

УДК 530.011; 531.11

*И. Р. Мубаракшин<sup>1</sup>***О НЬЮТОНЕ, КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЯХ  
И ЗАКОНЕ ОБРАТНЫХ КВАДРАТОВ**

Показана несостоятельность появившегося в литературе утверждения, что Ньютоном была допущена логическая ошибка при доказательстве того, что под действием центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния, тела движутся по орбитам, совпадающим с одним из конических сечений. Эта история может служить еще одним подтверждением высочайшего качества перевода Ньютоновских «Начал» на русский язык, выполненного академиком А.Н. Крыловым.

**Ключевые слова:** логическая ошибка Ньютона, конические сечения, закон обратных квадратов.

**PACS:** 01.65.+g; 45.20.D-

**Введение**

В работе Р. Вейнстока [1] с претенциозным названием «Разоблачение вековой легенды: «Математические начала натуральной философии» Ньютона и орбиты при движении в поле центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния» утверждается, что один из основных результатов Ньютона о том, что под действием центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния, тела движутся по орбитам, совпадающим с одним из конических сечений, на самом деле Ньютоном не доказан, т.к. рассуждения Ньютона содержат логическую ошибку.

Первым впечатлением от работы Вейнстока было удивление. Неужели за 300 лет, прошедшие после выхода первого издания «Математических начал натуральной философии» (в дальнейшем для краткости будем называть их «Началами»), никто не заметил ошибки, логического просчета, о котором пишет Вейнсток? Ведь книгу читали, изучали многие далеко не глупые люди. Тем не менее работа Вейнстока заинтриговала точным цитированием, логикой рассуждений, обширными комментариями. Захотелось непосредственно во всем разобраться.

Однако, взяв в руки «Начала» Ньютона [2] и найдя соответствующие места, вскоре выясняешь, что все не так просто, как представлялось. Обнаруживается иллюзорность первоначального порыва быстро во всем разобраться и оказываешься перед дилеммой: либо долго и нудно штудировать толстенный том, чтобы потом быть в состоянии делать самостоятельные выводы, либо, уповая на авторитеты, отмахнуться от Вейнстока, мол «ерунда, не может быть ...». Вот тут начинаешь понимать досаду и негодование Вейнстока, о которых он рассказывает, когда, сообщая другим ученым о своих поисках и открытиях, он в ответ получал или глухое молчание, или полное отрицание.

Конечно, если взять только содержание обсуждаемых Предложений, т.е. сами словесные формулировки, без анализа доказательств, то Вейнсток без сомнения был бы прав, если бы не одно обстоятельство. Этих формулировок в оригинале нет. Пересказывая содержание Предложений XI–XIII книги 1-ой «Начал», Вейнсток невольно придает им вид прямых утверждений, из которых обратные, сформулированные в виде Следствия 1 после Предложения XIII, конечно, не следуют с очевидностью, т.е. без доказательства. У Ньютона же Предложения XI–XIII изложены в виде задач, решения которых основываются на теореме V и ее следствиях, входящих в Предложение VI. Эти решения дают не только ответы для сформулированных задач, но и позволяют высказать обратные утверждения, что и сделано Ньютоном в виде Следствия 1.

**1. Суть проблемы по Вейнстоку**

Приведем отрывок из работы Вейнстока [1], в котором излагается суть проблемы, логическая ошибка, которую по мнению Вейнстока допустил Ньютон:

«В предложении XI книги 1 Ньютон показывает, что если тело движется по эллиптической орбите под действием центростремительной силы, направленной к одному из фокусов эллипса, то величина силы должна изменяться обратно пропорционально квадрату расстояния от этого фокуса. В предложении XII он доказывает аналогичное утверждение для гиперболической орбиты: в

<sup>1</sup>E-mail: mubair@mail.ru

предложении XIII Ньютон завершает перебор конических сечений рассмотрением параболической орбиты и выводит для величины силы тот же закон обратных квадратов. Из трех предложений XI–XIII следует, что если орбита представляет собой одно из конических сечений и сила направлена к фокусу сечения, то величина силы должна изменяться по закону обратных квадратов. В следствии 1 из предложения XIII читаем:

*«Из последних трех предложений следует, что если какое-нибудь тело  $P$  выходит из места  $P$  по направлению прямой  $PR$  с какой-нибудь скоростью и находится под действием центростремительной силы, обратно пропорциональной квадратам расстояний до центра  $S$ , то это тело будет двигаться по коническому сечению, коего фокус лежит в центре сил, и наоборот».*

Именно так сформулировал Ньютон следствие 1 в представленной Королевскому обществу рукописи и в первом издании «Начал» (1687 г.): доказав теорему, Ньютон ограничился голословным утверждением, что из нее следует обратное утверждение, в то время как оно с очевидностью *non sequitur* (не следует). (Изыщное выражение «и наоборот» в конце приведенного выше отрывка из следствия 1 по существу тавтологично, оно лишь повторяет теорему, доказанную в предложениях XI–XIII.)

Вывод о том, будто «тела под действием центральной силы, величина которой изменяется по закону обратных квадратов, движутся по коническим сечениям», не следует (вопреки тому, что утверждалось в первом издании «Начал») из трех предложений XI–XIII. На это еще в 1710 г. обратил внимание Иоганн Бернулли. Тем временем Ньютон также осознал возникшую трудность. В октябре 1709 г. он распорядился дополнить в подготавливаемом к печати втором издании «Начал» (1713 г.) приведенный выше отрывок из следствия 1 двумя фразами (номера в квадратных скобках введены здесь для удобства ссылок):

- [1] *«Ибо при заданных фокусе, точке касания, положении касательной можно построить лишь одно коническое сечение, имеющее в этой точке заданную кривизну».*
- [2] *«Кривизна же найдется по заданной скорости и известной центростремительной силе;*
- [3] *под действием той же центростремительной силы и при той же скорости не могут быть описываемы две различные орбиты, касающиеся друг друга».*

Тем самым, как считают поныне изучающие наследие Ньютона, пробел в доказательстве был восполнен (или по крайней мере указано недостающее звено в цепи рассуждений) и возражение, выдвинутое Бернулли, устранено.

В действительности внесенное Ньютоном дополнение отнюдь не восполняет пробел. Оно лишь в явном виде формулирует единственность орбиты при заданном законе изменения силы и известных начальных координатах и скорости» [1, с. 180–182].

Чтобы во всем этом разобраться, обратимся непосредственно к «Началам» [2] самого Ньютона.

## 2. Основная формула НЬЮТОНА, с помощью которой определяются центростремительные силы для произвольной криволинейной траектории

В Предложении VI, включающем теорему V и следствия 1–5 (Отдел II книги I «Начал») Ньютон выводит основную формулу, с помощью которой можно определить центростремительные силы для любой криволинейной траектории. Нам эту формулу удобнее использовать в том виде, к которому она приводится в следствии 1 [2, с. 82]:

*Следствие 1. Если тело  $P$  (см. рис. 1), обращаясь вокруг центра  $S$ , описывает кривую  $APQ$  и прямая  $ZPR$  касается этой кривой в точке  $P$ , и из какой-либо точки  $Q$  этой кривой, весьма близкой к  $P$ , проводится прямая  $QR$ , параллельная  $SP$ , и на  $SP$  опускается перпендикуляр  $QT$ , то центростремительная сила будет обратно пропорциональна предельной величине, к которой приближается количество*

$$\frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR}, \quad (1)$$

когда точки  $P$  и  $Q$  сливаются между собою.

С помощью этой формулы Ньютон решает задачи как определения сил при заданной траектории, так и определения траектории при заданных силах. Отметим, что формула Ньютона (1) равносильна формуле Бине, которой пользуются теперь.

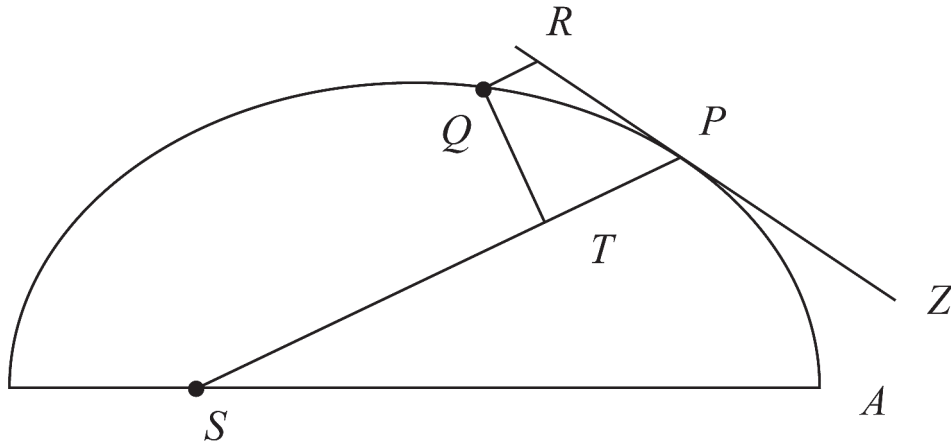


Рис. 1: Чертеж Ньютона для определения центральной силы, действующей на тело P, движущееся вокруг центра S по произвольной криволинейной траектории APQ

### 3. Предложения XI–XIII книги I «Начал» или конические сечения и закон обратных квадратов

Обсуждаемые Вейнстоком Предложения XI–XIII расположены в книге 1 «Начал» в Отделе III «О движении тел по эксцентричным коническим сечениям». Они сформулированы в виде задач, а вовсе не теорем, как получилось в пересказе Вейнстока. Вот они [2, с. 92–96]:

*Предложение XI. Задача VI. Тело обращается по эллипсу; требуется определить закон центростремительной силы, направленной к фокусу эллипса.*

*Предложение XII. Задача VII. Тело движется по гиперболе; требуется найти закон центростремительной силы, направленной к фокусу этой кривой.*

*Предложение XIII. Задача VIII. Тело движется по параболе; требуется найти закон центростремительной силы, направленной к фокусу этой кривой.*

Схема решения всех трех задач совершенно аналогична и, как пишет Ньютон, после рассмотрения Предложения XI [2, с. 93]:

*«Для гиперболы и параболы можно было бы и здесь поступить с тою же краткостью, с которой рассмотрена задача V, но, в виду важности настоящей задачи для дальнейших приложений, не мешает эти два случая подтвердить отдельными самостоятельными доказательствами».*

В решении можно выделить две части. В первой, чисто геометрической, не имеющей непосредственного отношения к механике, Ньютон показывает, что для кривой, являющейся одним из конических сечений, в пределе, когда точка Q приближается к P (см. рис. 1 в случае эллипса), должно выполняться соотношение

$$L \cdot QR = QT^2, \quad (2)$$

где  $L$  – постоянная, совпадающая с параметром соответствующего конического сечения. Во всех трех решениях эта формула идет под одним и тем же номером 5. (В третьем случае, Предложение XIII, в отличие от предыдущих, параметр параболы обозначен не  $L$ , а  $4SA$ .) Вторая часть решения, которая собственно и связана с механикой, очень короткая и совершенно одинакова во всех трех случаях. Формула (2) переписывается в виде

$$\frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR} = L \cdot SP^2. \quad (3)$$

Отсюда на основании формулы (1), т.е. следствия 1 теоремы V, можно сделать вывод, что [2, с. 92]: «центростремительная сила обратно пропорциональна  $L \cdot SP^2$ , т.е. обратно пропорциональна квадрату расстояния  $SP$ ».

Задачи, сформулированные в виде Предложений XI–XIII, решены. Но соотношения, полученные при решении, например, формула (3), содержат большую информацию, чем просто ответ на поставленный вопрос. Так из результата (3), что центростремительная сила обратно пропорциональна  $L \cdot SP^2$ , следует, что, если траектория задана и является одним из конических сечений,

т.е.  $L = const$ , то центростремительная сила обратно пропорциональна квадрату расстояния  $SP$ . И наоборот, если сила обратно пропорциональна квадрату расстояния, то должно быть  $L = const$ , т.е. траектория (орбита) должна быть некоторым коническим сечением.

Именно это и отражено в следствии 1, следующем в Предложении XIII после задачи VIII. Если в чем и можно упрекнуть Ньютона, так это в неточности выражения. Следствие 1 начинается словами: «Из последних трех предложений следует...», а надо бы сказать «Из доказательств последних трех предложений...». В следующем, после следствия 1, следствии 2 Ньютон по ходу формулирования вывода более четко указывает: «см. формулу (5) доказательств предложений XI, XII и XIII» [2, с. 98].

#### 4. О добавлении в Следствии 1 во втором издании «Начал»

На этом можно было бы поставить точку, но представляет интерес обсудить две фразы, добавленные Ньютоном в следствие 1 во втором издании «Начал». По мнению Вейнстока этими фразами Ньютон хотел восполнить пробел в доказательстве. На самом же деле пробел не восполним и эти фразы «служат своего рода дымовой завесой, затеняющей ясность общего хода рассуждений, и под ее покровом заведомо порочные аргументы воспринимаются как вполне надежные» [1, с. 183].

Не вникая в доказательство Предложений XI–XIII и рассматривая их как теоремы, Вейнсток все внимание сосредотачивает на этих добавленных фразах, переводя дискуссию на проблемы существования и единственности решения, начальных условий и логики высказываний. На это откликнулся В.И. Арнольд [3]. Пройдясь по поводу «искусственных в математических тонкостях физиков», он примерно так обрисовывает предмет дискуссии: Не решая непосредственно уравнение движения тела под действием силы притяжения, обратно пропорциональной квадрату расстояния (закон всемирного тяготения), Ньютон в своей книге предьявил много решений этого уравнения и проверил, что для любого начального условия среди них имеется удовлетворяющее ему решение. Но где гарантия, что не существуют другие решения? Ведь теорема единственности не доказана. Кто это сделал первым? Иоганн Бернулли. Значит, это он, а не Ньютон, вывел закон Кеплера из закона всемирного тяготения, ему и должна принадлежать вся слава [3, с. 23–24].

Арнольд дает такую оценку ситуации: На самом деле весь этот спор основан на глубоком заблуждении. Современные математики действительно различают теоремы существования и теоремы единственности для дифференциальных уравнений, и возможны различные неприятности, когда одна теорема выполнена, а другая нет. Но все это связано с неоправданным расширением класса рассматриваемых функций. В современной математике понятие функции приобрело иной смысл по сравнению с классической математикой. Говоря о функции, мы можем иметь в виду довольно скверный объект. А во времена Ньютона под словом функция понимали только очень хорошие вещи. В этом случае теорема единственности никакой проблемы не представляет, и о ней тогда просто никто не думал [3, с. 24].

Более того, Арнольд пишет, что «в действительности у Ньютона все доказано и по более строгим меркам». Он приводит теорему, показывающую, что «из существования решения единственность, вообще говоря, не следует, но все будет в порядке, если предьявленное решение гладко зависит от начального условия». И далее: «Посмотрим, что было у Ньютона. Он для каждого начального условия предьявил решение, описал его, и из этого описания сразу становилось ясно, что указанное решение гладким образом зависит от начального условия. Итак, сомнений в единственности нет, и Ньютон правильно доказал первый закон Кеплера» [3, с. 24–25].

Замечательно, что и с этой точки зрения «Ньютон правильно доказал первый закон Кеплера». Но при этом получается, что Арнольд разделяет логику подхода Вейнстока и как бы косвенно подтверждает вывод Вейнстока о том, что Ньютон, добавив две фразы в следствие 1, хотел восполнить пробел в доказательстве. Тем самым Арнольд не проясняет ситуацию, а только запутывает.

Выскажем свои соображения, почему Ньютон сделал добавление к следствию 1 во 2-ом издании «Начал».

При решении задач, входящих в Предложения XI–XIII, в первой части решений, геометрической, Ньютон показывает, что линия, являющаяся коническим сечением, например, эллипсом, обладает свойством, что в каждой точке  $P$  при заданных фокусе  $S$  и касательной  $PR$  в пределе  $Q \rightarrow P$  отношение

$$\frac{QT^2}{QR} = L = const. \quad (1)$$

Будет ли это свойство определяющим, т.е. можно ли его использовать для определения кривых, являющихся коническими сечениями? Если да, то следствие 1 имеет место. В добавлении, сделанном Ньютоном, об этом и говорится: при каких условиях и почему указанное выше свойство конических сечений будет однозначно определять соответствующую кривую.

### Заключение

Известно, с какой тщательностью, строгостью относился Ньютон к своим результатам. Многие доказательства в «Началах» проведены дважды, различными независимыми способами. Вместе с тем, как отмечал автор русского перевода «Начал» академик А.Н. Крылов, «Ньютон, в целях сжатости изложения, идет, так сказать, крупными шагами, пропуская многие промежуточные рассуждения . . .» [4].

Как ни парадоксально это может показаться, но читатели «Начал» [2] на русском языке, видимо, находятся в более выгодном положении, чем читатели на английском. Это связано с тем, что перевод «Начал» на русский осуществил выдающийся русский ученый, математик и механик, А.Н. Крылов. Его перевод отличается высокими литературными достоинствами. Кроме того, А.Н. Крылов «придал формулам современное написание и большую часть доказательств пояснил в примечаниях, с соответствующими аналитическими и алгебраическими выкладками в теперешней форме» [4].

Вейнсток же пользовался переводом «Начал» с латинского на английский, выполненным в 1729 г. Эндриу Моттом и перепечатанным затем в 1962 г. и 1969 г. Сам ли Вейнсток воспринял Предложения XI–XIII и последующее Следствие I как прямые и обратные утверждения или это неточность английского перевода, выяснить по русскому переводу работы Вейнстока не представляется возможным. Переводчик работы на русский язык Ю.А. Данилов все цитаты из ньютоновских «Начал», приводимые Вейнстоком, дал в переводе А.Н. Крылова с латинского оригинала

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вейнсток Р. Разоблачение вековой легенды: «Математические начала натуральной философии» Ньютона и орбиты при движении в поле центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния: Сб. статей / Р. Вейнсток // Физика за рубежом. – Сер. В (преподавание). – М.: Мир, 1984. – С. 178–207. (Weinstok R // Amer. J. of Phys. – July, 1982. – P. 610).
2. Ньютон И. Математические начала натуральной философии / И. Ньютон. – М.: Наука, 1989. – 690 с.
3. Арнольд В.И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук – первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов / В.И. Арнольд. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит. – 1989. – 96 с.
4. Филонович С.Р. О русском переводе «Математических начал натуральной философии» Исаака Ньютона / С.Р. Филонович // Ньютон И. Математические начала натуральной философии. – М.: Наука, 1989. – С. 678–681.

Поступила в редакцию 23.09.2013

И.Р. Мубаракшин. Марийский государственный университет  
E-mail: mubair@mail.ru

**I. R. Mubarakshin**

**About Newton, conic sections and the inverse-square law**

*Keywords:* logic fallacy made by Newton, conic sections, inverse-square law.

PACS: 01.65.+g; 45.20.D-

It is shown that the statement which appeared in the literature concerning the logic fallacy made by Newton in his proof of fact that the inverse-square central force acting on physical bodies requires the move of body on the orbits coinciding with one of conic sections, is unfoundedness. It is the history that reveals once more the highest quality of the Russian translation of Newton's «Principia» made by Academician A.N. Krylov.

REFERENCES

1. Weinstok R. Dismantling a centuries-old myth: Newton's Principia and inverse-square orbits: Collected articles. R. Weinstok. *Fizika za rubegom*. Ser. B (teaching). – M.: Mir, 1984. – P. 178-207. (Weinstok R. *Amer. J. of Phys.* – July, 1982. – P. 610).
2. Newton I. *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. I. Newton – M.: Nauka, 1989. – 690 p.
3. Arnold V.I. *Huygens and Barrow, Newton and Hooke – the first steps of the calculus and catastrophe theory, from involutes to quasicrystals*. V.I. Arnold. – M.: Nauka, 1989, 96 p.
4. Filonovich S.R. *About Russian translation Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy*. S.R. Filonovich. Newton I. *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. – M.: Nauka, 1989. – P. 678-681.

Received 23.09.2013

I.R. Mubarakshin. Mari State University.  
E-mail: mubair@mail.ru