

УДК 530.12; 530.51

*А. М. Баранов*<sup>1</sup>**МОДЕЛЬ ВНУТРЕННЕГО ИСТОЧНИКА РАЙСНЕРА-НОРДСТРЕМА**

Исследуется обобщение ранее найденного точного внутреннего решения уравнений Эйнштейна-Максвелла для статического шара, заполненного электрически заряженной идеальной жидкостью. Уравнения тяготения сведены к уравнению типа Штурма-Лиувилля, к которому применен метод Дарбу.

**Ключевые слова:** точные решения уравнений тяготения, решение Райснера-Нордстрема, метод Дарбу, теория катастроф.

**PACS:** 04.20.-q; 04.20.Jb; 05.45.-a

**Введение**

Проблема построения модели внутреннего статического шарообразного источника внешнего решения Райснера-Нордстрема для электрически заряженного гравитирующего уединенного тела возникла с момента появления самого решения [1]. С тех пор было много попыток построения такой модели. В частности, в работе [2] найдено точное внутреннее статическое решение для источника Райснера-Нордстрема как решение самосогласованной системы уравнений Эйнштейна-Максвелла для электрически заряженной паскалевой идеальной жидкости с параболическим распределением плотности массы нейтральной компоненты жидкости, но без конкретизации уравнения состояния. Обычно построение внутренних моделей гравитирующих источников связано с введением какого-либо уравнения состояния, единого для всего объема модели. Однако, к примеру, в работах [2]–[43] использовался подход без введения конкретного уравнения состояния.

Точное внутреннее статическое решение уравнений Эйнштейна-Максвелла для внутренней области гравитирующего шара, заполненного идеальной заряженной жидкостью, в предположении, что сумма плотности массы жидкости и плотности энергии электрического поля есть величина постоянная найдено в работе [27]. Полученное внутреннее решение сшивалось с внешним решением Райснера-Нордстрема.

Если в большинстве упомянутых выше работах поведение плотности массы нейтральной компоненты ограничивалась параболической (спадающей) зависимостью, то в работах ([25], [26], [27], [37]) найдено точное решение для внутреннего источника Райснера-Нордстрема с более общей зависимостью плотности массы – полиномом шестой степени.

Обобщение этой модели для измененного закона распределения плотности массы нейтральной жидкости было рассмотрено в [36]. Оказывается, что для другого поведения плотности массы и нового распределения плотности заряда, «растворенного» в жидкости, можно получить точное статическое сферически симметричное внутреннее решение. В любом случае внешнее гравитационное поле должно описываться решением Райснера-Нордстрема (см., например, [47]).

Далее решение [36] после обобщения с помощью подхода Дарбу [44] исследуется на предмет устойчивости методами теории катастроф (см. например, [16]).

В дальнейшем предполагается, что модель статическая, сферически симметричная, без вращения и излучения.

**1. Уравнения Эйнштейна-Максвелла**

Прежде чем обсуждать модель внутреннего источника Райснера-Нордстрема приведем основные моменты вычисления компонент тензора кривизны для заданной метрики и записи системы уравнений Эйнштейна-Максвелла.

Воспользуемся пространственной ограниченностью задачи конечным объемом звезды радиуса  $R_0$  и введем безразмерные координаты:  $\tau = t/R_0$  – временная,  $x = r/R_0$  – радиальная, а  $\theta$  и  $\varphi$  суть угловые переменные;  $0 \leq x \leq 1$ .

<sup>1</sup> E-mail: alex\_m\_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru  
©Баранов А.М.

Запишем теперь метрику, используя безразмерные переменные,

$$ds^2 = F(x)d\tau^2 + 2L(x)d\tau dx - x^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1.1)$$

где  $F(x)$  и  $L(x)$  – метрические функции  $g_{00}$  и  $g_{01}$ , соответственно, которые подлежат нахождению и зависят только от радиальной переменной; скорость света  $c$  и ньютоновская гравитационная постоянная  $G_N$  выбраны равными единице, определитель ковариантной метрики равен  $\det(g_{\alpha\beta}) \equiv g = -L^2x^4 \sin^2\theta$ .

Перепишем метрику (1.1) через базисные дифференциальные 1-формы

$$ds^2 = g_{(\alpha)(\beta)}\Theta^{(\alpha)}\Theta^{(\beta)} = 2\Theta^{(0)}\Theta^{(1)} - 2\Theta^{(3)}\Theta^{(2)}, \quad (1.2)$$

определив их как проекции координатных дифференциалов  $dx^\mu$  на базисную ортонормированную четверку векторов (тетрада)  $g_\mu^{(\alpha)}$ , задающих касательное четырехмерное пространство-время,  $\Theta^{(\alpha)} = g_\mu^{(\alpha)}dx^\mu$ , где греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3.

Следует отметить, что переход в касательное пространство-время физически означает выбор свободно падающей системы отсчета (локально-инерциальной). Поэтому в данном случае тетрадная метрика (или метрика касательного пространства-времени) может быть взята постоянной:

$$g_{(\alpha)(\beta)} = g^{(\alpha)(\beta)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

При этом базисные дифференциальные формы определим как

$$\Theta^{(0)} = \frac{1}{2}F(x)d\tau + L(x)dx; \quad \Theta^{(1)} = d\tau; \quad (1.4)$$

$$\Theta^{(2)} = \frac{x}{\sqrt{2}}(d\theta - i \sin\theta d\varphi); \quad \Theta^{(3)} = \frac{x}{\sqrt{2}}(d\theta + i \sin\theta d\varphi). \quad (1.5)$$

Первые уравнения структуры Картана

$$\mathbf{d}\Theta^{(\alpha)} = -\omega_{(\beta)}^{(\alpha)} \wedge \Theta^{(\beta)}, \quad (1.6)$$

где  $\mathbf{d}$  - внешний дифференциал, а операция  $\wedge$  обозначает внешнее произведение, позволяют найти отличные от нуля дифференциальные 1-формы связности  $\omega_{(\alpha)(\beta)}$

$$\omega_{(1)(0)} = \frac{1}{2}F'L^{-1}\Theta^{(1)}; \quad \omega_{(0)(2)} = (Lr)^{-1}\Theta^{(3)}; \quad \omega_{(0)(3)} = (Lr)^{-1}\Theta^{(2)}; \quad (1.7)$$

$$\omega_{(1)(2)} = -\frac{1}{2}F(Lr)^{-1}\Theta^{(3)}; \quad \omega_{(1)(3)} = -\frac{1}{2}F(Lr)^{-1}\Theta^{(2)}; \quad \omega_{(3)(2)} = \frac{1}{r\sqrt{2}}\cot\theta(\Theta^{(2)} - \Theta^{(3)}), \quad (1.8)$$

где штрихом обозначена производная по пространственной переменной  $x$ .

Воспользовавшись постоянством тетрадной метрики ( $\mathbf{d}g_{(\alpha)(\beta)} = 0$ ), получим, что 1-формы связности обладают свойством антисимметричности  $\omega_{(\alpha)(\beta)} = -\omega_{(\beta)(\alpha)}$ ,

Вторые уравнения структуры Картана, задающие уравнения на нахождение тетрадных компонент тензора кривизны

$$\Omega_{(\beta)}^{(\alpha)} = \frac{1}{2}R_{(\beta)(\gamma)(\delta)}^{(\alpha)}\Theta^{(\gamma)} \wedge \Theta^{(\delta)} = \mathbf{d}\omega_{(\beta)}^{(\alpha)} + \omega_{(\sigma)}^{(\alpha)} \wedge \omega_{(\beta)}^{(\sigma)}, \quad (1.9)$$

где  $\Omega_{(\alpha)(\beta)} = -\Omega_{(\beta)(\alpha)}$  - 2-форма кривизны, позволяют получить отличные от нуля компоненты тензора Римана-Кристоффеля  $R_{(\beta)(\gamma)(\delta)}^{(\alpha)}$  :

$$R_{(1)(0)(1)(0)} = -\frac{F''}{2L^2} + \frac{F'L'}{2L^3}; \quad R_{(1)(2)(1)(2)} = -\frac{F^2L'}{4rL^3}; \quad R_{(0)(2)(0)(3)} = -\frac{L'}{rL^3}; \quad (1.10)$$

$$R_{(0)(2)(1)(3)} = \frac{FL'}{2rL^3} - \frac{F'}{2rL^2}; \quad R_{(3)(2)(3)(2)} = \frac{1}{r^2} - \frac{F}{r^2L^2}; \quad R_{(0)(3)(1)(2)} = R_{(0)(2)(1)(3)}. \quad (1.11)$$

Из определения тензора Риччи  $R_{(\alpha)(\beta)} = R_{(\alpha)(\beta)(\gamma)}^{(\gamma)} = g^{(\gamma)(\sigma)} R_{(\sigma)(\alpha)(\beta)(\gamma)}$  находим его ненулевые тетрадные компоненты:

$$R_{(0)(0)} = -\frac{2}{rL^2} \cdot \frac{L'}{L}; \quad R_{(0)(1)} = \frac{F}{rL^2} \cdot \frac{L'}{L} - \frac{F''}{2L^2} + \frac{F'}{2L^2} \cdot \frac{L'}{L} - \frac{F'}{rL^2}; \quad (1.12)$$

$$R_{(1)(1)} = -\frac{F^2}{2rL^2} \cdot \frac{L'}{L}; \quad R_{(2)(3)} = -\frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{F}{L^2} - \frac{rF'}{L^2} + \frac{rF}{L^2} \cdot \frac{L'}{L} \right), \quad (1.13)$$

и после введения скалярной кривизны  $R_{(\alpha)}^{(\alpha)} = R$  записываем уравнения Эйнштейна

$$G_{(\alpha)(\beta)} = R_{(\alpha)(\beta)} - \frac{1}{2} g_{(\alpha)(\beta)} R = -\kappa T_{(\alpha)(\beta)}, \quad (1.14)$$

где  $G_{(\alpha)(\beta)}$  - тензор Эйнштейна, а  $\kappa = 8\pi$  в выбранной нами системе единиц есть постоянная Эйнштейна. Тензор энергии-импульса материи  $T_{(\alpha)(\beta)}$  взят здесь в виде прямой суммы тензора энергии импульса идеальной паскалевой жидкости нейтральной материи  $T_{(\alpha)(\beta)}^{fluid}$  и тензора энергии-импульса электромагнитного поля  $T_{(\alpha)(\beta)}^{el-mag}$ :

$$T_{(\alpha)(\beta)} = T_{(\alpha)(\beta)}^{fluid} + T_{(\alpha)(\beta)}^{el-mag}, \quad (1.15)$$

где

$$T_{(\alpha)(\beta)}^{fluid} = (\mu + p)u_{(\alpha)}u_{(\beta)} - pg_{(\alpha)(\beta)} \equiv \mu u_{(\alpha)}u_{(\beta)} + pb_{(\alpha)(\beta)}; \quad (1.16)$$

$$T_{(\alpha)(\beta)}^{el-mag} = \frac{1}{4\pi} \left( -F_{(\alpha)(\sigma)}F_{(\beta)}^{(\sigma)} + \frac{1}{4}g_{(\alpha)(\beta)}F_{(\sigma)(\tau)}F^{(\sigma)(\tau)} \right); \quad (1.17)$$

$\mu(r)$  - плотность массы-энергии;  $p(r)$  - давление идеальной паскалевой жидкости;  $u_{(\alpha)} = g_{(\alpha)\mu} \frac{dx^\mu}{ds}$  - 4-скорость ( $u_{(\alpha)}u^{(\alpha)} = 1$ );  $b_{(\alpha)(\beta)} = u_{(\alpha)}u_{(\beta)} - g_{(\alpha)(\beta)}$  - метрический тензор 3-пространства, ортогонального времени (4-скорости),  $b_{(\alpha)(\beta)}u^{(\alpha)} = 0$ ;  $F_{(\alpha)(\beta)}$  - тензор электромагнитного поля,  $F_{(\alpha)(\beta)} = -F_{(\beta)(\alpha)}$ . В силу сферической симметрии задачи все функции зависят только от радиальной переменной.

Перепишем уравнения Эйнштейна (1.14) в виде, позволяющем учитывать в дальнейшем выражения (1.15)-(1.17), принимая во внимание связь между следом тензора энергии-импульса ( $T = T_{(\alpha)}^{(\alpha)}$ ) и скалярной кривизной,  $R = -\kappa T$ ,

$$R_{(\alpha)(\beta)} = -\kappa \left( T_{(\alpha)(\beta)} - \frac{1}{2}g_{(\alpha)(\beta)}T \right). \quad (1.18)$$

В общем случае искривленного пространства-времени вторая пара уравнений Максвелла записывается как (см., например, [3])

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{;\nu} = -4\pi j^\mu, \quad (1.19)$$

где точкой с запятой обозначена ковариантная производная, а  $j^\mu$  - плотность электрического тока. В рассматриваемом сферически-симметричном статическом случае отлична от нуля лишь одна компонента тензора электромагнитного поля:  $F_{01} = -A_{0,1} = -A'_0$  и система уравнений Максвелла (1.19) сводится к одному уравнению

$$\frac{1}{x^2 L} (x^2 L F^{01})' = -4\pi R_0 j^0. \quad (1.20)$$

Статика позволяет ввести неподвижную сопутствующую систему отсчета, задаваемую 4-вектором скорости  $u^\mu = \delta_0^\mu / \sqrt{g_{00}} \equiv \delta_0^\mu / \sqrt{F(x)}$ , и тогда физически наблюдаемые величины, соответственно, запишутся в виде

$$\mu_{phys} = T_{\mu\nu}^{fluid} u^\mu u^\nu = \mu(x); \quad \rho_{phys} \equiv \rho(x) = j^\mu u_\mu = j^0 \sqrt{g_{00}} \equiv j^0 \sqrt{F(x)}; \quad (1.21)$$

$$E_\nu^{phys} = -F_{\nu\mu} u^\mu = -F_{\nu 0} \frac{\delta_0^\mu}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{F_{0\nu}}{\sqrt{F(x)}}; \quad E_{phys} \equiv E_1 = \frac{F_{01}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{E}{\sqrt{F(x)}}; \quad (1.22)$$

$$W_{el} = T_{\mu\nu}^{el-mag} u^\mu u^\nu = \frac{E^2}{8\pi L^2}, \quad (1.23)$$

где  $\mu_{phys}$  – наблюдаемая плотность массы-энергии,  $\rho_{phys}$  – наблюдаемая плотность электрического заряда,  $E_{phys}^p$  – физически наблюдаемый 3-вектор напряженности электрического поля,  $E_{phys} \equiv E_1$  – радиальная компонента наблюдаемой напряженности электрического поля и  $W_{el}$  – наблюдаемая плотность энергии электрического поля.

С учетом (1.21)-(1.22) уравнение Максвелла (1.20) переписывается в окончательном виде, пригодном для дальнейшего применения:

$$\left( \frac{x^2 F_{01}}{L} \right)' = 4\pi \rho(x) R_0 \frac{x^2}{\sqrt{\varepsilon(x)}}, \quad (1.24)$$

где введена новая функция  $\varepsilon(x) = F/L^2$ .

Уравнение неразрывности для вектора плотности 4-тока с учетом статики тождественно выполняется,  $j^\alpha_{;\alpha} = j^\alpha_{,\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\chi} j^\beta = j^\alpha_{,\alpha} + (\ln \sqrt{-g})_{,\alpha} j^\alpha = 0$  (закон сохранения электрического заряда).

Прежде чем перейти к решению системы уравнений Эйнштейна-Максвелла, приведем запись результирующего тензора энергии-импульса в тетрадных компонентах:

$$T_{(0)(0)} = \frac{1}{F}(p + \mu); \quad T_{(1)(1)} = \frac{1}{4}F(p + \mu); \quad (1.25)$$

$$T_{(0)(1)} = \frac{1}{2}(\mu - p) + W_{el}; \quad T_{(2)(3)} = T_{(3)(2)} = p + W_{el}. \quad (1.26)$$

## 2. Преобразование уравнений Эйнштейна-Максвелла

Система уравнений Эйнштейна с учетом вышеприведенных выражений может быть сведена к трем уравнениям

$$\frac{\varepsilon}{x}(\ln L)' = \frac{\chi}{2}(\mu + p); \quad (2.1)$$

$$\frac{\varepsilon}{x}(\ln L)' - \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{F''}{F} + \frac{2}{x}(\ln F)' - (\ln F)'(\ln L)' \right) = -\chi(p + W_{el}); \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{x^2}(1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{x} \left( \ln \frac{F}{L} \right)' = -\chi \left( \frac{1}{2}(\mu - p) + W_{el} \right), \quad (2.3)$$

где для согласования размерности в обеих частях гравитационных уравнений введена новая постоянная  $\chi = \varkappa R_0^2 = 8\pi R_0^2$ , позволяющая образовать, в частности, безразмерную величину  $\chi\mu_0$ .

Для рассматриваемой внутренней области функцию  $\varepsilon(x)$  можно представить как

$$\varepsilon(x) = \frac{F}{L^2} = 1 - \Phi(x), \quad (2.4)$$

где функция  $\Phi(x)$  есть аналог ньютоновского гравитационного потенциала внутри жидкого заряженного шара.

Далее, исключая плотность массы-энергии и давление, получаем линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами на функцию  $G(x)$ :

$$G'' + f(x)G' + g(x)G = 0, \quad (2.5)$$

где  $G = \sqrt{F}$ ,  $f(x) = (\ln \varphi)'$ ,  $\varphi(x) = \sqrt{\varepsilon}/x$ , а коэффициент  $g(x)$  равен

$$g(x) = \frac{2(1 - \varepsilon) + x\varepsilon'}{2x^2\varepsilon} - \frac{2\chi}{\varepsilon}W_{el}. \quad (2.6)$$

Видно, что влияние электромагнитного поля явно проявляется через функции  $\varepsilon(x)$  и  $W_{el}(x)$ , входящие в приведенное здесь гравитационное уравнение (2.5).

Если перейти теперь к новой переменной  $\zeta = \zeta(x)$  как

$$d\zeta = \frac{x dx}{\sqrt{\varepsilon(x)}}, \quad (2.7)$$

то (2.5) трансформируется в уравнение для нелинейного пространственного осциллятора

$$G''_{\zeta\zeta} + \Omega^2(\zeta(x))G = 0, \quad (2.8)$$

относительно переменной  $\zeta$ . Так как выражение (2.7), вообще говоря, не может быть проинтегрировано в элементарных функциях, то квадрат «частоты»  $\Omega^2$  проще использовать при дальнейших вычислениях в следующей записи:

$$\Omega^2 = -\frac{d}{dy} \left( \frac{\Phi}{y} \right) - \frac{2\chi}{y} W_{el}, \quad (2.9)$$

где  $y = x^2$ , а функция  $\Phi$  выражается из гравитационных уравнений через функцию  $\varepsilon$  как

$$\Phi = 1 - \varepsilon = \frac{\chi}{x} \int (\mu(x) + W_{el}(x))x^2 dx = \frac{\chi}{2\sqrt{y}} \int (\mu(y) + W_{el}(y))\sqrt{y} dy. \quad (2.10)$$

В отличие от работы [7], где плотность массы нейтральной жидкости имеет следующий закон распределения внутри шара:

$$\mu(y) = \mu_0(1 - by), \quad (2.11)$$

в работе [36] рассмотрено поведение системы для более общего распределения плотности массы нейтрального вещества

$$\mu(y) = \mu_0(1 - by + dy^2 - fy^3 + gy^4 - hy^5), \quad (2.12)$$

где  $b, d, f, g, h$  – постоянные,  $\mu_0$  – центральная плотность массы.

При этом соответствующая плотность электрического заряда имеет вид [36]:

$$\rho(y) = \rho_0(1 - ay + cy^2)\sqrt{\varepsilon(y)}, \quad (2.13)$$

где  $\rho_0$  – центральная плотность электрического заряда.

Учитывая определение плотности энергии электрического поля (1.23), из уравнения (1.24) нетрудно найти

$$W_{el} = \frac{1}{2} \frac{\pi R_0^2}{y^2} \left( \int \frac{\rho(y)\sqrt{y} dy}{\sqrt{\varepsilon(y)}} \right)^2 \quad (2.14)$$

или, принимая во внимание (2.13),

$$W_{el} = \alpha_0 \mu_0 \left( \frac{2}{9} - \frac{4}{15} ay + \frac{4}{21} cy^2 + \frac{2}{25} a^2 y^2 - \frac{4}{35} acy^3 + \frac{2}{49} c^2 y^4 \right) y \quad (2.15)$$

где

$$\alpha_0 \equiv \pi R_0^2 \rho_0^2 / \mu_0. \quad (2.16)$$

При вычислении квадрата функции  $\Omega$  из (2.9) и требовании ее постоянства ограничимся здесь выбором параметра  $f = 0$  (по сравнению с работой [36]) в выражении для плотности нейтрального вещества  $\mu$  в (2.12).

Условие  $\Omega^2 \equiv \Omega_0^2 = const > 0$  позволяет легко записать решение уравнения (2.8) в виде гармонических функций, например,

$$G = G_0 \cos(\Omega_0 \zeta(x) + \varphi) \quad (2.17)$$

со сдвигом фазы  $\varphi$  и получить ряд соотношений и ограничений между параметрами  $a, b, c$  и  $h, g, d$ :

$$b > \frac{22}{9} \alpha_0; \quad d = \frac{32}{15} \alpha_0 a; \quad g = -\frac{39}{125} \alpha_0 a^3; \quad h = \frac{279}{6250} \alpha_0 a^4; \quad c = -\frac{21}{50} a^2. \quad (2.18)$$

Таким образом, плотности масс и электрического заряда соответственно принимают вид:

$$\mu(y) = \mu_0 \left( 1 - by + \alpha_0 a \left( \frac{32}{15} y^2 - \frac{39}{125} a^2 y^4 - \frac{279}{6250} a^3 y^5 \right) \right); \quad (2.19)$$

$$\rho(y) = \rho_0 \left( 1 - ay - \frac{21}{50} a^2 y^2 \right) \sqrt{\varepsilon(y)}, \quad (2.20)$$

а плотность энергии электрического поля переписывается как

$$W_{el} = \alpha_0 \mu_0 \left( \frac{2}{9} - \frac{4}{15} ay + \frac{6}{125} a^3 y^3 + \frac{9}{1250} a^4 y^4 \right) y. \quad (2.21)$$

### 3. Метод Дарбу и его применение

Перейдем теперь к обобщению модифицированного решения с помощью метода Дарбу [44], примененного в работах ([16], [22]- [23], [24], [45]- [47]).

Суть этого метода для уравнений типа уравнения Штурма-Лиувилля в применении к данной задаче состоит в следующем. Без ограничения общности перепишем общее решение (2.17) уравнения (2.8) в виде

$$G_{tot.}(\zeta) \equiv G(\zeta) = A \sin(\Omega_0 \zeta + \varphi_0) \quad (3.1)$$

где  $\varphi_0$  - новый сдвиг фазы.

Возьмем одно из частных решений уравнения (2.8)

$$G_{partial}(\zeta) \equiv \tilde{G}(\zeta) = \cos(\beta_0 \zeta), \quad (3.2)$$

где  $\beta_0$  - некоторая положительная постоянная. Тогда уравнение

$$G''_{\zeta\zeta} + \Omega^2(\zeta) G \equiv G''_{\zeta\zeta} + [\Omega_0^2 + W(\zeta)] G = 0, \quad (3.3)$$

обобщающее уравнение (2.8), имеет следующее общее решение:

$$G_{total}(\zeta) = G'_\zeta - G \cdot (\ln \tilde{G})'_\zeta, \quad (3.4)$$

при этом функция  $W(\zeta)$  обязана быть равной

$$W(\zeta) = 2 \cdot \ln(\tilde{G})''_{\zeta\zeta} = -2\beta_0^2 \sec^2(\beta_0 \zeta). \quad (3.5)$$

Применим описанный здесь метод Дарбу к решению [36] с выше приведенными допущениями по поводу коэффициента  $f$  в выражении для плотности массы. Ясно, что для нового решения получим и новое результирующее распределение плотности энергии, как сумму плотностей энергии нейтральной и электрически заряженной компонент жидкости, заполняющей шар радиуса  $R_0$ .

Решение уравнения

$$G''_{\zeta\zeta} + [\Omega_0^2 - 2\beta_0^2 \sec^2(\beta_0 \zeta)] G = 0, \quad (3.6)$$

согласно процедуре Дарбу можно сразу записать в виде

$$G(\zeta) = A\Omega_0 \cos(\Omega_0 \zeta + \varphi_0) + A\beta_0 \cdot tg(\beta_0 \zeta) \cdot \sin(\Omega_0 \zeta + \varphi_0) \quad (3.7)$$

где  $A$  и  $\beta_0$  - постоянные, которые находятся из сшивки со внешним решением Райснера-Нордстрема.

Возведение в квадрат выражения (3.7) позволяет получить метрический коэффициент  $g_{00} = F = G^2$ . Метрический коэффициент  $g_{01} = L$  легко находится, если известна новая функция  $\Phi$ , так как  $L = \sqrt{F/\varepsilon}$ , а  $\varepsilon = 1 - \Phi$ . Поэтому перейдем к нахождению новой функции  $\Phi$ .

Отвечающая решению (3.7) функция  $\Phi(y)$  записывается как квадратура соотношения (2.9):

$$\Phi(y) = -y \left( \int \left( \Omega_0^2 - 2\beta_0^2 \sec^2(\beta_0 \zeta(y)) + \frac{2\chi}{y} W_{el}(y) \right) dy \right) \quad (3.8)$$

или, в данном случае,

$$\Phi(y) = \Phi_0(y) + 2y\beta_0^2 \int \sec^2(\beta_0 \zeta(y)) dy, \quad (3.9)$$

где

$$\Phi_0(y) = Cy - \left( \Omega_0^2 + \chi\alpha_0\mu_0 \frac{4}{9} \right) y^2 + \left( +\frac{4}{15} ay - \frac{3}{125} a^3 y^3 - \frac{9}{3125} a^4 y^4 \right) y^2, \quad (3.10)$$

постоянная  $C$  определяет плотность энергии в центре шара.

Исследования поведения гравитационного поля вблизи центра статического неоднородного распределения плотности энергии в работах ([49] - [53]) показывают, что в малой окрестности центра гравитирующего шара плотность энергии можно считать однородной, а само гравитационное поле относящемуся к типу 0 (конформно-плоскому типу) с точки зрения алгебраической классификации Петрова ([54]). При этом введенная выше постоянная  $C = \chi\mu_0/3 \equiv \chi w_0/3$ .

С другой стороны, для функции  $\Phi$  справедливо соотношение (2.10), где результирующая плотность энергии нейтральной и заряженной жидкости есть

$$w(y) = \mu(y) + W_{el}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} (\sqrt{y}\Phi(y))' = \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} (x\Phi(x)). \quad (3.11)$$

Тогда, с учетом (3.9) и (3.10) получаем

$$\begin{aligned} \chi w(y) = \chi w_0 - 5\Omega_0^2 y - \chi\alpha_0\mu_0 \left( \frac{20}{9} - \frac{28}{15}ay + \frac{33}{125}a^3y^3 + \frac{117}{3125}a^4y^4 \right) y + \\ 4\beta_0^2 y \sec^2(\beta_0\zeta(y)) + 6\beta_0^2 \int \sec^2(\beta_0\zeta(y)) dy. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Примененная выше процедура Дарбу меняет и переменную  $\zeta(y)$ , которая теперь определяется как следующая квадратура:

$$\begin{aligned} \zeta(y) = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{1 - \Phi(y)}} = \\ \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{1 - \Phi_0(y) - 2\beta_0^2 y \int \sec^2(\beta_0 \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{1 - \Phi_0(y) - 2\beta_0^2 y \int \sec^2(\beta_0 \frac{1}{2} \int \dots}}}}}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Сшивка с внешним решением Райснера Нордстрема позволяет получить, что функция  $\Phi(y)$  на поверхности заряженного жидкого шара равна компактности

$$\Phi(y=1) = \eta^* = \eta - \frac{Q^2}{R^2} = \frac{2m}{R} - \frac{Q^2}{R^2} \leq 1 \quad (3.14)$$

где  $\eta^*$  - эффективная компактность,  $m$  - интегральная масса звезды,  $Q$  - интегральный электрический заряд звезды,  $\eta$  - «шварцшильдовская» компактность. Насколько велика или мала средняя плотность массы астрофизического объекта характеризуется параметром компактности  $\eta$ . Возрастание величины этого параметра означает увеличение средней плотности объекта.

#### 4. Поведение результирующей плотности энергии и устойчивость заряженного шара

Перейдем к рассмотрению устойчивости поведения результирующей плотности энергии относительно изменения параметров. Рассмотрим сведем к стандартной задаче из теории катастроф [16]. Перепишем плотность результирующей энергии (3.12) для дальнейшего исследования в безразмерном виде:

$$\tilde{w}(y) \equiv \frac{w(y)}{w_0} = 1 - \beta y + \beta_1 y^2 - \beta_2 y^4 - \beta_3 y^5 + \frac{4y}{\chi w_0} \cdot Y(y) + \frac{6}{\chi w_0} \int Y(y) dy. \quad (4.1)$$

где  $\beta = 5(\Omega_0^2/\chi w_0 + 4\alpha_0/9)$ ;  $\beta_1 = 28\alpha_0 a/15$ ;  $\beta_2 = 33\alpha_0 a^3/125$ ;  $\beta_3 = 117\alpha_0 a^4/3125$ ;

$$Y(y) = \beta_0^2 \sec^2(\beta_0\zeta(y)) \equiv \beta_0^2 \sec^2(\nu(y)), \quad (4.2)$$

$\nu(y) = \beta_0\zeta(y)$  и  $\tilde{w}(y)$  - относительная плотность энергии, равная единице в центре шара,  $\tilde{w}(y=0) = 1$ . Поэтому вблизи центра  $\Delta = 1 - \tilde{w}$  есть малая величина, близкая к нулю.

Далее рассмотрим малую окрестность вблизи центра шара, где  $y \ll 1$  и для  $Y(y)$  достаточно будет ограничиться членами разложения в ряд не выше  $y^2$ , чтобы в  $\tilde{w}(y)$  можно было оставить члены степени не выше кубической.

Для этого воспользуемся тем, что в центре  $\zeta(0) = 0$  и можно в малой окрестности центра шара записать,

$$\zeta(y) \approx \frac{1}{2} \int (1 + \frac{1}{2}\Phi(y)) dy \quad (4.3)$$

и, с учетом (3.9)-(3.10),

$$Y(y) \approx \beta_0^2(1 + \nu(y)^2) + O(\nu^4) = \beta_0^2(1 + \frac{\beta_0^2}{4}y^2) + O(y^4). \quad (4.4)$$

Возвращаясь к (4.1), перепишем в требуемом приближении

$$\tilde{w}(y) = 1 + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 y^3 + O(y^4), \quad (4.5)$$

где

$$\alpha_1 = (10\beta_0^2 - 5(\Omega_0^2 + 4\pi\chi w_0/9)) / (\chi w_0); \quad \alpha_2 = \beta_1 = 28\alpha_0 a / 15; \quad \alpha_3 = (3/2)\beta_0^4 / (\chi w_0). \quad (4.6)$$

Ограничиваясь кубическим полиномом, представим (4.5) в виде кубического уравнения

$$y^3 + Ay^2 + By + C = 0, \quad (4.7)$$

где  $A = \alpha_2/\alpha_3$ ;  $B = \alpha_1/\alpha_3$ ;  $C = \Delta/\alpha_3$ .

Это уравнение для дальнейшего исследования с помощью замены  $y = z - A/3$  может быть преобразовано к неполному виду

$$z^3 + pz + q = 0, \quad (4.8)$$

где  $p = -A^2/3 + B$ ;  $q = 2(A/3)^3 - AB/3 + C$  или

$$p = \gamma_1(b_C - b_1); \quad q = \gamma_2 \sigma A_0, \quad (4.9)$$

где постоянные  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  удовлетворяют равенству

$$\gamma_1^3 = \gamma_2^2 \quad (4.10)$$

и соответственно равны:  $\gamma_1 = 1/\beta_0^6$ ,  $\gamma_2 = 1/\beta_0^9$ ;  $\sigma = \chi w_0 \alpha_0 a$  – безразмерная величина;

$$b_C = 20/3; \quad b_1 = \frac{1568}{2025} \left( \frac{\sigma}{\beta_0} \right)^2 + \frac{10}{3} \left( \Omega_0^2 + \frac{4\sigma}{9a} \right); \quad (4.11)$$

$$A_0 = \frac{351232}{2460375} \frac{\sigma^2}{\beta_0^3} - \frac{112}{81} \beta_0 \left( 2\beta_0^2 - \Omega_0^2 - \frac{4\sigma}{9a} + \frac{\beta_0^5 \Delta}{\alpha_0 a} \right). \quad (4.12)$$

Приравнивая дискриминант кубического уравнения (4.8) нулю

$$Q \equiv \left( \frac{p}{3} \right)^3 + \left( \frac{q}{2} \right)^2 = -\gamma_1^3 \frac{1}{27} (b_1 - b_C)^3 + \gamma_2^2 \frac{A_0^2}{4} \sigma^2 = 0, \quad (4.13)$$

мы, с одной стороны получаем в переменных  $(p, q)$  кривую Нееля (полукубическую параболу) или проекцию на плоскость управляющих параметров – кривую **катастрофы сборки** [16], изображенную на Рис.1.

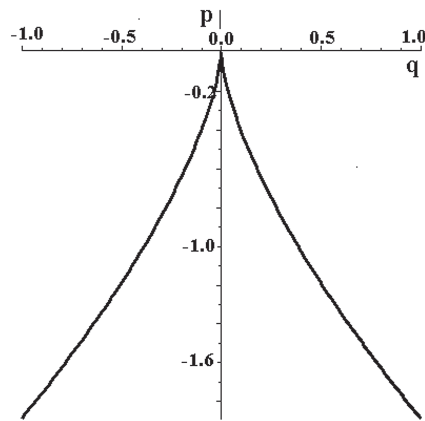


Рис. 1. Проекция на плоскость управляющих параметров  $(p, q)$



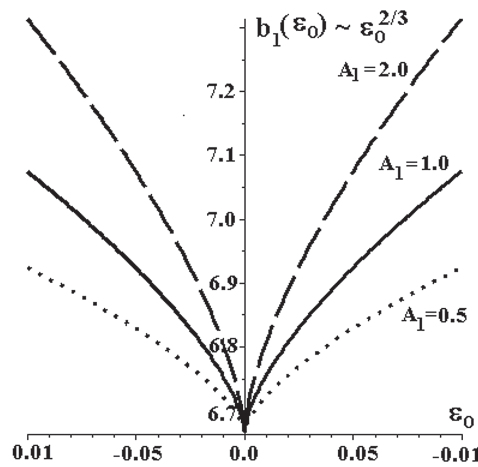
С другой стороны, нас интересует поведение системы вблизи критических точек. Поэтому приближение параметра  $b_1$  к значению  $b_C$  приводит к уменьшению разности  $(b_1 - b_C)$  до нуля, что, в свою очередь, заставляет произведение  $\sigma A_0$  стремиться к нулю согласно уравнению (4.13) при учете равенства (4.10).

Другими словами, рассматривая малые отклонения параметра  $b_1$  от  $b_C$  ( $|b_1 - b_C| \ll 1$ ) представим  $\sigma A_0$  как  $\sigma A_0 = A_1 \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0$  – малая безразмерная величина, а  $A_1$  – масштабный множитель, что означает явное выделение малого параметра для дальнейшего анализа.

Решая уравнение (4.13) относительно  $b_1$ , находим кривую чувствительности от управляющего параметра  $\varepsilon_0$ , который играет роль «несовершенства» системы, говоря языком механики конструкций, и нарушает симметрию.

$$b_1(\varepsilon_0) = 3 \cdot 2^{-2/3} A_1^{2/3} \varepsilon_0^{2/3} + b_C. \quad (4.14)$$

Соответствующий график поведения кривой чувствительности к параметру «несовершенства» системы, приведен на Рис.2 для трех значений параметра  $A_1 = 0, 5; 1, 0; 2, 0$ . При этом  $b_C$  – критическое значение «нагрузки»  $b_1$ , прилагаемой к системе и на графике равной значению  $20/3 \approx 6,66$  в точке равновесия  $\varepsilon_0 = 0$ .



**Рис. 2.** График кривой чувствительности к несовершенствам «нагрузки»  $b_1$  по закону  $2/3$  для трех значений параметра  $A_1 = 2, 0; 1, 0; 0, 5$ ; критическая «нагрузка»  $b_C = 20/3$

В результате получаем показатель чувствительности к несовершенству, равный  $2/3$ , который показывает степенную зависимость «разрушающей» нагрузки от параметра несовершенства,  $b_1 - b_C \propto \varepsilon_0^{2/3}$ , и совпадает с законом для пологой арки (см., например, [16]).

Вернемся к исследованию критической точки для плотности энергии (4.5). Эта точка и является критической точкой устойчивости статической звезды, так как в ней резко меняется поведение градиента плотности массы.

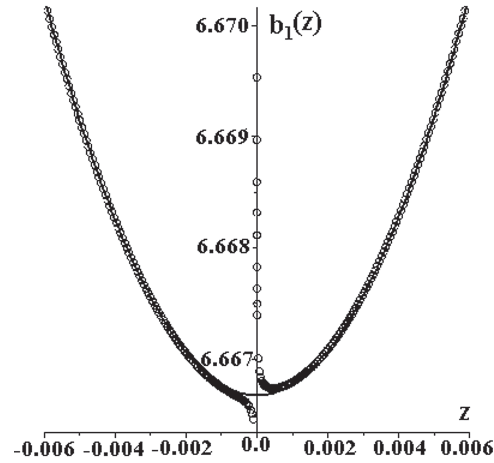
Уравнение (4.8) с учетом выше приведенных замечаний представим в виде

$$z^3 + \gamma_1(b_C - b_1)z + \gamma_2 A_1 \varepsilon_0 = 0. \quad (4.15)$$

Из этого соотношения, принимая во внимание равенство (4.10), выразим  $b_1$  как функцию переменной  $z$ :

$$b_1(z) = \frac{z^2}{\gamma_1} + \frac{\sqrt{\gamma_1} A_1}{z} \varepsilon_0 + b_C. \quad (4.16)$$

График, описывающий поведение «нагрузки»  $b_1$  в малой окрестности точки  $z = 0$ , изображен на Рис.3. На нем для большей математической общности рассмотрение продолжено и на отрицательные значения переменной  $z$ . Параболическая кривая, соответствующая  $\varepsilon_0$ , отвечает устойчивому равновесному состоянию. Здесь мы сталкиваемся с примером поведения физической системы для устойчиво симметричной точки ветвления, описываемой катастрофой сборки [16]. В частности, кривая, «отлипающая» от параболы для положительных значений  $z$ , близких к нулю ( $z < 0,0005$ ), и резко «уходящая» в область бесконечных значений  $b_1(z)$ , отвечает неустойчивому поведению системы.

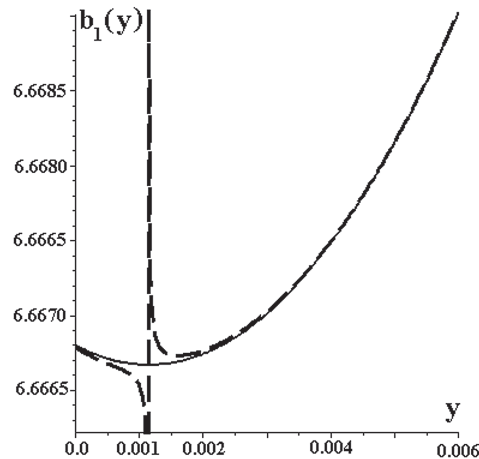


**Рис. 3.** График поведения системы с устойчиво симметричной точкой ветвления при значениях параметров  $A_1 = 2, 0$  и  $\gamma_1 = 0, 01$  для равновесной параболической кривой с  $\varepsilon_0 = 0$  (сплошная линия) и кривой с  $\varepsilon_0 = 10^{-7}$  (изображено кружками)

На самом деле на Рис.2 изображен смещенный относительно центра гравитирующего шара график поведения системы, так как квадрат относительного координатного расстояния от центра  $y$  связан с переменной  $z$  как  $z = y + A$ , где параметр  $A$  из (4.7) равен

$$A = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{56}{45} \gamma_1^{(2/3)} \sigma. \quad (4.17)$$

На Рис.4 изображен соответствующий график зависимости «нагрузки»  $b_1$  от переменной  $y$  для конкретного значения параметра  $A$ , определяющего смещение точки катастрофы от центра шара (точки  $y = 0$ ). Совершенно ясно, что при  $A \rightarrow 0$   $z \rightarrow y$  и график фактически совпадает с графиком на Рис.3 для положительных значений переменной  $z$ .



**Рис. 4.** График поведения системы с устойчиво симметричной точкой ветвления при значениях параметров  $A_1 = 2, 0$ ,  $A = 0.00115$ ,  $\gamma_1 = 0, 01$  для равновесной параболической кривой с  $\varepsilon_0 = 0$  (сплошная линия) и кривой с  $\varepsilon_0 = 10^{-7}$  (изображено пунктирной линией)

## 5. Заключение

В заключение необходимо отметить, что, применяя метод Дарбу к ранее полученному в [36] точному статическому внутреннему решению уравнений Эйнштейна-Максвелла, найдено точное решение этих уравнений, обобщающее исходное. При этом уравнения тяготения были предварительно сведены к уравнению типа Штурма-Лиувилля.

Обобщенное внутреннее решение описывает гравитационное поле не вращающегося электрически заряженного астрофизического объекта, заполненного идеальной паскалевой заряженной жидкостью с законом распределения результирующей плотности энергии, обобщающим предыдущее из [36].

Найденное решение может быть использовано для моделирования компактных уединенных астрофизических объектов, несущих электрический заряд. Другой особенностью нового решения является то, что вблизи центра звезды поведение результирующей плотности энергии описывается катастрофой сборки, то есть при некоторых значениях входящих в выражение для плотности массы параметров устойчивость звезды нарушается.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крамер Д., Штефани Х., Мак-Каллум М., Херльт Э. Точные решения уравнений Эйнштейна. М.: Энергоиздат, 1982. 416 с.
2. Баранов А.М. Внутреннее сферически-симметричное статическое решение уравнений Эйнштейна-Максвелла /Редколлег.журн. «Известия вузов (Физика)», 1973. 9 с. Деп в ВИНТИ СССР 05.06.1973, № 6729-73.
3. Баранов А.М. Сферически симметричное статическое решение уравнений Эйнштейна для идеальной жидкости /УДН им.П.Лумумбы. Москва, 1976. 7 с. Деп. в ВИНТИ СССР 13.07.1976, № 2626-76.
4. Баранов А.М., Власенко Ю.Н., Паклин Н.Н. Исследование статического решения с параболическим законом распределения плотности массы для релятивистского жидкого шара. 1.Модельное представление. Физические критерии /КрасГУ. Красноярск, 1988. 22 с. Деп. в ВИНТИ СССР 14.11.1988, № 8041-B88.
5. Баранов А.М., Власенко Ю.Н., Паклин Н.Н. Исследование статического решения с параболическим законом распределения плотности массы для релятивистского жидкого шара. 2.Алгебраическая классификация. Топологические свойства /КрасГУ. Красноярск, 1988. 16 с. Деп. в ВИНТИ СССР 20.09.1988, № 7036-B88.
6. Баранов А.М. Внутреннее статическое решение для звезды с электрическим зарядом: осцилляторное описание //Математические модели и методы их исследования: труды Международной конференции. ИВМ СО РАН. Красноярск, 2001. Т.2. С.65–67.
7. Баранов А.М. Осцилляторный подход к описанию статической звезды с нейтральной и заряженной идеальной жидкостью // Вестник Красноярского государственного университета. Физико-математические науки. 2002. № 1. С.5–12.
8. Baranov A.M. Generalization of a known static star solution // Теоретич. и эксперимент. пробл. общей теории относит. и гравитации: тез. докл. 11-й Международн. конфер. ТГУ. Томск, 2002. С.10–11.
9. Baranov A.M. Interior Stellar model with Electric Charge as an Oscillator // Gravitation & Cosmology. 2002. V.8. Suppl.II. P.10–11.
10. Baranov A.M. Interior Static Stellar Model with Electric Charge as an Oscillator // Los-Alamos. URL: <http://ArXiv.org/gr-qc/1201.4429>.
11. Baranov A.M. On static interior star model filled with neutral and charged fluids // On recent developments in theoret. & experiment. General relativity, gravit. & relativ. field theories: Contribut. Papers of 10-th Intern. Marcel Grossmann Meeting (MG-10) (Rio de Janeiro, Brasil, July 2003). Rio de Janeiro, 2003. P.62.
12. Baranov A.M. Static star model with nonhomogeneous electric charge density // On recent developments in theoret. & experiment. General relativity, gravit. & relativ. field theories: Contribut. Papers of 10-th Intern. Marcel Grossmann Meeting (MG-10) (Rio de Janeiro, Brasil, July 2003). Rio de Janeiro, 2003. P.63.
13. Baranov A.M. Generalization of a known static star solution // On recent developments in theoret. & experiment. General relativity, gravit. & relativ. field theories: Contribut. Papers of 10-th Intern. Marcel Grossmann Meeting (MG-10) (Rio de Janeiro, Brasil, July 2003). Rio de Janeiro, 2003. P.64–65.
14. Власов З.В., Баранов А.М. Точное решение уравнений Эйнштейна для электрически заряженной звезды // НКСФ-2004: тез. докл. межвуз. научн. конфер. студ.-физиков, аспирантов и молод. ученых НКСФ-XXXIII (2004). Красноярск: КрасГУ, 2004. С. 52.
15. Баранов А.М. О модели жидкого электрически заряженного шара // XVI Петровские чтения («Волга-16'2004», Казань, 22 июня – 3 июля 2004): тез.докл. XVI Международ. летней шк.-семинара по современ. пробл. теор. и мат. физики. Казань, 2004. С. 22.
16. Баранов А.М. Об одном обобщении внутреннего статического решения для гравитирующего шара // XVI Петровские чтения («Волга-16'2004», Казань, 22 июня – 3 июля 2004): тез.докл. XVI Международ. летней шк.-семинара по современ. пробл. теор. и мат. физики. Казань, 2004. С. 23.

17. Баранов А.М., Власов З.В. Точное внутреннее статическое решение для электрически заряженной звезды // XVI Петровские чтения («Волга-16'2004», Казань, 22 июня – 3 июля 2004): тез.докл. XVI Международ. летней шк.-семинара по современ. пробл. теор. и мат. физики. Казань, 2004. С. 26.
18. Власов З.В., Баранов А.М. Об одном точном решении для статической заряженной звезды // НКCF-2005: тез. докл. межвуз. научн. конфер. студ.-физиков, аспирантов и молод. ученых НКCF-XXXIV (2005). Красноярск: КрасГУ, 2005. С. 112.
19. Баранов А.М., Власов З.В. Модель заряженного гравитирующего шара // Вестник Красноярского государственного университета. Физико-математические науки. 2005. № 1. С.1–11.
20. Baranov A.M. On an Extension of a Static Ball solution // Международ. конфер. по гравитации, космологии и астрофизике: тез. докл. XII Российской грав. конфер., Казань, 20–26 июня 2005. Казанский гос.пед.ун-т. Казань, 2005. С.18–19.
21. Baranov A.M., Vlasov Z.V. An Exact Interior Extension of Electric Charged Ball Static Solution // Международ. конфер. по гравитации, космологии и астрофизике: тез. докл. XII Российской грав. конфер., Казань, 20–26 июня 2005. Казанский гос.пед.ун-т. Казань, 2005. С.20–21.
22. Баранов А.М. Обобщение решения уравнений Эйнштейна-Максвелла для заряженного статического шара с параболическим распределением плотности массы // Вестник Красноярского государственного университета. Физико-математические науки. 2005. № 4. С.6–14.
23. Baranov A.M. On an Extension of a Static Ball solution // Gravitation & Cosmology. 2005. V.11. № 4(44). P.313–314.
24. Baranov A.M. On an Extension of a Static Ball Solution // Los-Alamos. URL: <http://ArXiv.org/gr-qc/1112.5873>.
25. Baranov A.M., Vlasov Z.V. An Exact Interior Extension of a Static Solution for an Electric Charged Ball // Gravitation & Cosmology. 2005. V.11. № 4(44). P.315–316.
26. Baranov A.M., Vlasov Z.V. An Exact Interior Extension of a Static Solution for an Electric Charged Ball // Los-Alamos. URL: <http://ArXiv.org/gr-qc/1112.5911>.
27. Баранов А.М., Бикмурзин Р.В., Власов З.В. О внутреннем источнике решения Райснера-Нордстрема в однородных координатах // Вестник Красноярского государственного университета. Физико-математические науки. 2006. № 9. С.10–15.
28. Власов З.В., Баранов А.М. Обобщение одного класса точных решений для астрофизических объектов, обладающих электрическим зарядом.// НКCF-2006: тез. докл. межвуз. научн. конфер. студ.-физиков, аспирантов и молод. ученых НКCF-XXXV (2006). Красноярск: КрасГУ, 2006. С. 71.
29. Баранов А.М., Власов З.В. Обобщение одного класса точных решений для астрофизических объектов с электрическим зарядом // Материалы научн. конфер. студен., аспирантов и молодых ученых физиков (НКCF-XXXV (2006), Красноярск, 12–13 апреля 2006). Красноярск: Краснояр. гос.ун-т. 2006. С.9–13.
30. Власов З.В., Баранов А.М. О внутреннем источнике Райснера-Нордстрема // НКCF-2007: тез. докл. межвуз. научн. конфер. студ.-физиков, аспирантов и молод. ученых НКCF-XXXVI (2007). Красноярск: СФУ, Институт естествен. и гуманитарн. наук, 2007. С. 120.
31. Баранов А.М., Власов З.В. О внутреннем источнике Райснера-Нордстрема // Материалы научн. конфер. студен., аспирантов и молод. ученых-физиков (НКCF-XXXVI (2007), Красноярск, 13–14 апреля 2007). Красноярск: СФУ, Институт естествен. и гуманитарн. наук, 2007. С.173–177.
32. Баранов А.М. О модели нейтрального и электрически заряженного жидкого шара // Новейшие проблемы теории поля: труды XVII Международн.летн. шк.-семинара «Волга-17'06» по современ. проблемам теор. и мат. физики (Петровские чтения). Казань: Казанский гос.ун-т, 2007. Т.5 С.104–107.
33. Баранов А.М., Власов З.В. Точное внутреннее статическое решение для электрически заряженной звезды // Новейшие проблемы теории поля: труды XVII Международн.летн. шк.-семинара «Волга-17'06» по современ. проблемам теор. и мат. физики (Петровские чтения). Казань: Казанский гос.ун-т, 2007. Т.5 С.118–121.
34. Власов З.В., Баранов А.М. О внутреннем источнике Райснера-Нордстрема // НКCF-2008: тез. докл. межвуз. научн. конфер. студ.-физиков, аспирантов и молод. ученых НКCF-XXXVII (2008). Красноярск: СФУ, 2008. С.120.
35. Baranov A.M., Vlasov Z.V. New Interior static solution for electric charged ball // Intern. Confer. on Gravitation & Astrophysics (June 23–28, 2008, PFUR, Moscow, Russia): abstracts of 13 Rus. Grav. Confer. Moscow: PFUR, 2008. P.58–59.
36. Баранов А.М., Власов З.В. О новом точном решении уравнений Эйнштейна-Максвелла для электрически заряженной звезды // Современ. проблемы гравитации и космологии (GRACOS-2009, 24–29 авг. 2009, Казань-Яльчик): труды II Российск. летней шк.-сем.-Казань: ТГГПУ, 2009. С.23–27.

37. Baranov A.M., Vlasov Z.V. Charged Ball Static Star Model // Proceedings of Intern. Meeting «Physical Interpretations of Relativity Theory (PIRT-2009)» (Moscow (Russia): 6–9 July, 2009). Moscow-Liverpool-Sunderland. Moscow: BMSTU, 2009. P.374–382.
38. Baranov A.M. Vlasov Z.V. Charged Ball Static Star Model // Los-Alamos. URL: <http://ArXiv.org/gr-qc/1201.4673>.
39. Дробов И.В., Баранов А.М. Об одной модели жидкого массивного шара в общей теории относительности // НКСФ-2010: матер. научн. конфер. студ., аспирантов и молод. ученых-физиков НКСФ-XXXIX (2010) / Красноярск: СФУ, 2010. – С. 52.
40. Сафонов И.Н., Баранов А.М. Об одной модели звезды в общей теории относительности // НКСФ-2010: матер. научн. конфер. студ., аспирантов и молод. ученых-физиков НКСФ-XXXIX (2010) / Красноярск: СФУ, 2010. – С. 60.
41. Baranov A.M. On one approach to construction of the ball static models in general relativity // Intern. Confer. on Gravitation & Astrophysics (July 1–7, 2011, UISPU, Ul'yanovsk, Russia): abstracts of 14 Rus. Grav. Confer. Ul'yanovsk: UISPU, 2011. P.35–36.
42. Baranov A.M. On an approach to constructing static ball models in General Relativity // Gravitation & Cosmology. 2012. V.18. № 3. P.201–203.
43. Baranov A.M. On an approach to constructing static ball models in General Relativity // Los-Alamos. URL: <http://ArXiv.org/gr-qc/1208.6543>.
44. Darboux G. Sur une proposition relative aux équations linéaires //Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris), 1882. V.94. P.1456–1459.
45. Баранов А.М. Обобщение открытой космологической модели с излучением // Фридмановские чтения: тез. докл. междунар. конф. 24–28 июня 2013 г., Пермь, Россия. Пермь: Пермский гос.нац. исслед. ун-т, 2013. С.12.
46. Баранов А.М. Обобщение открытой космологической модели с излучением //Пространство, время и фундаментальные взаимодействия, 2013. № 3. С.49–53.
47. Баранов А.М. Обобщение одной модели внутреннего источника решения Райснера-Нордстрема // Труды Рос. летн. шк. «Мат. моделир. фундамент. объектов и явл. в системах компьютерн. мат-ки» (ММ СКМ-4) и Рос. сем. «Нелинейн. поля и релятив. статистика в теор. гравитации и космологии» 21–26 окт. 2013, Казань. Казань: Казанский ун-т, 2013. С. 19–24.
48. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.
49. Баранов А.М. О фазовом переходе гравитационного поля в жидком шаре.// Труды Российск. летн. шк. «Мат. моделир.фундамент. объектов и явл. в системах компьютерн. мат-ки» (ММ СКМ2) и Российск. сем. «Нелинейн. поля и релятив. статистика в теории грав. и космологии, 6–10 сент.2010, Казань-Яльчик). – Казань: Изд-во Фолиантъ», 2010. С.132–136.
50. Baranov A.M. The Demonstration of Gravitational Phase Transition inside of Fluid Static Ball // Journal of SibFU, series «Mathematics & Physics». 2011. Vol.4. № 3. P.275–281
51. Baranov A.M. The Demonstration of Gravitational Phase Transition inside of Fluid Static Ball // Los-Alamos. URL: <http://ArXiv.org/gr-qc/1105.6327>.
52. Baranov A.M. On an approach to constructing static ball models in General Relativity // Gravitation and Cosmology, 2012. Vol.18. № 3. P.201–203.
53. Baranov A.M. On an approach to constructing static ball models in General Relativity // Los-Alamos. URL: <http://ArXiv.org/gr-qc/1208.6543>.
54. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966. 495 с.
55. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф.М.: Мир, 1984. Т.1. 350 с.

Поступила в редакцию 01.02.2012

Баранов Александр Михайлович, д. ф.-м. н., профессор,  
Красноярский государственный педагогический университет им.В.П.Астафьева,  
660049, Россия, г.Красноярск, ул. Ады Лебедевой, 89 ;  
Сибирский государственный технологический университет, 660049, Россия, г.Красноярск, пр.Мира, 82.  
E-mail: alex\_m\_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru

*A. M. Baranov*

**A model of the Reissner-Nordström interior source**

*Keywords:* exact solutions of gravitational equations, Reissner-Nordström's solution, Darboux method, theory of catastrophe.

PACS: 04.20.-q; 04.20.Jb; 05.45.-a

A new exact static interior solution of the Einstein equations for a gravitating ball filling with neutral and charged fluids is obtained by the Darboux method. The solution is an extension of the earlier solution of charged ball with mass density's describing by a polynomial function of tenth order. This solution describes compact astrophysical objects with electric charge. It is shown that a behavior of the total energy density's distribution of generalised solution nearby the ball center can be described as the cusp catastrophe.

REFERENCES

1. Kramer D., Stephani H., Mac-Callum M., Herlt E. *Exact solutions of the Einstein's field equations*, Berlin, 1980.
2. Baranov A.M. Interior spherical static solution of the Einstein-Maxwell equations, Editorial board of journal «Izv. Vuzov (Fizika)», 1973, 9 p. Deposit in VINITI USSR 05.06.1973, no. 6729-73.
3. Baranov A.M. Spherical static solution of the Einstein-Maxwell equations for perfect fluid, Peoples Friendship University named after P.Lumumba. Moskow, 1976, 7 p. Deposit in VINITI USSR 13.07.1976, no. 2626-76.
4. Baranov A.M., Vlasenko Yu.N., Paklin N.N. Research of static solution with parabolic distribution of the mass density for a relativistic fluid ball. 1. Model approximation. Physical criteria, Krasnoyarsk State University, Krasnoyarsk, 1988, 22 p. Deposit in VINITI USSR 14.11.1988, no. 8041-B88.
5. Baranov A.M., Vlasenko Yu.N., Paklin N.N. Research of static solution with parabolic distribution of the mass density for a relativistic fluid ball. 2. Algebraic classification. Topological properties, Krasnoyarsk State University, Krasnoyarsk, 1988, 16 p. Deposit in VINITI USSR 20.09.1988, no. 7036-B88.
6. Baranov A.M. Interior stellar static solution with an electric charge: oscillatory description, *Mathematic models and their methods of research: transactions of Intern. conf.*, Inst. of Comput. and Model. Sib.Sci Depart. of Russ. Academy of Sci., Krasnoyarsk, 2001, vol.2, pp. 65–67.
7. Baranov A.M. Oscillatory approach to description of static stellar with neutral and charged perfect fluid, *Vest. Krasnoyarsk State Univ. Phys.-Math. sciences*, 2002, no. 1, pp. 5–12.
8. Baranov A.M. Generalization of a known static star solution, *Theor. and experiment. problems in GRG : abstracts of 11-th Intern. conf.*, TSU, Tomsk, 2002, pp. 10–11.
9. Baranov A.M. Interior Stellar model with Electric Charge as an Oscillator, *Gravitation & Cosmology*, 2002, vol. 8, Suppl.II, pp. 10–11.
10. Baranov A.M. Interior Static Stellar Model with Electric Charge as an Oscillator. Los-Alamos, <http://ArXiv.org/gr-qc/1201.4429>.
11. Baranov A.M. On static interior star model filled with neutral and charged fluids, *On recent developments in theor. & experiment. General relativity, gravit. & relativ. field theories: Contribut. Papers of 10-th Intern. Marcel Grossmann Meeting (MG-10) (Rio de Janeiro, Brasil, July 2003)*, Rio de Janeiro, 2003, p.62.
12. Baranov A.M. Static star model with nonhomogeneous electric charge density, *On recent developments in theor. & experiment. General relativity, gravit. & relativ. field theories: Contribut. Papers of 10-th Intern. Marcel Grossmann Meeting (MG-10) (Rio de Janeiro, Brasil, July 2003)*, Rio de Janeiro, 2003, p. 63.
13. Baranov A.M. Generalization of a known static star solution, *On recent developments in theor. & experiment. General relativity, gravit. & relativ. field theories: Contribut. Papers of 10-th Intern. Marcel Grossmann Meeting (MG-10) (Rio de Janeiro, Brasil, July 2003)*, Rio de Janeiro, 2003, pp. 64–65.
14. Vlasov Z.V., Baranov A.M. An exact solution of the Einstein equations for star with electric charge, *Sci.Conf.Stud.Phys.-2004 (SCSPH): abstracts of the between vuz. sci. conf. of stud.-phys., postgrad. and young scient., SCSPH-XXXIII*, KrasSU, Krasnoyarsk, 2004, p. 52.
15. Baranov A.M. On model of fluid an electrically charged ball, *XVI Petrov's meeting («Volga-16'2004», Kazan, June 22 – July 3 2004): abstracts of XVI Inter. the Summer School-seminar upon Modern Problems of Theor. and Math. Phys.*, Kazan, 2004, p.22.
16. Baranov A.M. About one generalization of the interior static solution for the gravitating ball, *XVI Petrov's meeting («Volga-16'2004», Kazan, June 22 – July 3 2004): abstracts of XVI Inter. the Summer School-seminar upon Modern Problems of Theor. and Math. Phys.* Kazan, 2004, p.23.
17. Baranov A.M., Vlasov Z.V. The Exact interior static solution for an electrically charged star, *XVI Petrov's meeting («Volga-16'2004», Kazan, June 22-July 3 2004): abstracts of XVI Inter. the Summer School-seminar upon Modern Problems of Theor. and Math. Phys.* Kazan, 2004, p.26.
18. Vlasov Z.V., Baranov A.M. About one exact solution for static charged star, *Sci.Conf.Stud.Phys.-2005 (SCSPH): abstracts of the between vuz. sci. conf. of stud.-phys., postgrad. and young scient., SCSPH-XXXIV*, KrasSU, Krasnoyarsk, 2005, p. 112.

19. Baranov A.M., Vlasov Z.V. Model of charged gravitating ball, *Vest.Krasnoyarsk State Univ. Phys.-Math. sciences*, 2005, no. 1, pp. 1–11.
20. Baranov A.M. On an Extension of a Static Ball solution, *Intern. conf. of gravitation, cosmology astrophysics: abstracts of XII Russ. grav. conf., Kazan, June 20, 2005*, Kazan State Ped. Univ., Kazan, 2005, pp. 18–19.
21. Baranov A.M., Vlasov Z.V. An Exact Interior Extension of the Electric Charged Ball Static Solution, *Intern. conf. of gravitation, cosmology astrophysics: abstracts of XII Russ. grav. conf., Kazan, June 20, 2005*, Kazan State Ped. Univ., Kazan, 2005, pp. 20–21.
22. Baranov A.M. Generalized solution of the Einstein-Maxwell equations for charged static ball with parabolic distribution of the mass density, *Vest.Krasnoyarsk State Univ. Phys.-Math. sciences*, 2005, no. 4, pp. 6–14.
23. Baranov A.M. On an Extension of a Static Ball solution, *//Gravitation & Cosmology*, 2005, vol.11, no. 4(44), pp. 313–314.
24. Baranov A.M. On an Extension of a Static Ball Solution, Los-Alamos, <http://ArXiv.org/gr-qc/1112.5873>.
25. Baranov A.M., Vlasov Z.V. An Exact Interior Extension of a Static Solution for an Electric Charged Ball, *Gravitation & Cosmology*, 2005, vol.11, no. 4(44), pp. 315–316.
26. Baranov A.M., Vlasov Z.V. An Exact Interior Extension of a Static Solution for an Electric Charged Ball, Los-Alamos, <http://ArXiv.org/gr-qc/1112.5911>.
27. Baranov A.M., Bikmurzin R.V. On interior source of the Reissner-Nordström solution in homogeneous coordinates, *Vest.Krasnoyarsk State Univ. Phys.-Math. sciences*, 2006, no. 9, pp. 10–15.
28. Vlasov Z.V., Baranov A.M. Generalization of one class of exact solutions for the astrophysics objects having electric charge, *Sci.Conf.Stud.Phys.-2006 (SCSPH): abstracts of the between vuz. sci. conf. of stud.-phys., postgrad. and young scient., SCSPH-XXXIV*, KrasSU, Krasnoyarsk, 2006, p. 71.
29. Baranov A.M., Vlasov Z.V. Generalization of one class of exact solutions for the astrophysics objects with electric charge, *Sci.Conf.Stud.Phys.-2006 (SCSPH): papers of the between vuz. sci. conf. of stud.-phys., postgrad. and young scient., SCSPH-XXXV*, KrasSU, Krasnoyarsk, 2006, pp. 9–13.
30. Vlasov Z.V., Baranov A.M. On interior the Reissner-Nordström source, *Sci.Conf.Stud.Phys.-2007 (SCSPH): abstracts of the between vuz. sci. conf. of stud.-phys., postgrad. and young scient., SCSPH-XXXVI*, SFU, Institute of natural and humanitarian sciences, Krasnoyarsk, 2007, p. 120.
31. Baranov A.M., Vlasov Z.V. On interior the Reissner-Nordström source, *Sci.Conf.Stud.Phys.-2007 (SCSPH): papers of the between vuz. sci. conf. of stud.-phys., postgrad. and young scient., SCSPH-XXXVI*, SFU, Institute of natural and humanitarian sciences, Krasnoyarsk, 2007, pp. 173–177.
32. Baranov A.M. On model of neutral and electric charged fluid ball, *XVII Petrov's meeting («Volga-16'2004», Kazan, 2006): proceedings of XVI Inter. the Summer School-seminar upon Modern Problems of Theor. and Math. Phys.* Kazan, 2007, vol.5, pp.104–107.
33. Baranov A.M., Vlasov Z.V. An Exact interior static solution for electrically charged star, *XVII Petrov's meeting («Volga-16'2004», Kazan, 2006): proceedings of XVI Inter. the Summer School-seminar upon Modern Problems of Theor. and Math. Phys.* Kazan, 2007, vol.5, pp.118–121.
34. Vlasov Z.V., Baranov A.M. On interior Reissner-Nordström's source, *Sci.Conf.Stud.Phys.-2008 (SCSPH): abstracts of the between vuz. sci. conf. of stud.-phys., postgrad. and young scient., SCSPH-XXXVII*, SFU, Krasnoyarsk, 2008, p.120.
35. Baranov A.M., Vlasov Z.V. New Interior static solution for electric charged ball, *Intern. Confer. on Gravitation & Astrophysics (June 23–28, 2008, PFUR, Moscow, Russia): abstracts of 13 Rus. Grav. Confer.*, PFUR, Moscow, 2008, pp. 58–59.
36. Baranov A.M., Vlasov Z.V. On new exact solution of the Einstein-Maxwell equations for electrically charged star, *Modern problems of gravitation and cosmology (GRACOS-2009, August 24–29, Kazan-Yal'chik): proceedings of the II Russ. summer school-seminar*, THSPU, Kazan, pp.23–27.
37. Baranov A.M., Vlasov Z.V. Charged Ball Static Star Model, *Physical Interpretations of Relativity Theory (PIRT-2009): Proceedings of Intern. Meeting (Moscow, July 6–9, 2009), Moscow-Liverpool-Sunderland*, BMSTU, Moscow, 2009, pp. 374–382.
38. Baranov A.M. Vlasov Z.V. Charged Ball Static Star Model, Los-Alamos, <http://ArXiv.org/gr-qc/1201.4673>.
39. Drobov I.V., Baranov A.M. About one model of the fluid massive ball in general relativity, *Sci. Conf. Stud. Phys.-2010 (SCSPH): papers of the between vuz. sci. conf. of stud.-phys., postgrad. and young scient., SCSPH-XXXVII*, SFU, Krasnoyarsk, 2010, p.52.
40. Safronov I.N., Baranov A.M. About one the stellar model in general relativity, *Sci.Conf.Stud.Phys.-2010 (SCSPH): papers of the between vuz. sci. conf. of stud.-phys., postgrad. and young scient., SCSPH-XXXVII*, SFU, Krasnoyarsk, 2010, p.60.
41. Baranov A.M. On one approach to construction of the ball static models in general relativity, *Intern. Confer. on Gravitation & Astrophysics (July 1–7, 2011, UlSPU, Ul'yanovsk, Russia): abstracts of 14 Rus. Grav. Confer.*, UlSPU, Ul'yanovsk, 2011. pp. 35–36.

42. Baranov A.M. On an approach to constructing static ball models in General Relativity, *Gravitation & Cosmology*, 2012, vol. 18, no. 3, pp.201–203.
43. Baranov A.M. On an approach to constructing static ball models in General Relativity, Los-Alamos, <http://ArXiv.org/gr-qc/1208.6543>.
44. Darboux G. Sur une proposition relative aux équations linéaires, *Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris)*, 1882, vol. 94, pp. 1456–1459.
45. Baranov A.M. Generalization of the open cosmological model with radiation, *Friedman's meetings: abstracts of Intern. conf., June 24–28, 2013, Perm, Russia*, State National Research University, Perm, 2013, p.12.
46. Baranov A.M. Generalization of the open cosmological model with radiation, *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2013, no.3, pp.49–53.
47. Baranov A.M. Generalization of one interior model source of the Reissner-Nordström solution «'Math. model.of fundamental objects and phenomenons in systems of comput. math. (MM SCM-4)» and Russ. seminar «Nonlinear fields and relativ. statistic in theory of gravitation and cosmology»: proceedings of Russian Summer School, Oct. 21–26, 2013, Kazan University, Kazan, 2013, pp. 19–24.
48. Landau L.D., Lifshitz E.M. *The classical Theory of Fields*, Moscow: Nauka, 1988 (in Russian).
49. Baranov A.M. On phase transition of gravitational field inside of fluid ball «'Math. model.of fundamental objects and phenomenons in systems of comput. math. (MM SCM-2)» and Russ. seminar «Nonlinear fields and relativ. statistic in theory of gravitation and cosmology»: proceedings of Russian Summer School, Oct. 21–26, 2013, Publishing office «Foliant», Kazan, 2010, pp. 132–136.
50. Baranov A.M. The Demonstration of Gravitational Phase Transition inside of Fluid Static Ball, *Journal of SibFU, series «Mathematics & Physics»*, 2011, vol.4, no. 3, pp. 275–281.
51. Baranov A.M. The Demonstration of Gravitational Phase Transition inside of Fluid Static Ball. Los-Alamos, <http://ArXiv.org/gr-qc/1105.6327>.
52. Baranov A.M. On an approach to constructing static ball models in General Relativity, *Gravitation and Cosmology*, 2012, vol.18, no. 3, pp. 201–203.
53. Baranov A.M. On an approach to constructing static ball models in General Relativity, Los-Alamos, <http://ArXiv.org/gr-qc/1208.6543>.
54. Petrov A.Z. *New Methods in General Relativity*, Moscow: Nauka, 1966, 495 p. (in Russian).
55. Gilmore R. *Catastrophe theory for scientists and engineers*, New York-Chichester-Brisbane-Toronto: A Wiley-Interscience Publication, 1981.

Received 01.02.2012

Baranov Alexandre Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor,  
Krasnoyarsk State Pedagogical University named after V.P.Astaf'ev,  
89 Ada Lebedeva St., Krasnoyarsk, 60049, Russia;  
Siberian State Technological University, 82 Mira Av., Krasnoyarsk, 60049, Russia.

E-mail: alex\_m\_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru

©Baranov A.M.