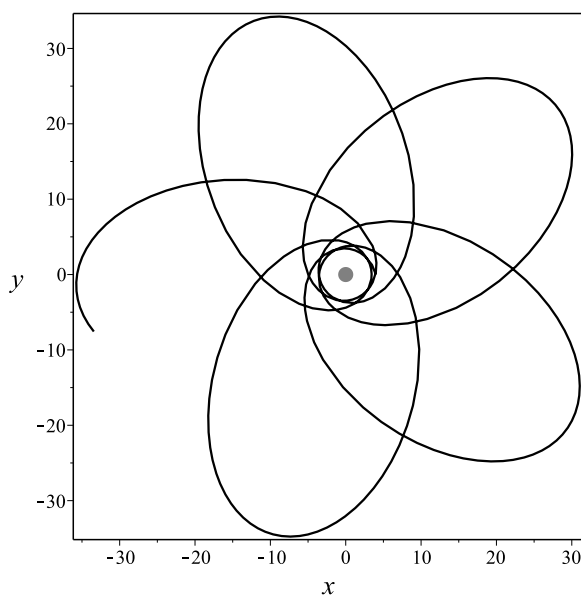


Рис. 4. Классическая розетка: $m = 1$; $[x(0) = 4, \tau(0) = 1, \phi(0) = 0, \dot{x}(0) = -0.1, \dot{\tau}(0) = 1, \dot{\phi}(0) = 0.1]$; $s \in [0, 5000]$. Серым кружком отмечен горизонт. Кружок единичного радиуса представлен в команде `display` именем `DSK`.

Гравитационный захват:

```
>SG1:=op(DifEq[NumDsolve](EQS1,[x(0)=3,tau(0)=1,phi(0)=0,
  D(x)(0)=0.2,D(tau)(0)=1,D(phi)(0)=0.1],rosenbrock));
>SG1(1);
  [1.98468729150281,3.19342909398855,0.938777864413851],
  [0.970604634765444, 0.187117700513082, 0.882526607688594]
```

```
>plots[display](DSK,plot([SG1(s)[1,2]*cos(SG1(s)[1,3]),SG1(s)[1,2]*sin(SG1(s)[1,3]),
s=0..10000],scaling=CONSTRAINED,color=black,axes=NORMAL,labels=[x,y],
labelfont=[TIMES,ROMAN,14],numpoints=10000),view=[-4..4,-2..6]);
```

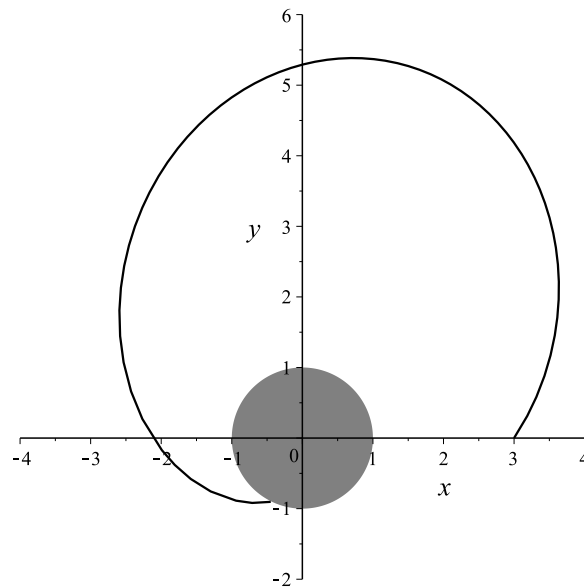


Рис. 5. Гравитационный захват: $m = 1$; $[x(0) = 3, \tau(0) = 1, \phi(0) = 0, \dot{x}(0) = 0.2, \dot{\tau}(0) = 1, \dot{\phi}(0) = 0.1]$; $s \in [0, 5000]$. Серым кружком отмечен горизонт.

Гиперболическая орбита с близким пролетом:

```
>SG3:=op(DifEq[NumDsolve](EQS1,[x(0)=1.3,tau(0)=1,phi(0)=0,
D(x)(0)=0,D(tau)(0)=1,D(phi)(0)=0.5],rosenbrock));
```

```
>plots[display](DSK,plot([SG3(s)[1,2]*cos(SG3(s)[1,3]),SG3(s)[1,2]*sin(SG3(s)[1,3]),
s=-20..20],scaling=CONSTRAINED,color=black,axes=NORMAL,labels=[x,y],
labelfont=[TIMES,ROMAN,14],numpoints=10000));
```

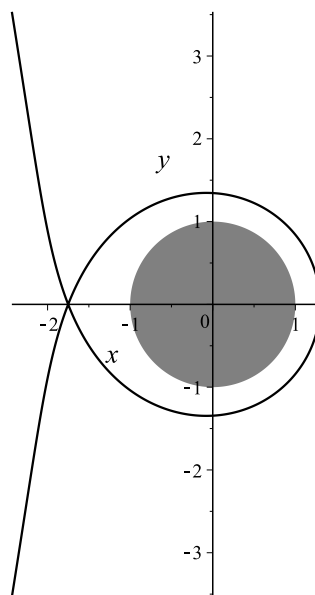


Рис. 6. Гиперболическая орбита с близким пролетом: $m = 1$; $[x(0) = 1.3, \tau(0) = 1, \phi(0) = 0, \dot{x}(0) = 0.2, \dot{\tau}(0) = 1, \dot{\phi}(0) = 0.1]$; $s \in [-20, 20]$. Серым кружком отмечен горизонт.

```
plots[display](DSK,plot([SG(s)[1,2]*cos(SG(s)[1,3]),SG(s)[1,2]*sin(SG(s)[1,3]),
s=-100..100],scaling=CONSTRAINED,color=black,axes=BOXED,labels=[x,y],
label font=[TIMES,ROMAN,14],numpoints=10000));
```

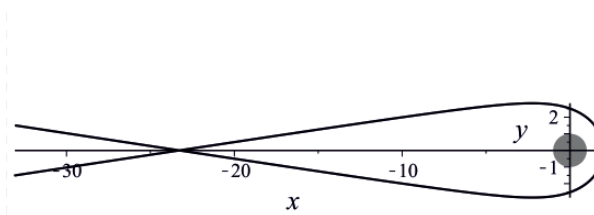


Рис. 7. Другая гиперболическая орбита с близким пролетом: $m = 1$; $[x(0) = 2, \tau(0) = 1, \phi(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \dot{\tau}(0) = 1, \dot{\phi}(0) = 0.3]$; $s \in [-100, 100]$. Серым кружком отмечен горизонт.

5. Численно - аналитические методы моделирования геодезических с помощью пакета SPlines

5.1. Элементы теории сплайновой интерполяции

Дадим некоторые необходимые в дальнейшем определения и понятия теории сплайнов (см., например, [14-16]).

Определение 4. Пусть некоторая функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$, и пусть для некоторого целого $n \in \mathbb{Z}$ для внутренних точек отрезка $[a, b]$ выполнено условие:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n; (x_0 \equiv a, x_n \equiv b). \quad (5.1)$$

Кубическим сплайном относительно функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется функция $S(x)$, удовлетворяющая трем условиям:

1. на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = \overline{1, n}$) $S(x)$ является многочленом третьей степени;
2. $S(x)$ является функцией класса C^3 на всем отрезке $[a, b]$;
3. в точках x_i ($i = \overline{0, n}$) выполняется равенство:

$$S(x_i) = f(x_i), (i = \overline{0, n}). \quad (5.2)$$

Определение 5. Натуральным кубическим сплайном называется кубический сплайн, удовлетворяющий также граничным условиям вида:

$$S''(a) = S''(b) = 0. \quad (5.3)$$

Для натуральных кубических сплайнов справедлива теорема Шенберга - Уитни:

Теорема 3. Для любой функции $f(x)$ и любого разбиения отрезка $[a, b]$ существует один и только один натуральный сплайн $S(x)$.

Определение 6. Равномерным сплайном называется кубический сплайн, полученный равномерным разбиением отрезка $[a, b]$:

$$x_i - x_{i-1} = \Delta, (\forall i \in \overline{1, n}). \quad (5.4)$$

Сплайн порядка n представляется многочленом n -го порядка на каждом отрезке. Таким образом, сплайн n -го порядка, $S(x, p)$, можно рассматривать как кусочно-заданную на отрезке $[a, b]$ функцию, представленную многочленом p -го порядка на каждом отрезке, с коэффициентами такими, чтобы обеспечивать принадлежность $S(x, p)$ функциям класса C^p на всем отрезке $[a, b]$.

5.2. Причины необходимости конвертирования численных решений в сплайны

Поясним теперь основную идею конвертирования численных решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в сплайны. Предположим, что мы создали программную процедуру численного интегрирования нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и имеем возможность вывода решений в списочном формате функции (вектор-функции):

$$\Theta(t) = [[X_1(t), \dots, X_{n_1}(t)], [Y_1(t), \dots, Y_{n_2}(t)], \dots, [Z_1(t), \dots, Z_{n_N}(t)]], \quad (5.5)$$

где X, Y, \dots - унифицированные переменные из базового списка $X, Y, Z, U, V, W, \text{Phi}, \text{Theta}$, где N - число уравнений исходной системы.

Предположим, что для целей компьютерного моделирования нелинейной динамической системы нам необходимо вычислить некоторые функции, $\Phi_\alpha(\mathbf{Y}(t), t)$, или, в более общем случае, - операторы $\mathbf{P}_\beta(\mathbf{Y}(t), t)$ от полученных решений. Примерами таких операторов могут являться операторы дифференцирования сложных функций или операторы интегрирования:

$$\mathbf{J}_\alpha(\mathbf{Y}(t), t) = \int_{t_0}^t \Phi_\alpha(\mathbf{Y}(\tau), \tau) d\tau.$$

Рассмотрим на этом примере вычисление оператора на основе созданной процедуры численного интегрирования нелинейной системы ОДУ:

$$\mathbf{J}_\alpha(\mathbf{Y}(t), t) = \frac{t - t_0}{n} \sum_{i=0}^n \Phi_\alpha\left(\mathbf{Y}\left(t_0 + i \frac{t - t_0}{n}\right)\right) + o\left(\frac{t - t_0}{n}\right) \overline{\Phi_\alpha((t), t)},$$

где $\overline{\Phi_\alpha((t), t)}$ - среднее значение функции $\Phi_\alpha(\mathbf{Y}(\tau), \tau)$ на отрезке $[t_0, t]$. Как известно, относительная ошибка численного интегрирования по этой формуле составляет:

$$\delta = \frac{1}{n} \quad (5.6)$$

при условии знания точных значений функции $\Phi(t)$ в точках $t_i = t_0 + i(t - t_0)/n$. Таким образом, для удержания точности порядка 1% необходимо разбивать промежуток интегрирования, по крайней мере, на 100 частей. Действия с численными решениями можно осуществлять двумя путями:

- Либо каждый раз при вычислении операторов, построенных на численных решениях, заново производить численное интегрирование системы дифференциальных уравнений. Например, при построении графика функции с помощью процедуры `plot(Theta_i(t), t=a..b)`.
- Либо сохранить в оперативной памяти компьютера таблицу числовых данных вида:

$$\Theta(t) = \left[[[X_1(t_k), \dots, X_{n_1}(t_k)], [Y_1(t_k), \dots, Y_{n_2}(t_k)], \dots, [Z_1(t_k), \dots, Z_{n_N}(t_k)]] \right], \quad (i = \overline{1, N}, k = \overline{1, n}), \quad (5.7)$$

где $t_k = a + k(b - a)/n$.

Второй путь на первый взгляд кажется более экономным, так как он не требует временных затрат на численное интегрирование системы дифференциальных уравнений всякий раз, как нам

потребуется вычислить некоторое значение оператора на решениях ОДУ. Однако, на самом деле, этот путь не дает преимуществ для пользователя, так как каждый раз при вычислении новой функции он требует от пользователя программного определения соответствующих операций над базами данных, полученными в результате численного интегрирования. Таким образом, процесс компьютерного моделирования и тестирования математической модели становится чрезвычайно громоздким, требующим от пользователя профессионального владения языком программирования.

- *Таким образом, первая причина необходимости сплайновой интерполяции численных решений систем дифференциальных уравнений заключается в возможности увеличения скорости промежуточных вычислений при создании математических моделей, с одной стороны, и достижения простоты манипуляции с полученными решениями, - с другой.*

Но и это - далеко еще не все. Функции на исследуемом интервале моделирования могут оказаться быстропеременными, причем это отнюдь не экзотическое свойство, а, наоборот, типичный случай для механических систем, которые все, как известно, совершают колебания вокруг точек устойчивого равновесия с собственными частотами, определяемыми внутренними связями. В этом случае формула (5.6) дает неверные значения для относительной точности вычислений, истинное значение относительных ошибок может оказаться значительно больше.

- *Таким образом, вторая причина необходимости сплайновой интерполяции численных решений систем дифференциальных уравнений заключается в возможности увеличения скорости тестирования математических моделей за счет уменьшения количества хранимых в оперативной памяти массивов решений при сохранении необходимой точности решений.*

Далее, пусть нам необходимо построить визуализировать математическую модель и создать на базе ее многопараметрическую имитационную модель, позволяющую проводить численные эксперименты с управляемыми параметрами. Это означает, что нам необходимо создать динамические графические процедуры, в большинстве случаев трехмерные, параметрами которых, в частности, скоростью, временным интервалом, цифровым и текстовым оснащением, можно достаточно просто управлять. Наличие решений в сплайновой интерполяции позволяет использовать аппарат математического анализа, с одной стороны, и программные процедуры СКМ Maple операций с непрерывными функциями, - с другой, что позволяет создать управляемые многопараметрические динамические компьютерные модели, обладающие высокой степенью наглядности, на основе которых можно осуществлять имитационное моделирование обобщенно-механических систем. Многочисленные примеры такого имитационного моделирования механических систем со связями можно найти на сайте М.Н. Кирсанова [17].

- *Таким образом, третья причина необходимости сплайновой интерполяции численных решений систем дифференциальных уравнений заключается в возможности использования аппарата программных процедур системы Maple для непрерывных функций при создании оснащенных динамических моделей нелинейных обобщенно-механических систем.*

5.3. Сплайны в системе Maple

Библиотека CurveFitting пакета Maple имеет 8 процедур работы со сплайнами и B-сплайнами: BSpline, BSplineCurve, Interactive, LeastSquares, PolynomialInterpolation, RationalInterpolation, Spline, ThieleInterpolation. Процедура Interactive позволяет строить сплайны в интерактивном окне, процедура LeastSquares осуществляет метод наименьших квадратов, процедуры PolynomialInterpolation, RationalInterpolation, ThieleInterpolation осуществляют интерполяцию функции по двумерному массиву полиномом, рациональной функцией и рациональной функцией ступенчатым методом Маккейба и Тиле, соответственно. Для сплайновой интерполяции функции по заданному двумерному массиву в пакете CurveFitting системы Maple имеется встроенная процедура Spline (см., например, [3]), которые могут иметь формат Spline(xdata, v, dgr, endpts) или Spline(xdata, ydata, v, dgr, endpts), где xdata - двумерный массив вида [..., [x_i, y_i], ...]; xdata, ydata - одномерные массивы вида

$$[... , x_i, ...], [... , y_i, ...];$$

v - имя независимой переменной, dgr - необязательный параметр, задание которого осуществляется в форме $degree=p$, где $p \in \mathbb{Z}$ - наивысшая степень интерполяционных полиномов. По умолчанию $p=3$, и получается кубический сплайн. Наконец, $endpts$ - необязательный параметр, управляющий типом сплайна, например, $endpoints='natural'$ дает натуральный сплайн. Применение процедуры `Spline` к двумерному или двум одномерным массивам генерирует сплайн, который в СКМ Maple, представляется, фактически, кусочно-заданной функцией с вертикальным форматом вывода ее кусков. Процедуры `BSpline`, `BSplineCurve` позволяют строить B-сплайны и график B-сплайновой интерполяции, соответственно.

Несмотря на то, что программные процедуры сплайновой и B-сплайновой интерполяции функций системы Maple весьма достоверно и надежно осуществляют построение сплайновой интерполяции числовых баз данных указанных массивов, программный аппарат действий со сплайнами в СКМ отсутствует, что не позволяет во многих случаях непосредственно применять результаты сплайновой интерполяции численных решений для аналитических исследований нелинейных обобщенно-механических моделей и поэтому ограничивает уникальные возможности использования сплайновой интерполяции функций в компьютерном моделировании.

5.4. Пакет Splines

Устранить указанные недостатки и расширить программный аппарат сплайнов СКМ Maple на численное интегрирование систем нелинейных дифференциальных уравнений позволяет авторский пакет `Splines` [4], [5], [6]. Кратко опишем некоторые программные процедуры пакета. Операция вычисления производной n -го порядка в точке t_0 от сплайна $S(t)$ задается командой `SplineDiff(S, t, t0, n)`. Процедуры нахождения функции $f(S, t)$ от сплайна S можно задать двумя способами. Первый, самый простой, основан на первоначальном конвертировании исходной аппроксимации в список и построении на основе его новой базы для сплайна. Второй, более сложный, состоит в начальном конвертировании исходного сплайна в список, преобразование функций списка и конвертирование этого списка в кусочно-заданную функцию. Полученная вторым способом функция уже не является, строго говоря, сплайном n -го порядка, так как на каждом интервале представляется уже не многочленом n -го порядка, а функцией от этого многочлена. Однако, при этом сохраняется принадлежность кусочно-заданной функции $f(S)$ классу C^n , если сама функция $f(x)$ принадлежит этому классу. Первая из указанных процедур 4-х параметрическая процедура `SplineFunctionPoint(S, t, f, z)`, где первый параметр есть сплайн, второй - его независимая переменная, третий - функция от сплайна, четвертый - присвоенное новое имя независимой переменной. Вторая из указанных процедур с такими же параметрами имеет вид: `SplineFunction(S, t, f, z)`. Заметим, что тестирование указанных процедур показывают практически полное совпадение результатов интерполяции функции сплайнов с помощью процедуры `SplineFunction` с функцией - оригиналом даже при небольшом числе интервалов и значительное расхождение результатов при применении процедуры `SplineFunctionPoint` [3].

5.5. Программные процедуры спланового представления численного решения нелинейной системы ОДУ

Интегрируем, наконец, программные процедуры описанного здесь пакета программ `Splines` с программными процедурами пакета `DifEq`. Процедура автоматизированной сплайновой обработки численного решения задачи Коши для нелинейной системы произвольного числа ОДУ произвольного порядка `DifEq[ODESpline](Eqs, Inits, Method, x1, n, i, k, x)` содержит 8 параметров: `Eqs` - упорядоченный список системы ОДУ, `Inits` - упорядоченный список начальных условий, `Method` - Метод интегрирования, `x1` - конечная точка интервала интегрирования, `n` - число интервалов сплайна, `i` - порядковый номер выводимой функции¹⁴, `k` - порядок производной этой функции, `x` - присваиваемое имя независимой переменной. Аналогична предыдущей и 8-ми параметрическая процедура `DifEq[ODEBSpline]`, но в ней встроена созданная нами процедура `Splines[ConvBSpline_Piece]`, позволяющая автоматически осуществлять вывод решений в виде кусочно - параметрически - заданных функций. Аналогично строятся и 10-ти параметрические программные процедуры `DifEq[ReODESpline]` и `DifEq[ReODEBSpline]` с перезагрузкой метода интегрирования в точке `x2`. Заметим, что все рассмот-

¹⁴Совпадает с порядковым номером уравнения в системе ОДУ.

ренные в этом разделе процедуры являются конечными и не требуют от пользователя применения каких-либо других процедур для получения решений в системы нелинейных ОДУ в форме сплайнов или В-сплайнов. Кроме того, решения выводятся в формате аналитической функции или упорядоченной пары функций в случае В-сплайна.

6. Примеры компьютерного исследования системы нелинейной системы ОДУ с помощью пакета Splines

6.1. Демонстрационный пример

Для демонстрации комплекса программ рассмотрим простой пример получения решения системы ОДУ в виде сплайнов [3]. В качестве системы ОДУ рассмотрим нелинейную систему ОДУ 1-го порядка (6.1)-(6.2).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}; \frac{dz}{dx} = -\frac{y}{z} \quad (6.1)$$

с начальными условиями:

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}; z\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (6.2)$$

Указанная задача Коши точно решается [9]:

$$y(x) = x; z(x) = \sqrt{1-x^2}; (z \geq 0). \quad (6.3)$$

Отметим, что выбор простой системы, а также малое количество интервалов сплайна, которое мы собираемся ввести, продиктованы лишь необходимостью краткости изложения. Тестирование показывает весьма хорошие результаты и при большом числе уравнений системы (десятки), высокого порядка уравнений системы (до 6-го)¹⁵ и большом количестве интервалов сплайнов (десятки). Вся операция численного решения системы с его сплайновым представлением производится простой командой:

```
>Sp:=(xi)->Splines[ODESpline]([diff(y(x),x)=y(x)/x,
diff(z(x),x)=-y(x)/z(x)],
[y(-1/2)=-1/2,z(-1/2)=sqrt(3/2)],45,1,6,1,2,xi):
```

Выведем полученное в виде 6-кусочного сплайна решение системы (6.1)-(6.2). В целях экономии места мы и выбрали небольшое число интервалов разбиения отрезка и сократили количество выводимых цифр с 10-ти до 4-х.

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1.102 + 0.4716 \xi - 1.005 (\xi + 0.5000)^3 & \xi < -0.2500 \\ 1.039 + 0.2830 \xi - 0.7536 (\xi + 0.2500)^2 + 0.5207 (\xi + 0.2500)^3 & \xi < 0. \\ 1.000 + 0.003900 \xi - 0.3630 \xi^2 - 0.6453 \xi^3 & \xi < 0.2500 \\ 1.043 - 0.2988 \xi - 0.8471 (\xi - 0.2500)^2 + 1.628 (\xi - 0.2500)^3 & \xi < 0.5000 \\ 1.075 - 0.4171 \xi + 0.3739 (\xi - 0.5000)^2 - 7.917 (\xi - 0.5000)^3 & \xi < 0.7500 \\ 1.947 - 1.715 \xi - 5.564 (\xi - 0.7500)^2 + 7.420 (\xi - 0.7500)^3 & otherwise \end{array} \right.$$

Рис. 8. Вывод численного решения задачи Коши (6.1)-(6.2) на отрезке $[-1/2, 1]$ методом Рунге-Кутты 4-5 порядков в виде кубического 6-кусочного сплайна с назначением имени независимой переменной ξ . Выведена функция $z(x) = X_2(\xi)$.

¹⁵Протестированных.

Вычислим вторую производную от полученного решения в точке $\xi = 1/8$:

```
>Splines[SplineDiff](Sp(t),t,1/8,2);
```

-1.210034572

Вычислим определенный интеграл от полученного решения

$$\int_0^1 \sin z(\xi) d\xi :$$

```
>Splines[SplineDefInt](Sp(xi),xi,sin(xi),0,1);
```

0.4596988779;

6.2. Численно - аналитическое моделирование орбит частиц с помощью пакета Splines

Итак, покажем на примере геодезических в метрике Шварцшильда интегрированные возможности двух пакетов. Загрузим их:

```
restart;
read 'YuSplines.m';
read 'YuDifEquat.m';
```

Сразу запишем процедуру решения системы EQS1 методом Розенброка в сплайновом формате:

```
>Tau1:=(xi,n,s1)->evalf(Splines[ODESpline](EQS1,[x(0)=4,tau(0)=1,phi(0)=0,
D(x)(0)=-0.1,D(tau)(0)=1,D(phi)(0)=0.1],rosenbrock,s1,n,1,1,xi),4);
>R1:=(xi,n,s1)->evalf(Splines[ODESpline](EQS1,[x(0)=4,tau(0)=1,phi(0)=0,
D(x)(0)=-0.1,D(tau)(0)=1,D(phi)(0)=0.1],rosenbrock,s1,n,1,2,xi),4);
>Phi1:=(xi,n,s1)->evalf(Splines[ODESpline](EQS1,[x(0)=4,tau(0)=1,phi(0)=0,
D(x)(0)=-0.1,D(tau)(0)=1,D(phi)(0)=0.1],rosenbrock,s1,n,1,3,xi),4);
```

Расшифруем параметры представленных процедур. Входные параметры: $\xi = t$ - выводимое значение канонического параметра, n - число сплайнов на отрезке $[s_0, s_1]$, s_1 - конечное значение безразмерного канонического параметра. Внутренние параметры процедуры: $[x(0)=4, \tau(0)=1, \phi(0)=0, D(x)(0)=-0.1, D(\tau)(0)=1, D(\phi)(0)=0.1]$ - начальные условия, значение 1 - вывод списка искомых функций (значение 2 соответствует выводу списка их первых производных), значения 1, 2, 3 указывают на номер выводимой функции (τ, r, ϕ), 4 - число удерживаемых цифр в решении.

Продемонстрируем некоторые результаты численно - аналитического моделирования.

```
>Tau1(1,100,20);
R1(1,48,48);
Phi1(1,100,100);
```

2.004
3.904
0.1025

```
>Tau1(2,100,20);
```

3.016

Вычислим производные от найденных решений на отрезке $[0, 300]$ в формате 96 - кусочных сплайнов:

```
>dr:=(t)->Splines[SplineDiff](R1(xi,300,96),xi,t,1);
dr(1);
-0.09273244269
>dphi:=(t)->Splines[SplineDiff](Phi1(xi,300,96),xi,t,1);
dphi(1);
0.1050029419
```

На рисунках 9 и 10 показаны часть орбиты частицы в поле Шварцшильда и график производной радиуса r по каноническому параметру, полученные на основе 200 - кусочного сплайна на отрезке $[0, 300]$.

```
>rr:=(t)->evalf(R1(t,300,200),3);
rr(1);
3.90
>ff:=(t)->evalf(Phi1(t,300,200),3);
ff(1);
0.102
>plot([rr(t)*cos(ff(t)),rr(t)*sin(ff(t)),t=0..200],color=black,
axes=BOXED,labels=[x,y],labelfont=[TIMES,ROMAN,14]);
```

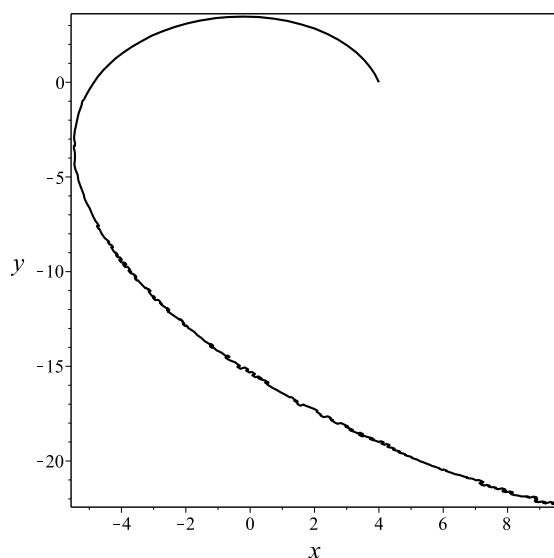


Рис. 9. График орбиты массивной частицы в поле Шварцшильда при начальных условиях $[x(\theta)=4, \tau(\theta)=1, \phi(\theta)=0, D(x)(\theta)=-0.1, D(\tau)(\theta)=1, D(\phi)(\theta)=0.1]; t \in [0, 100]$.

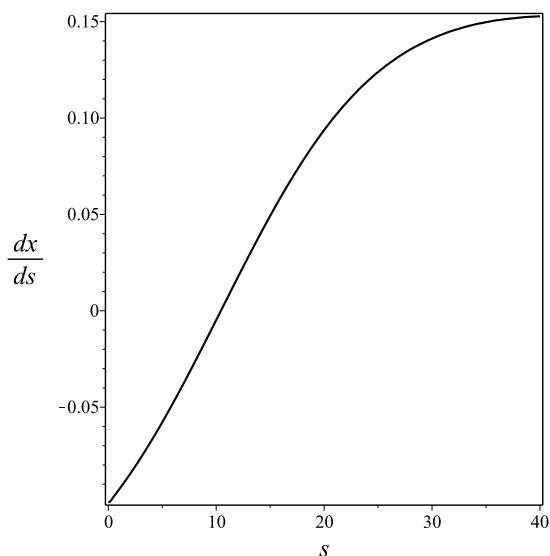


Рис. 10. График производной радиуса массивной частицы в поле Шварцшильда при начальных условиях $[x(\theta)=4, \tau(\theta)=1, \phi(\theta)=0, D(x)(\theta)=-0.1, D(\tau)(\theta)=1, D(\phi)(\theta)=0.1]; t \in [0, 100]$.

Как известно, в центральном поле сохраняется момент импульса, пропорциональный величине $r^2 d\phi/ds$. Проверим с помощью полученного сплайна выполнение этого закона сохранения (Рис. 11):

```
>plot(rr(t)^2*dphi(t),t=0..100,0..2,color=black,axes=BOXED,
labels=[s,r^2*(d*phi)/(ds)],labelfont=[TIMES,ROMAN,14]);
```

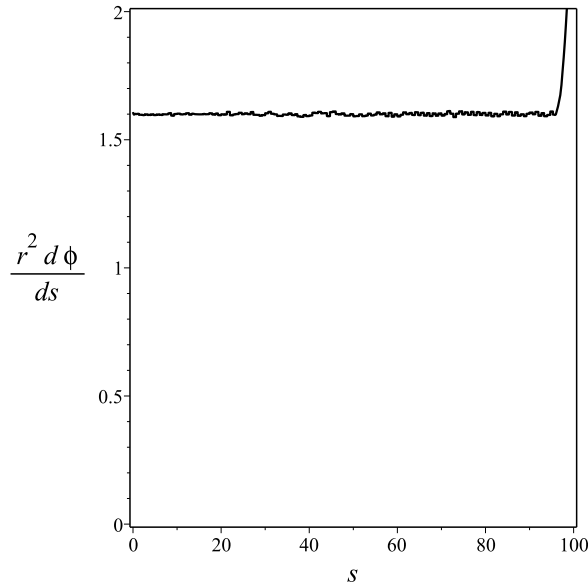


Рис. 11. Зависимость момента импульса $r^2 \frac{d\phi}{ds}$ массивной частицы от безразмерного собственного времени.

Как видно из рисунка, момент импульса сохраняется с хорошей точностью вплоть до значений безразмерного канонического параметра $s \sim 95$, после чего модель дает большие ошибки.

7. Качественный анализ орбит частиц в поле Шварцшильда и фазовые портреты

7.1. Групповой анализ и интегралы движения

Рассмотрим подробно решение задачи в случае статической сферически - симметричной метрики:

$$ds^2 = e^{v(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (7.1)$$

которая допускает следующие векторы Киллинга [20]:

$$\begin{aligned} \xi^{(1)} &= (0, \sin\varphi, \operatorname{ctg}\theta \cos\varphi, 0); \\ \xi^{(2)} &= (0, -\cos\varphi, \operatorname{ctg}\theta \sin\varphi, 0); \\ \xi^{(3)} &= (0, 0, -1, 0); \\ \xi^{(4)} &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Соответственно этим векторам Киллинга получаем следующие первые интегралы движения (3.10):

$$r^2 \sin\varphi \frac{d\theta}{ds} + r^2 \sin\theta \cos\theta \cos\varphi \frac{d\varphi}{ds} = -C_{(1)}; \quad (7.3)$$

$$r^2 \cos\varphi \frac{d\theta}{ds} - r^2 \sin\theta \sin\theta \sin\varphi \frac{d\varphi}{ds} = C_{(2)}; \quad (7.4)$$

$$r^2 \sin^2\theta \frac{d\varphi}{ds} = C_{(3)}; \quad (7.5)$$

$$e^{v(r)} \frac{dt}{ds} = C_{(4)}. \quad (7.6)$$

Таким образом, три компоненты вектора скорости частицы u^i : (u^2, u^3, u^4) явно выражаются через ее координаты r, θ, φ . Как известно, соотношение нормировки вектора скорости является

еще одним интегралом геодезических. Поэтому, из него с помощью интегралов (7.3) - (7.6) можно получить одно замкнутое дифференциальное уравнение первого порядка относительно координаты $r(s)$. Однако, это уравнение при разрешении его относительно первой производной содержит два решения, что приводит к необходимости специальных манипуляций с ним. Как показывает практика численного моделирования, проще решать систему уравнений геодезических с начальными условиями, удовлетворяющими соотношению нормировки. При этом соотношение нормировки необходимо использовать для связи начальных данных. Как известно, вследствие интегралов (7.3) и (7.4) геодезические всегда лежат в «плоскости», проходящей через начало координат и определяемой направляющими «векторами» r_0 и v_0 . Поэтому вследствие сферической симметрии эту плоскость всегда можно выбрать следующим образом:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad (7.7)$$

- при этом $C_{(1)} = 0; C_{(2)} = 0$. Таким образом, получим из (7.3) - (7.6) два независимых интеграла:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\mu_0}{r^2}; \quad \frac{dt}{ds} = e^{-v(r)} \varepsilon_0. \quad (7.8)$$

7.2. Уравнения движения динамической системы

В случае метрики Шварцшильда (3.13) для координаты r уравнения геодезической с учетом первых интегралов (7.5) - (7.6) дают:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} - \frac{m}{(r-2m)r} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - (r-2m) \frac{\mu_0^2}{r^4} - \frac{m\varepsilon_0^2}{r(r-2m)} = 0.$$

Производя масштабные преобразования $r = 2mx, s = 2mt$ в последнем уравнении, приведем его к виду:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{1}{2x(x-1)} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{x-1}{4x^4} \frac{\mu_0^2}{m^2} + \frac{\varepsilon_0^2}{2x(x-1)} = 0. \quad (7.9)$$

Перепишем уравнение (7.9) в канонической форме динамической теории:

$$\dot{x} = y; \quad = P(x, y); \quad (7.10)$$

$$\dot{y} = \frac{y^2}{2x(x-1)} + \frac{\mu_0^2}{4m^2} \frac{x-1}{x^4} - \frac{\varepsilon_0^2}{2x(x-1)}; \quad = Q(x, y). \quad (7.11)$$

7.3. Особые точки динамической системы

Таким образом, особые точки $M_0(x_0, y_0)$ динамической системы (7.10) определяются соотношениями:

$$y_0 = 0; \quad (7.12)$$

$$x_0^3 = \alpha^2(x_0 - 1)^2, \quad (7.13)$$

где

$$\alpha = \frac{\mu_0}{\sqrt{2\varepsilon_0 m}}.$$

Уравнение (7.13) может иметь 1, 2 или 3 вещественных решения в зависимости от значения параметра α ¹⁶:

$$\begin{aligned} x_1 \in [0, 1), \quad \alpha < \sqrt{\frac{27}{4}}; \\ x_1 = \frac{3}{4}; x_2 = x_3 = 3, \quad \alpha = \sqrt{\frac{27}{4}}; \\ x_1 \in [0, 1); x_2 \in (2, 3); x_3 \in (3, \alpha^2), \quad \alpha > \sqrt{\frac{27}{4}}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

¹⁶ Авторы признательны М.И. Киндеру, указавшему корень $x_1 = 3/4$ и факт двукратности корня $x_2 = x_3 = 3$.

С учетом (7.14) легко найти следующие асимптотики корней кубического уравнения (7.13):

$$\begin{aligned} x_0 &\simeq \alpha^{2/3}, & \alpha \rightarrow 0; \\ x_0 &\simeq 1 \pm \frac{1}{\alpha}, & \alpha \rightarrow \infty; \\ x_2 &\simeq \alpha^2, & \alpha \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7.15)$$

На рисунке 12 показаны графики корней уравнения (7.13) $r_0(\alpha)$.

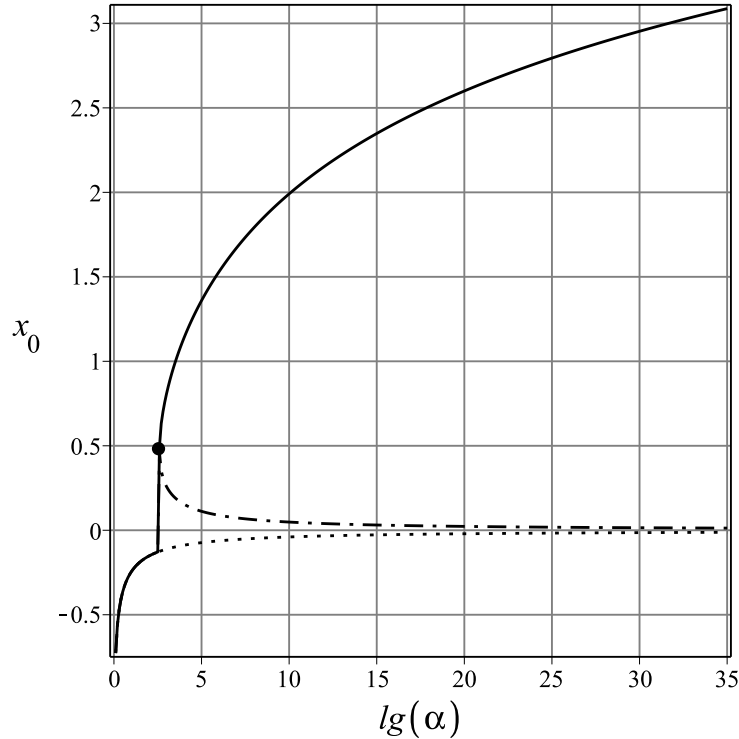


Рис. 12. Графики корней уравнения (7.13).

7.4. Тип особых точек

Вычисляя частные производные функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$ в особых точках системы, получим с учетом (7.13):

$$A(M_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varrho_0^2 & 0 \end{pmatrix}; \quad A(M_k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varrho_k^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2), \quad (7.16)$$

где:

$$\varrho_k^2 = \frac{5 \varepsilon_0^2 \alpha}{2 x_k^{7/2}}; \quad k = \overline{0, 2}.$$

Отсюда легко найдем собственные числа матриц $A(M_k)$:

$$\begin{aligned} \lambda_1(M_0) &= -\lambda_2(M_0) = \varrho_0; \\ \lambda_1(M_i) &= -\lambda_2(M_i) = i\varrho_i, \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Таким образом, точка M_0 , заведомо находящаяся под радиусом Шварцшильда, является неустойчивой седловой точкой, а точки M_i , находящиеся вне радиуса Шварцшильда, являются центрами исследуемой динамической системы. Фазовые траектории в окрестности этих особых точек $M_i(x_i, 0)$ совершают вокруг них бесконечное число оборотов.

7.5. Фазовые портреты

Переходя к численному моделированию орбит частиц, мы должны помнить о соотношении нормировки (3.2), которое, с одной стороны является дифференциальным следствием уравнений геодезических с произвольной константой в правой части, с другой стороны вследствие определенности этой константы, налагает связь на начальные условия задачи Коши:

$$y(0) = \pm \sqrt{\varepsilon_0^2 - \left(1 - \frac{1}{x(0)}\right) \left(e + \frac{\mu_0^2}{4m^2 x^2(0)}\right)}. \quad (7.18)$$

Покажем на примере, как создаются фазовые портреты двумерной динамической системы в системе компьютерной математики (СКМ) Maple. Зададим нормальную систему уравнений динамической системы (7.10):

```
>Eqs:=(m,mu0,tau0)->[diff(r(s), s) = R(s), diff(R(s), s) =
(m*R(s)^2*r(s)^3-m*epsilon0^2*r(s)^3+r(s)^2*mu0^2-
4*r(s)*m*mu0^2+4*m^2*mu0^2)/((r(s)-2*m)*r(s)^4)];
```

Зададим теперь связь начальной радиальной скорости с начальным радиусом (7.18):

```
>R0:=(e,m,mu0,epsilon0,x_0)->evalf(sqrt(epsilon0^2-(1-1/x_0)
*(e+mu0^2/(4*m^2*x_0^2))));
```

Так, например, получим:

```
>R0(1,1,4,1,5);
```

0.26832815729997476357

Фазовая диаграмма динамической системы $Eqs(m, \mu_0, \tau_0)$ с изображением, например, трех отдельных траекторий реализуется с помощью процедуры `DEplot` библиотеки `DEtools` (Рис. 13). Приведенный пример, соответствующий значению $\alpha > \sqrt{27/4}$ наглядно демонстрирует 3 возможных типа фазовых траекторий динамической системы. На следующем примере, соответствующем значению $\alpha < \sqrt{27/4}$ показано 6 отдельных фазовых траекторий (Рис. 14).

```
DEtools[DEplot](Eqs(1,4,1),[r(s),R(s)],s=-7..7,
[[r(0)=1.5,R(0)=R0(1,1,4,1,1.5)],[r(0)=sqrt(3),R(0)=R0(1,1,4,1,sqrt(3))],
[r(0)=3,R(0)=R0(1,1,4,1,3)]],
stepsize=0.1,method=rosenbrock,arrows=small,
color=COLOR(RGB,0.3,0.3,0.3),linecolor=BLACK,thickness=1,
labels=['r','dr/(ds)'],labelfont=[TIMES,ROMAN,14],axes=BOXED,
view=[0..10,-4..4]);
```

```
DEtools[DEplot](Eqs(1,5,2),[r(s),R(s)],s=0..10,
[[r(0)=2.5,R(0)=R0(1,1,5,2,2.5)],[r(0)=2.6,R(0)=R0(1,1,5,2,2.6)],
[r(0)=2.7,R(0)=R0(1,1,5,2,2.7)],[r(0)=3,R(0)=R0(1,1,5,2,3)],
[r(0)=4,R(0)=R0(1,1,5,2,4)],[r(0)=5,R(0)=R0(1,1,5,2,5)]],
stepsize=0.1,method=rosenbrock,arrows=small,
color=COLOR(RGB,0.3,0.3,0.3),linecolor=BLACK,thickness=1,
labels=['x','dx/(ds)'],labelfont=[TIMES,ROMAN,14],axes=BOXED);
```

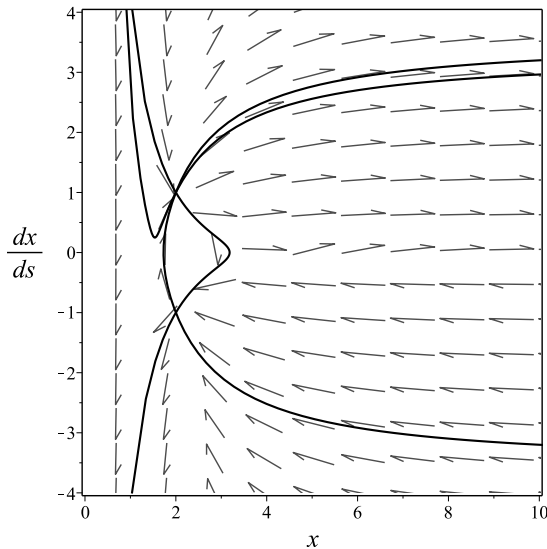


Рис. 13. Фазовая диаграмма движения массивной частицы в поле Шварцшильда в плоскости $\{r(s), \dot{r}(s)\}$ (7.10) - (7.11). Всюду $\mu_0 = 4$, $s \in [-7, 7]$, $\varepsilon_0 = 1$, $m = 1$ (при этом $\alpha \approx 2.8284271247461900976 > \sqrt{27/4}$). Кривая с максимумом по оси x соответствует начальному условию $x(0) = 3$; кривая с минимумом по оси dx/ds соответствует начальному условию $x(0) = 1.5$; параболлоидная кривая - $x(0) = \sqrt{3}$. Показана лишь часть диаграммы с помощью опции `view=[0..10, -4..4]`.

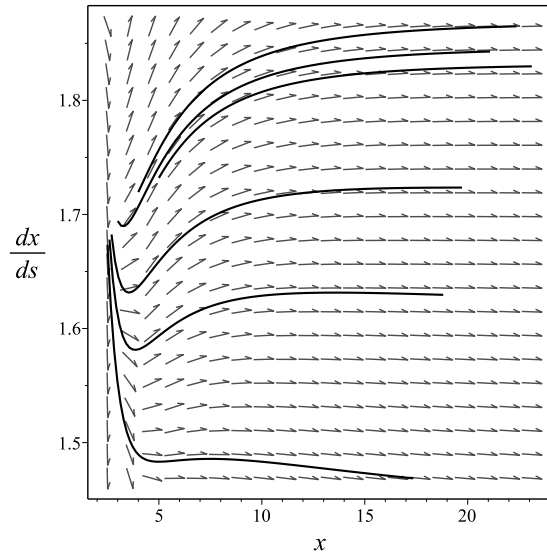


Рис. 14. Фазовая диаграмма движения массивной частицы в поле Шварцшильда в плоскости $\{r(s), \dot{r}(s)\}$ (7.10) - (7.11). Всюду $\mu_0 = 5$, $s \in [-7, 7]$, $\varepsilon_0 = 2$, $m = 1$ (при этом $\alpha \approx 1.7677669529663688110 < \sqrt{27/4}$). Снизу вверх: $r(0) = 2.5$; $r(0) = 2.6$; $r(0) = 2.7$; $r(0) = 3$; $r(0) = 4$; $r(0) = 5$. В этом случае опция `view=[0..10, -4..4]` не применялась. Видно, что программа позволяет просматривать и состояния, предшествующие начальному.

Благодарности

Авторы благодарны ректорату Казанского университета и дирекции Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского за материальную поддержку экспериментального проекта необходимым компьютерным и другим оборудованием, а также лицензионным программным обеспечением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Игнатъев Ю.Г. Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. 298 с.
2. Игнатъев Ю.Г., Абдулла Х.Х. Комплекс программ для математического моделирования нелинейных электродинамических систем в системе компьютерной математики Maple // Вестник Российского университета дружбы народов. Математика. Информатика. Физика. 2010. Вып. 4. С. 65-76.
3. Игнатъев Ю.Г., Абдулла Х.Х. Математическое моделирование нелинейных обобщенно - механических систем в системе компьютерной математики Maple // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2010. Вып. 2 (14). С. 67-77.
4. Игнатъев Ю.Г. Программа автоматизированного распознавания системы обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка, разрешенных относительно старших производных, автоматизированного управляемого численного интегрирования задачи Коши для нее и выводом решений в функциональной, сплайновой форме в системе компьютерной математики Maple // Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2012613751, 20 июня 2012 г. Федеральная служба по интеллектуальной собственности; RU ОБПТ №3(80). 20.09.2012. - с. 606
5. Игнатъев Ю.Г., Абдулла Х.Х. Программные процедуры численного решения задачи Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений в форме сплайнов // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы 11-й междунар. конферен. Смоленск: изд-во СмолГУ, 2010. С. 23-24.

6. Игнат'ев Ю.Г., Яковлева О.А. Программный комплекс программных процедур управляемого численного решения систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с выводом решения в сплайновой форме в системе компьютерной математики Maple // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015614149. - 07.04.2015. - Федеральная служба по интеллектуальной собственности.
7. Игнат'ев Ю.Г. Классическая космология и темная энергия. Казань: Казанский университет, Изд-во АН РТ, 2016. 248 с.
8. Игнат'ев Ю.Г., Агафонов А.А. Математические модели теоретической физики с примерами решения задач в СКМ Maple. Казань: Казанский университет, 2016. 264 с.
9. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 176 с.
10. Пуанкаре А. Избранные труды. Том 1. М.: Наука, 1971. 772 с.
11. Пуанкаре А. Избранные труды. Том 2. М.: Наука, 1972. 358 с.
12. Арнольд В.И., Ильясенко Ю.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 1. М.: ВИНТИ, 1985. С. 7 - 149.
13. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980. 320 с.
14. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001. 452 с.
15. Brinks R. On the convergence of derivatives of B-splines to derivatives of the Gaussian function // Comp. Appl. Math. 2008. Vol. 27. P. 1-17.
16. Корнейчук Н.П., Бабенко В.Ф., Лигун А.А. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. Киев: Наукова думка, 1992. 304 с.
17. URL: <http://vuz.exponenta.ru>
18. Игнат'ев Ю.Г. Неминимальные макроскопические модели скалярного поля, основанные на микроскопической динамике. III. Расширение теории на отрицательные массы // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2015. Вып. 1. С. 5-23.
19. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
20. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966. 496 с.

Поступила в редакцию 28.11.2016

Игнат'ев Юрий Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

Самигуллина Алсу Ринатовна, ассистент, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35.
E-mail: alsu_sam@rambler.ru

Yu. G. Ignat'ev, A. R. Samigullina

Numerically - analytical methods for mathematical modeling of nonlinear dynamic systems in CAS Maple

Keywords: nonlinear dynamical systems, mathematical modeling, qualitative theory of differential equations, spline approximation, numerical integration methods, visualization computing, application mathematical packages.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S, 52.27.Ny, 02.60.Cb, 07.05.Tp, 04.25.-g

A numerical - analytical methods for mathematical modeling of nonlinear dynamic systems, based on the combined use of the qualitative theory of differential equations, numerical methods of integration of systems of ordinary differential equations and methods of spline approximation of functions in the application mathematical package the Maple. The examples of the study of nonlinear dynamical systems.

REFERENCES

1. Ignatyev Yu.G. *Matematicheskoe modelirovanie fundamental'nyh objektov i yavlenij v sisteme komp'yuternoj matematiki Maple. Lekcii dlya shkoly po matematicheskomu modelirovaniyu* (Mathematical modeling of fundamental objects and phenomena in system of computer mathematics Maple. Lectures for school on mathematical modeling), Kazan: Kazan University, 2014, 298 p.
2. Ignat'ev Yu.G., Abdulla H.H. A program package for the mathematical modeling of nonlinear electrodynamic systems in Maple computer mathematics system, *Bulletin of Russian Peoples' Friendship University. Mathematics. Computer science. Physics*, 2010, no. 4, pp. 65-76.
3. Ignat'ev Yu.G., Abdulla H.H. Mathematical modeling of nonlinear generalized - mechanical systems in Maple computer mathematics system, *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*, 2010, no. 2(14), pp. 67-77.
4. Ignat'ev Yu.G. The program is an automated recognition system of arbitrary order ordinary differential equations resolved with respect to the highest derivatives, managed automated numerical integration of the Cauchy problem for her and terminal solutions in functional, spline shape in Maple computer mathematics system. *Bull. OBPBT*, 2012, no. 3(80), p. 606.
5. Ignat'ev Yu.G., Abdulla H.H. Software procedures the numerical solution of the Cauchy problem for a system of nonlinear differential equations in the form of splines, *Computer algebra systems and their applications: Proceedings of the International Conference*, SmolSU, Smolensk, 2010, pp. 23-24.
6. Ignat'ev Yu.G., Yakovleva O.A. Program complex software procedures managed solving systems of nonlinear ordinary differential equations with the withdrawal of the decision in the form of a spline in Maple computer mathematics system. Certificate of state registration of the computer programs. № 2015614149, 7 April, 2015. Federal Intellectual Property Service.
7. Ignatyev Yu. G. *Klassicheskaya kosmologiya i temnaya ehnergiya* (Classical cosmology and dark energy), Kazan: Kazan University, Publishing AS RT, 2016, 248 p.
8. Ignatyev Yu.G., Agafonov A.A. *Matematicheskie modeli teoreticheskoy fiziki s primerami resheniya zadach v SKM Maple* (Mathematical models of theoretical physics with examples of solving problems in SCM Maple), Kazan: Kazan University, 2016, 264 p.
9. Filippov A.F. *Sbornik zadach po differentsial'nym uravneniyam* (Collection of problems on differential equations), Izhevsk: SRC «Regular and chaotic dynamics», 2000, 176 p.
10. Poincare H. *Izbrannye trudy. Tom 1.* (Selected Works. Vol. 1), Moscow: Nauka, 1971, 772 p.
11. Poincare H. *Izbrannye trudy. Tom 2.* (Selected Works. Vol. 2), Moscow: Nauka, 1972, 358 p.
12. Arnold V.I., Ilyashenko Y.S. Ordinary Differential Equations, *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya. T. 1.* (Results of science and technology. Current problems in mathematics. Fundamental directions. Vol.1), Moscow: VINITI, 1985, pp. 7-149.
13. Bogoyavlenskii O.I. *Metody kachestvennoy teorii dinamicheskikh sistem v astrofizike i gazovoy dinamike* (Methods of the qualitative theory of dynamical systems in astrophysics and gas dynamics), Moscow: Nauka, 1980, 320 p.
14. Rogers D., Adams J. *Matematicheskie osnovy mashinnoj grafiki* (Mathematical foundations of computer graphics), Moscow: Myr, 2001, 452 p.
15. Brinks R. On the convergence of derivatives of B-splines to derivatives of the Gaussian function, *Comp. Appl. Math.*, 2008, vol. 27, pp. 1-17.
16. Korneichuk N.P., Babenko V.F., Ligun A.A. *Ehkstremal'nye svoystva polinomov i splajnov* (Extreme properties of polynomials and splines), Kiev: Naukova Dumka, 1992, 304 p.
17. <http://vuz.exponenta.ru>
18. Ignatyev Yu.G. Nonminimally macroscopic model of a scalar field, based on the microscopic dynamics. III. Expanding the theory to the negative mass, *Space, time and fundamental interactions*, 2015, no. 1, pp. 5-23.
19. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Teoriya polya* (Theory of Fields), Moscow: Nuaka, 1973, 504 p.
20. Petrov A.Z. *Novye metody v obshchej teorii otноситel'nosti* (New methods in general relativity), Moscow: Nauka, 1966, 496 p.

Received 28.11.2016

Ignat'ev Yurii Gennadievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

Samigullina Alsu Rinatovna, assistant lecturer, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: alsu_sam@rambler.ru