УДК 514.824;511.84;530;145

А. П. Ефремов[1]

ФОРМУЛЫ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАКОНОВ В ГИПЕРКОМПЛЕКСНОЙ СРЕДЕ: МЕХАНИКА

Показано, что спинорные уравнения, являющиеся следствием условия стабильности шести ассоциативных алгебр относительно специального преобразования элементарной ячейки базовой поверхности, представляют собой математический аналог известных уравнений механики и в физических единицах становятся в точности уравнениями Шредингера, Паули и Гамильтона Якоби. При этом возникают модели прото-частицы (волновая функция), частицы (структурная материальная точка) и (пред)геометрический образ функции действия. Это приводит к новому точному решению уравнений Шредингера для модели атома водорода (типа модели Бора), а также к нестандартной схеме построения механики релятивистской частицы.

Ключевые слова: гиперкомплексные числа, квантовая, классическая, релятивистская механика

PACS: 04.20 Gz.; 04.20 Gh

1. Введение

Настоящая работа является продолжением опубликованного ранее в этом журнале обзора математики гиперкомлексных чисел [1]. Здесь будет показано, что требования сохранения и стабильности фундаментальных логических структур этой среды порождают серию уравнений, которые представляют собой точные математические аналоги законов классической и квантовой механики, возникшими как следствие опытных данных или найденными эвристически. Кратко напомним принятые в работе [1] обозначения величин и некоторые базовые соотношения, которые будут использованы ниже. Основной объект исследования – малая область некоторого базового двумерного (2D) пространства (комплекснозначной поверхности) – 2D-ячейка, наделенная симметричной метрикой g и векторным базисом ψ^+, ψ^- (2D-столбцы); тогда элементы ковекторного базиса – 2D-строки $\varphi^+ = g\psi^+, \varphi^- = g\psi^-$, и выполняются соотношения единичности и ортогональности

$$\varphi^{\pm}\psi^{\pm} = 1, \quad \varphi^{\pm}\psi^{\mp} = 0. \tag{1}$$

Легко проверить, что условия (1) достаточны, чтобы следующие линейные комбинации простых тензорных произведений одного набора векторов и ковекторов $\{\psi^{\pm}, \varphi^{\pm}\}$

$$1 \equiv \psi^+\varphi^+ + \psi^-\varphi^-, \quad \mathbf{q}_1 \equiv -i(\psi^+\varphi^- + \psi^-\varphi^+), \quad \mathbf{q}_2 \equiv \psi^+\varphi^- - \psi^-\varphi^+, \quad \mathbf{q}_3 \equiv i(\psi^+\varphi^+ - \psi^-\varphi^-), \tag{2}$$

удовлетворяли весьма общему закону умножения

$$\mathbf{q}_k\mathbf{q}_n = -\delta_{kn} + \varepsilon_{knl}\mathbf{q}_l, \quad \mathbf{q}_k 1 = 1\mathbf{q}_k, \quad 1 \cdot 1 = 1, \tag{3}$$

где $\delta_{kn}, \varepsilon_{knl}$ – 3D-символы Кронекера и Леви-Чивиты (есть суммирование по повторяющимся индексам). В целом закон (3) совпадает с правилом умножения (би)кватернионных единиц, но как частные случаи он содержит законы умножения единиц серии ассоциативных алгебр[2]: действительных чисел (единица 1), комплексных чисел (единицы $1, \mathbf{q}_2$), двойных чисел $(1, i\mathbf{q}_2)$, дуальных чисел ($1, \varepsilon$, где $\varepsilon \equiv \psi^+\varphi^-$). Традиционно векторные единицы $\mathbf{q}_k$ ассоциируются с геометрическим (физическим) пространством, поскольку из соотношений (3) следует их трактовка как направляющей триады (3D-репера) декартовой системы координат. Тогда 2D-ячейка и объекты на ней $\{\psi^{\pm}, \varphi^{\pm}\}$, «длина» которых в силу равенств (2) есть в обобщенном смысле «корень квадратный»

[1]E-mail: a.yefremov@rudn.ru

[2]Алгебры действительных, комплексных и кватернионных чисел – исключительные; алгебры двойных, дуальных и бикватернионных чисел имеют делители нуля.

из геометрической длины, должна ассоциироваться с понятием «предгеометрии» [2], или фрактальной поверхности (в смысле дробной размерности). Смысл метрики плоской 2D-ячейки при этом имеет скалярная единица.[3]

Если исходно постоянный базис $\{\psi^{\pm}, \varphi^{\pm}\}$ подвергнуть преобразованию $\psi'^{\pm} = S\psi^{\pm}$, $\varphi'^{\pm} = \varphi^{\pm}S^{-1}$, $S \in SL(2,C)$, то $1' = 1$, $\mathbf{q}'_k = S\mathbf{q}_k S^{-1}$, и закон (2) очевидно не нарушается. В случае простейшего такого преобразования $U \equiv \cos\alpha + \mathbf{q}_3 \sin\alpha \to \psi'^{\pm} = U\psi^{\pm} = e^{\pm i\alpha}\psi^{\pm}$ фрактальная площадка 2D-ячейки при изменении фазы «перекачивается» из действительного сектора в мнимый (мерцает), при этом соответствующий 3D-репер поворачивается в геометрическом пространстве на угол 2α вокруг вектора $\mathbf{q}'_3 = \mathbf{q}_3$. Понятно, что по отношению к 3D-пространству элементы фрактального базиса являются спинорами.

Следующее преобразование – растяжение 2D-ячейки

$$\psi''^{\pm} \equiv \sigma\psi' = \sigma e^{\pm i\alpha}\psi^{\pm}, \quad \varphi''^{\pm} \equiv \sigma\varphi' = \sigma e^{\mp i\alpha}\varphi^{\pm}, \tag{4}$$

где $\sigma \in \mathbf{R}$, приводит к метрическому дефекту $\psi''^{+}\varphi''^{+} + \psi''^{-}\varphi''^{-} \neq 1$ и к нарушению правила умножения всех вышеперечисленных алгебр. Для устранения этого дефекта предлагается рассмотреть амплитуду σ и фазу α преобразования (4) и в целом комплексное число

$$\lambda \equiv \sigma e^{i\alpha}, \tag{5}$$

(фактор преобразования) как функции координат ξ_Λ (некоторого M-мерного пространства P и свободного параметра θ, притом что имеет место нормализующий функционал по объему пространства P

$$f(\theta) \equiv \int\limits_{V_\xi} \lambda(\xi,\theta)\lambda^*(\xi,\theta)dV_\xi = 1. \tag{6}$$

Тогда, с точки зрения P метрический дефект «сглаживается» (становится «не заметным»), и составные величины восстанавливают свою «единичность» $f \cdot 1'' = 1$, $f \cdot \mathbf{q}''_k = \mathbf{q}'_k$, т.е. скалярная единица остается неизменной, а 3D-репер (напомним) поворачивается при изменении фазы на двойной угол.

Следовательно, сохраняются свойства всех упомянутых алгебр. Более того, алгебры сохраняют свои свойства «навсегда» (в смысле параметра θ), если выполняется очевидное ***условие стабильности*** $\partial f/\partial\theta \equiv \partial_\theta f = 0$, или с учетом определения (6) и формулы Стокса, «уравнение непрерывности»

$$\partial_\theta(\lambda\lambda^*) + \partial_\Lambda(\lambda\lambda^* k_\Lambda) = 0, \tag{7}$$

где k_Λ – некоторый M-мерный вектор «движения» 2D-ячейки в пространстве P; этот вектор может быть задан различными способами. Покажем, что эти чисто математические рассуждения и формулы имеет прямое отношение к законам механики.

2. Спинорные уравнения механики

Пусть в частном случае вектор k_Λ задает в пространстве P направление приращения фазы поворота диады $k_\Lambda = \partial_\Lambda\alpha$, фаза при этом выражается из определения $\lambda = \sigma e^{i\alpha}$ так: $\alpha = \frac{i}{2}\ln\frac{\lambda^*}{\lambda}$; тогда $k_N = \frac{i}{2}\left(\frac{\partial_\Lambda\lambda^*}{\lambda^*} - \frac{\partial_\Lambda\lambda}{\lambda}\right)$. Подстановка этого выражения и простые преобразования приводят уравнение (7) к виду (есть суммирование по индексу Λ)

$$\partial_\theta\lambda - \frac{i}{2}\partial_\Lambda\partial_\Lambda\lambda + iW\lambda + e^{2\alpha}(\partial_\theta\lambda^* + \frac{i}{2}\partial_\Lambda\partial_\Lambda\lambda^* - iW\lambda*) = 0, \tag{8}$$

где также проделана тождественная операция: добавлена и вычтена произвольная функция $i\lambda\lambda^*W$. Если уравнение (8) верно для любых значений фазы, то каждая из его взаимно сопряженных частей удовлетворяется, достаточно записать одно уравнение для комплексной функции $\lambda(\xi_\Lambda, \theta)$

[3] В общем случае метрика 2D-ячейки строится из ковекторных компонент базиса.

$$\left(\partial_\theta - \frac{i}{2}\partial_\Lambda\partial_\Lambda + iW\right)\lambda = 0. \tag{9}$$

Пусть абстрактное (математическое) пространство P, в переменных которого записано уравнение (9), является трехмерным физическим миром (то есть рассматривается еще более частный случай). Тогда посредством введения коэффициентов размерности абстрактные (безразмерные) координаты должны стать физическими пространственными координатами x_k

$$\xi_\Lambda \to x_k/\varepsilon, \tag{10а}$$

а свободный параметр – временем t

$$\theta \to t/\tau. \tag{10б}$$

Если коэффициенты размерностей (они же – стандарты масштабов) выбрать в виде

$$\varepsilon \equiv \frac{\hbar}{mu}, \tag{11а}$$

$$\tau \equiv \frac{\varepsilon}{u} = \frac{\hbar}{mu^2}, \tag{11б}$$

где $\hbar$ – постоянная Планка, m – некоторая масса, u – некоторая характерная скорость ($u_{\max} \to c$) и подставить соотношения (10) и (11) в уравнение (9), то оно в точности становится уравнением Шрёдингера

$$\left(i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\partial_k\partial_k - U\right)\lambda(x,t) = 0, \tag{12}$$

где произвольная функция $U \equiv mu^2W$ имеет смысл потенциала. Нормализующий функционал в физическом пространстве приобретает вид

$$\int\limits_{V_\xi} \lambda\lambda^* dV_\xi \to \frac{1}{\varepsilon^3}\int\limits_V \sigma^2 dV = 1, \tag{13}$$

откуда следует геометрическая и физическая трактовка «функции состояния» λ. С точки зрения (пред-)геометрии, как было показано выше, $\lambda(x,t) = \sigma(x,t)e^{i\alpha(x,t)}$ описывает сдвинутую в комплексной плоскости на угол α (или мерцающую) и растянутую в σ раз 2D-ячейку фундаментальной поверхности, параметры мерцания и растяжения зависят от координат физического пространства и времени. С точки зрения физики, функция σ может рассматриваться как относительная «полу-плотность» характерной массы $\sigma = \sqrt{\rho(x,t)/\rho_{mean}}$, где $\rho(x,t)$ – локальная плотность, $\rho_{mean} = const$ – средняя плотность в некотором физическом объеме V. Тогда соотношение (13) приобретает смысл определения массы, входящей в уравнение Шредингера и в определение масштабных стандартов (11)

$$\int\limits_V \rho(x,t)dV = \rho_{mean}\varepsilon^3 = m. \tag{14}$$

С позиций физического мира весь объект представляет собой сконцентрированную в крайне малом объеме массу, по сути, материальную точку с «вмороженной» в нее кватернионной триадой, повернутой на угол 2α (или вращающейся с удвоенной частотой изменения фазы 2D-ячейки). Подобная трактовка позволяет целенаправленно искать статические и динамические решения уравнения (12).

2.1. Атом водорода: решение Шредингера и модель Бора

Модель водородоподобного атома Шредингера возникает как интерпретация точного решения уравнения (12) с потенциалом центрального электрического заряда $U \equiv -q^2/r$.

В решении, которое сегодня считается единственно верным (и обычно называют стационарным), от времени зависит лишь фаза $\lambda(r,t) \equiv \sigma(x)e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$, $E = const$. Здесь будут рассматриваться только круговые орбитали, т.е. масштабный фактор есть функция радиуса $\sigma = \sigma(r)$, тогда уравнение (12) в сферических координатах имеет вид

$$E + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r\sigma}d_r d_r\,(r\sigma) + \frac{q^2}{r} = 0. \tag{15}$$

Традиционно его записывают в безразмерных величинах r/a, E/E_0 , где $a = \hbar^2/(mq^2)$, $E_0 = mq^4/(2\hbar^2)$.

Решение уравнения (15), как известно, приводит к полиномам Лягерра для функции σ/r и к выражению для уровней энергии $E = -E_0/n^2$.

С пред-геометрических позиций (фрактальная) модель Шредингера представляет собой кольцеобразную 2D-ячейку фундаментальной поверхности с центром, совпадающим с центром атома, и мерцающую с циклической частотой $\omega = E/\hbar$, при этом в окрестности каждого дискретного радиального уровня есть компактное (и конформное) растяжение метрики ячейки, заданное функцией $\sigma(r)$.

С точки зрения макромира, это – имеющая массу электрона точка, совпадающая с центром симметрии модели. В этой точке находится начало кватернионной триады, вращающейся с частотой 2ω вокруг произвольно направленного вектора $\mathbf{q}_3$. В 3D-координатах эта точка остается неподвижной, поэтому модель Шредингера правильнее было бы классифицировать не как стационарную, а как статическую.

Однако можно показать, что уравнение (12) с тем же потенциалом $U \equiv -q^2/r$ допускает иное стационарное решение, где понятие стационарности связывается с устоявшимся движением. Именно, если электрон действительно обращается вокруг ядра по круговой орбите, то можно ожидать волнового решения с фазой

$$\alpha = k\varphi - \omega t, \tag{16}$$

где $k = const$ – угловое волновое число, φ – азимутальный угол 3D-сферических координат, $\omega = const$ – циклическая частота гармонического мерцания ячейки. При этом масштабный фактор также может быть функцией времени, угловой и радиальной координат, например, следующего вида

$$\sigma = g(\varphi, t) f(r). \tag{17}$$

Пусть в центральном поле протона электрон движется по плоской круговой орбите (полярный угол равен $\pi/2$), тогда подстановка функций (16, 17) в уравнение (12) приводит к системе уравнений (действительной и мнимой части)

$$\omega\hbar - \frac{k^2\hbar^2}{2mr^2} + \frac{q^2}{r} + \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{rf}\partial_r\partial_r(rf) + \frac{1}{gr^2}\partial_\varphi\partial_\varphi g\right] = 0, \tag{18а}$$

$$\partial_t g + \frac{k\hbar}{mr^2}\partial_\varphi g = 0. \tag{18б}$$

Система (18) имеет точное решение. Умножение уравнения (18а) на r^2 и перенос последнего слагаемого в правую часть приводит к разделению переменных, при этом уравнение для функции $g(\varphi, t)$ имеет вид $\partial_\varphi\partial_\varphi g + \mu^2 g = 0$, где μ – действительный параметр; следовательно, $g = \sin(\mu\varphi + \gamma)$. Условие нормировки $\int\limits_0^{2\pi} g^2 d\varphi = \frac{A^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left[1 - \cos 2\,(\mu\varphi - \gamma)\right]d\varphi = \frac{A^2}{2}\left\{2\pi - \frac{1}{2\mu}\left[\sin(4\pi\mu + 2\gamma) + \sin 2\gamma\right]\right\} = 1$ определяет значение амплитуды $A = 1/\sqrt{\pi}$ и налагает ограничения на параметр $\mu = n/2$, $n = \pm 1, \pm 2, ...$

Достаточны значения натурального ряда

$$n = 1, 2, 3..., \tag{19}$$

т.к. отрицательные значения n соответствуют встречному движению. Функция $g(\varphi, t)$ приобретает вид

$$g(\varphi,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left[\frac{n}{2}\varphi - \gamma(t)\right]. \tag{20}$$

Угловая скорость движения электрона на круговой орбите определяется фазовой скоростью волны (20) $\Omega \equiv \dot{\varphi} = 2\dot{\gamma}/n$; с другой стороны, $\Omega = 2\pi/(kT_0)$, где $T_0 = \pi/\omega$ – период половинного мерцания 2D-ячейки (или полный период вращения 3D-репера), следовательно, $\Omega = 2\omega/k$. Выражения для угловой скорости очевидно совместны при

$$\dot{\gamma} = \omega, \quad k = n. \tag{21}$$

Тогда $g(\varphi, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left[\frac{n}{2}(\varphi - \Omega t)\right]$; подстановка этой функции в уравнение (18б) дает соотношение

$$m\Omega_n r_n^2 = n\hbar, \tag{22}$$

выражающее тот факт, что каждому значению натурального параметра n соответствует определенное значение радиуса круговой орбиты r_n и угловой скорости Ω_n движения электрона по этой орбите.

Соотношение (22) хорошо известно в квантовой физике как формула квантования момента импульса электрона, постулированная Бором в его весьма успешной модели атома водорода; в данном случае эта формула появляется как решение уравнения Шредингера.

Далее, считая величины дискретными, можно определить энергию электрона как $E_n = \omega_n\hbar$, и из формулы (22) выразить его импульс $p_n \equiv m\Omega r_n = n\hbar/r_n$, тогда, с учетом решения (20), уравнение (18а) можно записать в виде, не нарушающем равенство

$$E_n - \frac{p_n^2}{2m} + \frac{q^2}{r_n} = 0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{rf}\partial_r\partial_r(rf) + \frac{n^2}{4r^2}\right]. \tag{23}$$

Равная нулю левая часть (23) выражает энергию макрочастицы, равномерно движущейся по окружности в поле кулоновского потенциала, что эквивалентно уравнению Ньютона $p_n^2/(mr_n) = q^2/r_n^2$. Отсюда следуют известные соотношения для атома водорода Бора: радиус орбиты электрона

$$r_n = an^2 = \frac{\hbar^2 n^2}{mq^2}, \tag{24}$$

угловая скорость обращения по орбите

$$\Omega_n = \frac{n\hbar}{mr_n^2} = \frac{mq^4}{n^3\hbar^3},$$

циклическая частота мерцания 2D-ячейки, определяющая энергию электрона на боровской орбите

$$\omega_n = \frac{E_n}{\hbar} = \frac{n^2\hbar}{2mr_n^2} = \frac{mq^4}{2n^2\hbar^3}.$$

Правую часть (23) можно было бы рассматривать как уравнение, определяющее радиальную амплитуду волновой функции на каждой орбите. Общим решением этого уравнения является функция

$$f_n(r) = Ar_n^{-\frac{1+\sqrt{1+n^2}}{2}} + Br_n^{-\frac{1-\sqrt{1+n^2}}{2}};$$

если $A \neq 0, B = 0$, то амплитуда убывает при увеличении квантового числа n (на более высокой орбите), тогда $f_{n+1} < f_n$. Впрочем, условие нормировки делает знание амплитуды формальным, поскольку в данной модели (типа модели Бора) радиус орбиты электрона определен соотношением (24).

Полученное решение имеет геометрическую трактовку, существенно отличную от вышеописанной, соответствующей модели Шредингера.

С пред-геометрических позиций, полученная как решение уравнения Шредингера «модель Бора» представляет собой 2D-ячейку, мерцающую с циклической частотой $\omega_n = E_n/\hbar$, и распространяющуюся как волна по круговой орбите с фазовой скоростью $\Omega_n = 2\omega_n/n$; конформное растяжение метрики 2D-ячейки определяется функцией $\sigma_n \sim (1/\sqrt{\pi})\sin[n/2(\varphi - \Omega t)]$, то есть полученное (до нормализации) решение описывает волновое гармоническое распределение относительной плотности $\sigma_n^2(\varphi, t)$ частицы на круговой орбите, по сути, вращающееся тонкое кольцо, число максимумов плотности на котором равно номеру орбиты. На этом уровне данная модель отличается от модели Бора, где электрон изначально считается компактным массивным телом.

Но, с точки зрения макромира (после нормализации), картина в известном смысле восстанавливается, тем более что момент инерции (значит, и импульса) тонкого кольца радиуса r_n и массы m равен моменту инерции массивной точки, имеющей те же параметры. После интегрирования плотности по циклической координате распределенный объект становится точкой, имеющей массу электрона и движущейся по орбите со скоростью $u_n = \Omega_n r_n \cong u_1 n$, где характерная скорость (на нижней орбите) $u_1 = \Omega_1 r_1 \cong c\tilde{\alpha}$ имеет значение, впервые найденное Зоммерфельдом [3], $\tilde{\alpha} \cong 1/137,036$ – постоянная тонкой структуры. Характерная длина, определяемая формулой (11а), в данном случае равна величине радиуса первой орбиты $\varepsilon = \hbar/(mu) = r_1$. В свою очередь движущаяся по орбите массивная точка является началом кватернионной триады, вращающейся с частотой $2\omega_n$ так, что на длине каждой орбиты укладывается целое число длин волн (вращения), как было замечено Де Бройлем в модели Бора, при этом на нижней орбите угловая частота орбитального обращения равна частоте вращения репера.

Здесь также стоит напомнить о «чувствительности» уравнения Шредингера по отношению к выбору потенциальной энергии $U(x)$, дополнительная константа в которой, в отличие от уравнений классической механики, приводит к новому решению. Представляется, что этот, казалось бы, нестандартный для механики факт можно несколько прояснить при разделении уравнения Шредингера (в общем виде) на действительную и мнимую части, подобно тому, как это сделано в частном случае при получении уравнений (18).

2.2. «Универсальные» уравнения механики

Вернемся к условию стабильности (9) («математическому уравнению Шредингера») до введения физических единиц и масштабов. Зная общий вид функции $\lambda = \sigma(\xi_\Lambda, \theta) e^{i\alpha(\xi_\Lambda, \theta)}$, в уравнении (9) можно выделить действительную и мнимую части

$$\partial_\theta \sigma + \partial_\Lambda \sigma \partial_\Lambda \alpha + \frac{1}{2}\sigma \partial_\Lambda \partial_\Lambda \alpha = 0, \tag{25а}$$

$$\partial_\theta \alpha + \frac{1}{2}\left(\partial_\Lambda \alpha\right)\left(\partial_\Lambda \alpha\right) + W - \frac{1}{2}\partial_\Lambda \partial_\Lambda \sigma/\sigma = 0 \tag{25б}$$

(стоит напомнить, что здесь и далее везде есть суммирование по M-мерному индексу Λ). Эта система уравнений эквивалентна условию стабильности; тем не менее, «предыдущее знание физики» позволяет каждому из уравнений (25) дать свою трактовку. Уравнение (25а) есть «корень квадратный» из уравнения непрерывности для конформного фактора, что демонстрируется умножением этого уравнения на $2\sigma(\xi_\Lambda, \theta)$:

$$2\sigma\partial_\theta \sigma + 2\sigma \partial_\Lambda \sigma \partial_\Lambda \alpha + \sigma^2 \partial_\Lambda \partial_\Lambda \alpha = \partial_\theta \sigma^2 + \partial_\Lambda\left(\sigma^2 \partial_\Lambda \alpha\right) = 0.$$

Над физическим пространством (и временем) это уравнение идентично закону непрерывности плотности, определяемой фактором σ.

Что же касается уравнения (25б), то для него возможны две трактовки.

С одной стороны, переменные этого уравнения могут быть функциями, сравнимо быстро изменяющимися при изменении координат; тогда в физических единицах соотношение (25б) есть часть уравнения квантовой механики [каким, в частности, является уравнение (23)] .

С другой стороны, фаза может быть функцией, медленно меняющейся по сравнению с масштабным фактором; тогда произвольную функцию W в уравнении (25б) можно представить в виде суммы $W = W_{ext} + W_{\rm int}$ внешнего «макропотенциала» W_{ext} и внутреннего «микропотенциала» W_{int}. В этом случае уравнение (25б) распадается на две независимые части

$$\partial_\theta \alpha + \frac{1}{2}\left(\partial_\Lambda \alpha\right)\left(\partial_\Lambda \alpha\right) + W_{ext} = 0, \tag{26а}$$

$$\partial_\Lambda \partial_\Lambda \sigma/\sigma = 2W_{\rm int}. \tag{26б}$$

Несложно видеть, что уравнение (26а) имеет форму уравнения Гамильтона-Якоби аналитической механики, при этом смысл функции действия (или величины, пропорциональной действию) имеет фаза α. Величину полной фазы на отрезке $[\theta_1, \theta_2]$ можно найти, подставив в (26а) выражение частной производной через полную $\partial_\theta \alpha = d_\theta \alpha - (d_\theta \xi_\Lambda)(\partial_\Lambda \alpha)$;

$$\alpha = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[d_\theta \xi_\Lambda \partial_\Lambda \alpha - \frac{1}{2}(\partial_\Lambda \alpha)(\partial_\Lambda \alpha) - W_{ext} \right] d\theta \equiv \int_{\theta_1}^{\theta_2} L(d_\theta \xi_\Lambda, \xi_\Lambda) d\theta; \tag{27}$$

подынтегральное выражение в функционале (27) имеет вид математического обобщения функции Лагранжа классической механики. Величина фазы на данном отрезке экстремальна, если исчезает вариационная производная $\delta\alpha = 0$, что приводит к математическому обобщению уравнения динамики

$$d_\theta \left[\partial_{\mathrm{K}} \alpha + \frac{\partial(\partial_\Lambda \alpha)}{\partial(d_\theta \xi_{\mathrm{K}})} \left(d_\theta \xi_\Lambda - \partial_\Lambda \alpha \right) \right] + \partial_{\mathrm{K}} W_{ext} = 0; \tag{28}$$

здесь $\partial_{\mathrm{K}} \alpha \equiv P_{\mathrm{K}}$ – аналог M-мерного импульса частицы, $d_\theta \xi_{\mathrm{K}} \equiv V_{\mathrm{K}}$ – аналог скорости, $-\partial_{\mathrm{K}} W \equiv F_{\mathrm{K}}$ – аналог внешней силы. Над 3D-пространством в физических единицах уравнение (28), очевидно, должно становиться уравнением динамики Ньютона.

В свою очередь однородное уравнение (26б) определяет зависимость функции σ от внутренних факторов, обусловленных зависимостью от координат «потенциала» W_{int}, который, на этом уровне построения модели, может быть задан произвольно.

Теперь предлагается рассмотреть уравнения (25) над 3D физическим пространством с использованием введенных ранее масштабных стандартов (11). В этом случае уравнения (25) принимают вид уравнений Бома [4]

$$\partial_t \sigma + \frac{\hbar}{m} \partial_n \sigma \partial_n \alpha + \frac{\hbar}{2m} \sigma \partial_n \partial_n \alpha = 0, \tag{29а}$$

$$\hbar \partial_t \alpha + \frac{\hbar^2}{2m} (\partial_n \alpha)(\partial_n \alpha) + U - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_n \partial_n \sigma / \sigma = 0, \tag{29б}$$

оставаясь при этом эквивалентом уравнения Шредингера. В частности, для модели атома водорода Шредингера, уравнение (29а) удовлетворяется тождественно, а соответствующее решение получается лишь из уравнения (29б); в приведенном выше анализе модели Бора решаются оба уравнения, при этом уравнению (29а) соответствует (18б), а уравнению (29б) – уравнение (18а).

Но если определить новую переменную $S \equiv \hbar\alpha$, ассоциируя ее с классической функцией действия, то уравнения (29) можно представить в виде (здесь $V_m \equiv \partial_m S/m$)

$$\partial_t \sigma + V_n \partial_n \sigma + \frac{1}{2} \sigma \partial_n V_n = 0, \tag{30а}$$

$$\partial_t S + \frac{1}{2m} (\partial_n S)(\partial_n S) + U_{ext} + U_{\mathrm{int}} - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_n \partial_n \sigma / \sigma = 0. \tag{30б}$$

В силу данной выше трактовки масштабного фактора $\sigma = \sqrt{\rho(x,t)/\rho_{mean}}$, уравнение (30а) после умножения на функцию $\sigma\rho_{mean}$ приводится к виду закона сохранения массы

$$\partial_t \rho + \partial_n (\rho V_n) = 0. \tag{31}$$

Уравнение (30б) в свою очередь распадается на две части, оперирующие в разных масштабах: классическое уравнение Гамильтона-Якоби для массивной точки в 3D-макромире

$$\partial_t S + \frac{1}{2m} (\partial_n S)(\partial_n S) + U_{ext} = 0 \tag{32}$$

и уравнение, определенное в некоторой малой области (в объеме частицы)

$$\partial_n \partial_n \sigma - R_{\mathrm{int}} \sigma = 0; \tag{33}$$

здесь $R_{\mathrm{int}} \equiv (2m/\hbar^2) U_{\mathrm{int}}$ есть некоторая произвольная функция, регулирующая распределение полуплотности массы $\sqrt{\rho(x,t)}$ и имеющая размерность см$^{-2}$, свойственную, например, компонентам тензора кривизны 3D-пространства.

Таким образом, систему (30) можно трактовать как своего рода «универсальные» уравнения механики и, в зависимости от пространственного масштаба, они представляют собой, с одной стороны, точный эквивалент уравнения квантовой механики (12), а с другой – систему разобщенных уравнений: непрерывности массы (31), аналитической механики (32) и распределения массы (33).

При этом физико-геометрическим образом функции действия S оказывается фаза мерцания 2D-ячейки фундаментальной поверхности или половина угла поворота кватернионной триады с началом в массивной точке, изображающей классическую частицу. Представляется, что такой допускающий визуализацию образ действия – абстрактной функции классической механики, не лишен оригинальности. Ниже показано, что эта геометрическая интерпретация оказывается связанной также с механикой релятивистской частицы.

Классический принцип экстремума действия теперь имеет смысл требования минимального значения угла поворота триады (оптически не наблюдаемой, конечно) при движении связанной с ней частицы. Легко проверить, что подынтегральное выражение функционала при $\alpha = S/\hbar$ в физических переменных имеет точный вид функции Лагранжа, а уравнение (68) становится уравнением динамики Ньютона.

2.3. Модель 3D-частицы, теория относительности и волна де Бройля

Функционал (28) можно рассмотреть, ограничиваясь представлением о частице как о массе, распределенной в малом объеме, и связанной с ней триадой, вращающейся вокруг произвольно направленного вектора $\mathbf{q}_3$.

Пусть на малом отрезке траектории dz этот вектор совпадает с направлением скорости частицы $\mathbf{V} = V\mathbf{q}_3$. Тогда на границе (радиусе) малого объема $\varepsilon/2$ точка, принадлежащая каждому из ортогональных $\mathbf{q}_3$ векторов триады, например, $\mathbf{q}_1$, описывает винтовую линию (цилиндрическую спираль) с элементом длины

$$dl^2 = dz^2 + (\varepsilon/2)^2 d(2\alpha)^2 = dz^2 + \varepsilon^2 d\alpha^2; \tag{34}$$

здесь учтено, что угол поворота триады в 3D-пространстве есть удвоенная фаза мерцания 2D-ячейки, а радиус цилиндрической спирали равен $\varepsilon/2$. Из соотношения (34) следует формула изменения фазы мерцания (половинного угла поворота)

$$d\alpha = \pm\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{dl^2 - dz^2}, \tag{35}$$

и если считать, что на радиусе $\varepsilon/2$ скорость движения вектора триады – характерная скорость микропроцесса – максимально возможная $u = c$, то есть $\varepsilon = \hbar/(mc)$, то $dl = cdt$; в свою очередь $dz = Vdt$, подстановка этих выражений в формулу (35) преобразует ее к виду

$$d\alpha = \pm\frac{mc^2 dt}{\hbar}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \tag{36}$$

знаки $\pm$ задают правый или левый винт спирали. Величина фазы (в единицах постоянной Планка) на отрезке $[t_1, t_2]$ определяется интегрированием равенства (36). Взятый со знаком минус определенный интеграл

$$\alpha\hbar = -mc^2\int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \equiv -mc\int_{t_1}^{t_2} ds \equiv S \tag{37}$$

имеет точную форму функционала действия свободной релятивистской частицы (или релятивистской частицы с адиабатными кинематическими параметрами).

Если частица классическая $V << c$, то из формулы (36) следует приближенное выражение для дифференциала действия

$$dS \cong \hbar d\alpha = -mc^2 dt + \frac{mV^2}{2}dt. \tag{38}$$

Добавление и вычитание слагаемого $mV^2/2$ с заменой $Vdt = dz$ и представление полной производной фазы $d\alpha = \omega dt + k_n dx_n$ для адиабатных параметров $k_n \sim const$, $\omega_n \sim const$ (отрицательное число) приводит соотношение (38) к виду

$$dS = \omega\hbar dt + k_z\hbar dz = -\left(mc^2 + \frac{mV^2}{2}\right)dt + mVdz \equiv -Edt + p_z dz. \tag{39}$$

Из уравнения (39) сразу следуют классические и квантовые соотношения для энергии частицы:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E = -\left|\omega\right|\hbar \tag{40а}$$

и ее импульса:

$$\frac{\partial S}{\partial z} = p_z = k_z\hbar \quad \text{или} \quad \frac{\partial S}{\partial x_n} = p_n = k_n\hbar. \tag{40б}$$

Согласно формулам (40), фаза мерцания 2D-ячейки частицы есть $\alpha \sim (p_n x_n - Et)/\hbar$, то есть частица в рассматриваемой модели обладает свойствами волны де Бройля с функцией состояния

$$\lambda(x_n, t) \sim \sigma \exp[i(p_n x_n - Et)/\hbar]. \tag{41}$$

Стоит подчеркнуть, что соотношения (40, 41), известные ранее как эвристические предположения, в данном случае являются следствием «спиральной структуры» 3D-частицы, которая, в свою очередь, есть следствие сильных математических требований.

Стоит перечислить следующие результаты анализа «спиральной структуры».

1. Единственное предположение в данной модели – о фундаментальной скорости вращения триады на пограничном радиусе – автоматически приводит к лагранжиану свободной релятивистской частицы; при этом подтверждается, что фаза мерцания есть функция действия, измеренная в величинах постоянной Планка $\alpha = S/\hbar$.

2. При этом фаза мерцания пропорциональна также величине пространственно-временного интервала частицы, который, с точки зрения 3D-мира, представляет собой длину дуги окружности, описываемой «поперечным» вектором триады на пограничном радиусе частицы в ее собственной системе отсчета.

3. Для свободной покоящейся частицы $d\alpha = \omega dt$, тогда из соотношения (38) следует $\omega\hbar = mc^2$, то есть собственная энергия частицы оказывается связанной с частотой мерцания ее 2D-ячейки, или с собственным вращением 3D-частицы которое таким образом должно быть непрерывным; если частица движется, то $\omega\hbar = m^2\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

4. Функция мерцания $\lambda(x_n, t)$ для свободной нерелятивистской частицы автоматически оказывается функцией состояния волны де Бройля.

2.4. Уравнение Шредингера-Паули

Уравнение (12), выведенное для скаляра λ, очевидно, представляет собой простейший вариант условия стабильности. Однако векторы диады являются спинорами (4), в частности, четными (здесь и далее индикатор + опущен) $\psi'' = \lambda\psi$, $\varphi'' = \lambda^*\varphi$; $\psi, \varphi = const$, и интеграл (6) в общем виде, но эквивалентно записывается так (для простоты область определения функции $\lambda(\xi_n, \theta)$ сразу будет считаться 3D-пространством)

$$f(\theta) \equiv \int\limits_V \varphi''\psi'' dV = 1. \tag{42}$$

Спинорную природу векторов диады можно учесть, если рассмотреть более сложный случай, когда в 3D-пространстве задано векторное поле $A_k(x_n, t)$, влияющее на движение 2D-ячейки

$$k_n = \partial_n \alpha + A_n. \tag{43}$$

При этом локальную 3D-метрику следует представить формулой алгебры Клиффорда

$$\delta_{kn} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{p}_k\mathbf{p}_n + \mathbf{p}_n\mathbf{p}_k); \tag{44}$$

здесь для удобства использованы матрицы Паули общего вида $\mathbf{p}_k \equiv i\mathbf{q}_k$. С учетом соотношений (43, 44) условие неизменности интеграла (42) приобретает вид

$$\partial_\theta(\varphi\lambda * \lambda\psi) + \frac{1}{2}(\mathbf{p}_m\mathbf{p}_n + \mathbf{p}_n\mathbf{p}_m)\partial_m[\varphi\lambda * \lambda\psi(\partial_n\alpha + A_n)] = 0. \tag{45}$$

Дифференцированием квадратичных функций, уравнение (45) приводится к форме

$$(\lambda^*\varphi) \times \left[\left(\partial_\theta - \frac{i}{2}\partial_k\partial_k + \frac{1}{2}\partial_k A_k + A_k\partial_k + \frac{i}{2}A_kA_k + \frac{i}{2}\varepsilon_{kmj}\mathbf{p}_j\partial_m A_k + iW\right)(\lambda\psi)\right] +$$

$$+\left[\left(\partial_\theta + \frac{i}{2}\partial_k\partial_k + \frac{1}{2}\partial_k A_k + A_k\partial_k - \frac{i}{2}A_kA_k + \frac{i}{2}\varepsilon_{mkj}\mathbf{p}_j\partial_m A_k - iW\right)(\lambda^*\varphi)\right] \times (\lambda\psi) = 0,$$

где добавлено и вычтено слагаемое $i(\lambda^*\varphi)\times\left(\frac{1}{2}A_kA_k + W\right)\times(\lambda\psi)$. Последнее уравнение распадается на уравнение для вектора-спинора

$$\left[i\partial_\theta - \frac{1}{2}(-i\partial_k + A_k)(-i\partial_k + A_k) - \frac{1}{2}\mathbf{p}_k B_k - W\right]\psi'' = 0, \tag{46}$$

где $B_k \equiv \varepsilon_{kmn}\partial_m A_n$, и комплексно-сопряженное уравнение для эрмитово-сопряженного ковектора-спинора. При переходе от математических переменных к физическим посредством соотношений (10, 11) новое условие стабильности (46) становится уравнением Шредингера-Паули

$$\left[i\hbar\partial_t - \frac{1}{2m}(-i\hbar\partial_k + \frac{q}{c}\tilde{A}_k)(-i\hbar\partial_k + \frac{q}{c}\tilde{A}_k) - \frac{q\hbar}{2mc}\mathbf{p}_k\tilde{B}_k - U\right]\Psi = 0, \tag{47}$$

где q – электрический заряд частицы, $\tilde{A}_k \equiv \frac{mc^2}{q}A_k$, $\tilde{B}_k \equiv \frac{mc^2}{q}B_k$ – потенциал и напряженность магнитного поля, $U \equiv mc^2W$ – некоторый скалярный потенциал. Таким образом, уравнение Паули, также как и уравнение Шредингера, строго выводится из чисто математических соображений: в присутствии внешнего векторного поля оно является физическим эквивалентом математического условия стабильности ассоциативных алгебр. Стоит заметить, что вид эмпирического слагаемого Паули $\frac{q\hbar}{2mc}\mathbf{p}_k\tilde{B}_k$ однажды был выведен теоретически из предположения о взаимодействии электрического заряда с микроструктурой кватернионного пространства, представленной несимметричным метрическим тензором [5].

3. Заключение

В данной работе приведена серия чисто математических выводов уравнений квантовой, классической и релятивистской механики, известных ранее как результат эмпирического исследования. При этом полученные уравнения точно следуют из базовых соотношений математики гиперкомплексных чисел, алгебры которых обладают высокой степенью «геометричности» на разных уровнях – как физическом (3D-пространственном) так и фрактальном (2D-спинорном). Тем не менее, данная работа представляет собой отнюдь не законченное, а лишь промежуточное исследование, позволяющее, кроме отмеченных фактов, выявить и ряд перспективных направлений. Среди приоритетных задач – построение логически связанной «математической» общей теории механики, включающей, помимо представленных здесь ее частей, также и релятивистскую механику частицы во внешних геометризованных полях (типа общей теории относительности). Не достаточно развитой представляется и предложенная выше модель атома водорода (типа модели Бора), возникающая как точное решение уравнений квантовой механики; в частности, пока не удовлетворительным представляется отсутствие распределения массы в окрестности квантовой орбитали. Значимыми направлениями развития теории также можно считать разработку методик выбора вектора «движения» 2D-ячейки (аналог импульса частицы) во внешнем пространстве, а также поиск уравнения стабильности алгебр (и соответствующего уравнения физики) для общего случая $SL(2,C)$-преобразования исходной диады. Все эти направления будут проанализированы в исследованиях вне рамок настоящего обзора.

Что же касается собственно обзора, то он продолжится в последующих публикациях, где будут представлены результаты поиска законов физики уже не во фрактальных сечениях алгебр комплексных чисел, а в их векторном представлении. В частности, будет показано, что серия алгебраических и дифференциальных соотношений, характерных для алгебры (би-)кватернионных чисел, математически эквивалентна базовым соотношениям теории относительности, а также уравнениям теорий безмассовых полей (Максвелла и Янга-Миллса).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ефремов А.П., Предгеометрическая структура ассоциативных алгебр и кватернионные пространства как математическая среда обитания физических законов // Пространство-время и фундаментальные взаимодействия, 2014. no .1. C.5–19.
2. Wheeler J. A. Pregeometry: motivations and prospects. In: A. R. Marlov (ed.), Quantum Theory and Gravitation (New York, Academic Press) 1980. pp. 1–11.
3. Sommerfeld A. Atombau und Spectrallilien (Friedr.,Vieweg und Sohn, Braunschweig) // 1951.
4. Bohm D. A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of «Hidden» Variables. I. // Phys. Rev. 1952. Vol. 85. pp. 166–179.
5. Yefremov A.P. Quaternionic Multiplication Rule as a Local Q-Metric. Lett. Nuovo. Cim. // 1983. Vol.37. no. 8, pp. 315–316.

Поступила в редакцию 06.09.2014

Ефремов Александр Петрович, профессор, д.ф.-м.н., директор Института гравитации и космологии РУДН, зав. кафедрой физики РУДН. Российская Федерация, 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6.
E-mail: a.yefremov@rudn.ru

A. P. Yefremov
Physical laws in hypercomplex medium: mechanics

Keywords: hypercomplex numbers; quantum, classical, relativistic mechanics.

PACS: 04.20 Gz.; 04.20 Gh

It is shown that spinor equations providing stability of six associative algebras with respect to a special transformation of an elementary surface cell (geometrically linked with the algebra's units) are mathematical analogs of the known equations of mechanics, and when written in physical units they precisely become equations of Schrodinger, Pauli, and Hamilton-Jacobi. Developed geometric approach induces appearance of natural models of protoparticle (wave function), particle (structured material point), and pregeometric image of mechanical action function. It also helps to find a new exact solution of Schrodinger equation for Bohr-type model of hydrogen atom, and to suggest an original scheme for constriction the theory of relativistic mechanics.

REFERENCES

1. Yefremov A.P. Pregeometric structure of associative algebras and quaternion spaces as a mathematical medium of physical laws, *Space, Time, and Fundamental Interactions (STFI)*, 2014, no.1, pp.5–19.
2. Wheeler J. A. Pregeometry: motivations and prospects. In: A. R. Marlov (ed.), *Quantum Theory and Gravitation* (New York, Academic Press) 1980, pp. 1–11.
3. Sommerfeld A. *Atombau und Spectrallilien* (Friedr.,Vieweg und Sohn, Braunschweig), 1951.
4. Bohm D. A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of «Hidden» Variables. I. *Phys. Rev.*, 1952, Vol. 85, pp. 166–179.
5. Yefremov A.P. Quaternionic Multiplication Rule as a Local Q-Metric. *Lett. Nuovo. Cim.*, 1983, Vol.37, no. 8. pp. 315–316.

Received 06.09.2014

Alexander P. Yefremov. Institute of Gravitation and Cosmology of Peoples Friendship University of Russia.
E-mail: a.yefremov@rudn.ru