

УДК 530.1

А. Б. Балакин,<sup>1</sup> А. Е. Заяц<sup>2</sup>

## НЕМИНИМАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ: I. РАСШИРЕНИЕ МОДЕЛИ ЭЙНШТЕЙНА-ЯНГА-МИЛЛСА <sup>3</sup>

Неминимальная теория поля призвана расширить идею геометризации моделей взаимодействия различных физических систем с полем тяготения за счёт введения новых перекрестных связей, в которых ключевую роль играет кривизна пространства-времени. В настоящее время данная наука рассматривается только как формальное объединение моделей неминимального взаимодействия скалярного, псевдоскалярного, векторного, электромагнитного и калибровочного полей с гравитационным полем, однако, на повестке дня уже стоит задача формирования фундаментальных принципов неминимальной теории поля как отдельной науки. В данной работе на примере теории калибровочных взаимодействий обсуждаются некоторые общие аспекты построения неминимальной теории поля и приводятся примеры, иллюстрирующие принципиально новые результаты, полученные авторами в рамках неминимальной модели Эйнштейна-Янга-Миллса.

**Ключевые слова:** Неминимальные взаимодействия, тензор кривизны, калибровочные поля, неминимальный монополю Ву-Янга.

**PACS:** 04.20.-q, 04.20.Jb, 14.80.Nv, 04.20.Gz

### Введение

В современной теории поля термин *неминимальные модели* используется в различном контексте, поэтому в первую очередь следует пояснить, что именно мы имеем в виду, употребляя его. Мы имеем в виду синоним терминов *модели приливных взаимодействий* и *модели взаимодействий, индуцированных кривизной*. Первый из этих синонимов вызывает естественную ассоциацию с теорией лунных приливов на Земле, которые в рамках ньютоновской теории тяготения описываются на языке вторых производных гравитационного потенциала  $\Gamma_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \partial_\beta \Phi$ . Второй синоним становится понятным, если учесть, что в ньютоновском приближении эйнштейновской теории тяготения объект  $\Gamma_{\alpha\beta}$  совпадает с компонентами  $R_{\alpha 0 \beta 0}$  тензора кривизны Римана, умноженными на квадрат скорости света. Объединяющим фактором в этой терминологической истории является следующее обстоятельство. Согласно принципу *минимальной* связи полевые уравнения в эйнштейновской теории тяготения получаются из полевых уравнений, полученных в рамках специальной теории относительности, заменой метрики Минковского на риманову метрику  $\eta_{ik} \rightarrow g_{ik}$ , а частной производной — на ковариантную  $\partial_k \rightarrow \nabla_k$ . Соответственно, если при обобщении уравнений теории (негравитационного) поля дополнительно используются тензор Римана  $R^i{}_{klm}$  и/или его свёртки — тензор Риччи  $R_{km}$  и скаляр Риччи  $R$ , то такие модели в теории поля называются *неминимальными*. Подчеркнём одну существенную деталь: если к классическому лагранжиану Эйнштейна-Гильберта  $R/\kappa$  добавить нелинейную конструкцию вида

$$\mathcal{L}_{\text{мод. грав.}} = F(R, R_{ik}R^{ik}, R_{ikmn}R^{ikmn}, \nabla_m R \nabla^m R, \dots),$$

то получим одну из многочисленных модификаций теории гравитации, однако, термин неминимальная модель в данном случае неприменим. Неминимальные модели возникают при появлении в лагранжиане так называемых *кросс-инвариантов*, которые содержат свёртки, составленные с помощью тензора Римана, физических полей  $\Psi$  и их ковариантных производных.

Неминимальные модели естественным образом классифицируются по типу физических полей  $\Psi$ , участвующих в приливных взаимодействиях. Наиболее известны неминимальные модели со скалярным полем, использующие скалярные синглеты  $\Phi$ , дублеты  $\Phi^\pm$ , хиггсовские мультиплеты  $\Phi^{(a)}$  и дилатоны  $\varphi$ ; к этим моделям структурно близки неминимальные модели псевдоскалярных (аксионных) полей  $\phi$ . Для краткого обозначения таких моделей в англоязычной литературе обычно используются конструкции следующего типа: nonminimal Einstein–Higgs model, или, например, nonminimal Einstein–dilaton–axion model.

<sup>1</sup> E-mail: Alexander.Balakin@ksu.ru

<sup>2</sup> E-mail: Alexei.Zayats@ksu.ru

<sup>3</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Гранты 11-02-01162, 11-05-97518, 13-02-12093).

Дискуссия по поводу неминимального взаимодействий скалярных полей с гравитацией имеет долгую историю; детали этих исследований обсуждаются, в частности, в обзорах [1–3]. Разработка моделей данного класса началась с введения в лагранжиан скаляра  $\xi R\Phi^2$ , который впоследствии был заменён более общим выражением  $f(\Phi^2, \mathcal{R})$  и дополнен неминимальными конструкциями типа  $R^{ik}\nabla_i\Phi\nabla_k\Phi$ , содержащими градиент скалярного поля. Среди неминимальных моделей с векторными полями наибольший интерес представляют модель Эйнштейна–Прока, описывающая приливные явления с участием массивного векторного поля  $\mathcal{A}^i$ , и так называемая Einstein–aether model, в которой нормированное на единицу векторное поле  $U^i$  описывает скорость перемещения эфира.

Неминимальные модели Эйнштейна–Максвелла и Эйнштейна–Черна–Саймонса вводят нас в сектор приливных моделей электродинамики. В 1971 году Прасанна [4] ввёл в лагранжиан кросс-инвариант  $R^{ikmn}F_{ik}F_{mn}$ , квадратичный по тензору Максвелла  $F_{ik}$ , и получил первую неминимальную однопараметрическую модификацию уравнений Эйнштейна–Максвелла. В 1979 году Новелло и Салим [5] предложили ввести в лагранжиан калибровочно неинвариантные кросс-термы  $RA^kA_k$  и  $R^{ik}A_iA_k$ , где  $A_k$  4-вектор потенциала электромагнитного поля. Качественно новый шаг сделали Драммонд и Хатрелл [6], получившие однопетлевые поправки к лагранжиану в рамках квантовой электродинамики в искривлённом пространстве-времени. Лагранжиан такой модели содержит три фундаментальных  $U(1)$ -калибровочно инвариантных скаляра  $RF_{mn}F^{mn}$ ,  $R^{im}g^{kn}F_{ik}F_{mn}$ ,  $R^{ikmn}F_{ik}F_{mn}$  с коэффициентами, обратно пропорциональными квадрату массы электрона. Эта работа вызвала всплеск интереса к данной теме и возродила дискуссию о состоятельности принципа эквивалентности (см., например, [7, 8]). Неминимальная версия аксионной электродинамики, построенная в работе [9], базируется на использовании кросс-инвариантов двух типов: гравитационно-электродинамических и гравитационно-псевдоскалярных, а также кросс-кросс-инвариантов, содержащих и тензор Максвелла, и псевдоскалярное поле и его градиент, и тензор Римана.

Названия неминимальных моделей взаимодействия калибровочных полей с гравитацией ассоциируются с именами Янга, Миллса и Хиггса. Первой работой, посвящённой данной теме, можно считать статью Г. Хорндески 1981 года [10], в которой введены кросс-инварианты  $R^{ikmn}F_{ik}^{(a)}F_{mn}^{(a)}$ ,  $R_k^i F_{im}^{(a)}F^{(a)km}$  и  $RF_{ik}^{(a)}F^{(a)ik}$ , квадратичные относительно тензора напряжённостей поля Янга–Миллса  $F_{ik}^{(a)}$  и линейные по кривизне. В 1988 году Ф. Мюллер-Хойссен получил тот же лагранжиан с помощью размерной редукции лагранжиана Гаусса–Бонне [11]. Как обобщения этих работ появились исследования, в которых наряду с калибровочными полями были введены дилатонные поля и хиггсовские мультиплеты (см., например, [12]).

Для того, чтобы оценить масштаб задач, связанных с неминимальными взаимодействиями, можно обратиться к иллюстрации, приведённой на Рис. 1. Левая колонка символизирует чисто полевые неминимальные модели (отдельно взятые физические модели и их всевозможные объединения); правая колонка символизирует неминимальные модели материальных систем. Если мы формулируем, например, неминимальную модель Эйнштейна–Максвелла–Власова для аксионно-активной плазмы, то в магический котёл неминимальной схемы взаимодействий закладываются элементы эйнштейновской версии теории тяготения, аксионной электродинамики Максвелла–Вайнберга–Вилчека–Ни и власовской версии кинетической теории плазмы.

С чем связан сегодняшний интерес к неминимальному расширению теории поля? В первую очередь, он связан с необходимостью исследования феномена ускоренного расширения Вселенной. Как только этот факт был установлен из астрономических наблюдений, возник соблазн ввести в рассмотрение новую космическую субстанцию – тёмную энергию, которая обладает экзотическим свойством: её эффективное давление отрицательно. В качестве альтернативы такому объяснению немедленно возникли скалярно-тензорная, векторно-тензорная и нелинейная модификации эйнштейновской теории тяготения (см., например, обзор [13]). Однако, ещё более простым оказалось объяснение этого наблюдательного факта в рамках неминимальной теории поля, поскольку тензор энергии-импульса, соответствующий приливным эффектам в различных физических системах, может характеризоваться отрицательным эффективным давлением при надлежащем выборе констант неминимального взаимодействия.

Интерес к неминимальной теории поля подогревается и другим обстоятельством: в рамках этой теории допустимы точные решения для метрики пространства-времени, которые регулярны всюду, в том числе и в центре гравитирующего сферически-симметричного объекта. Иными словами, введение приливного взаимодействия позволяет теоретически проектировать объекты с несингулярной причинной структурой. Например, можно говорить о существовании несингулярных в центре электрически заряженных звёзд и чёрных дырах, для которых электрическое поле

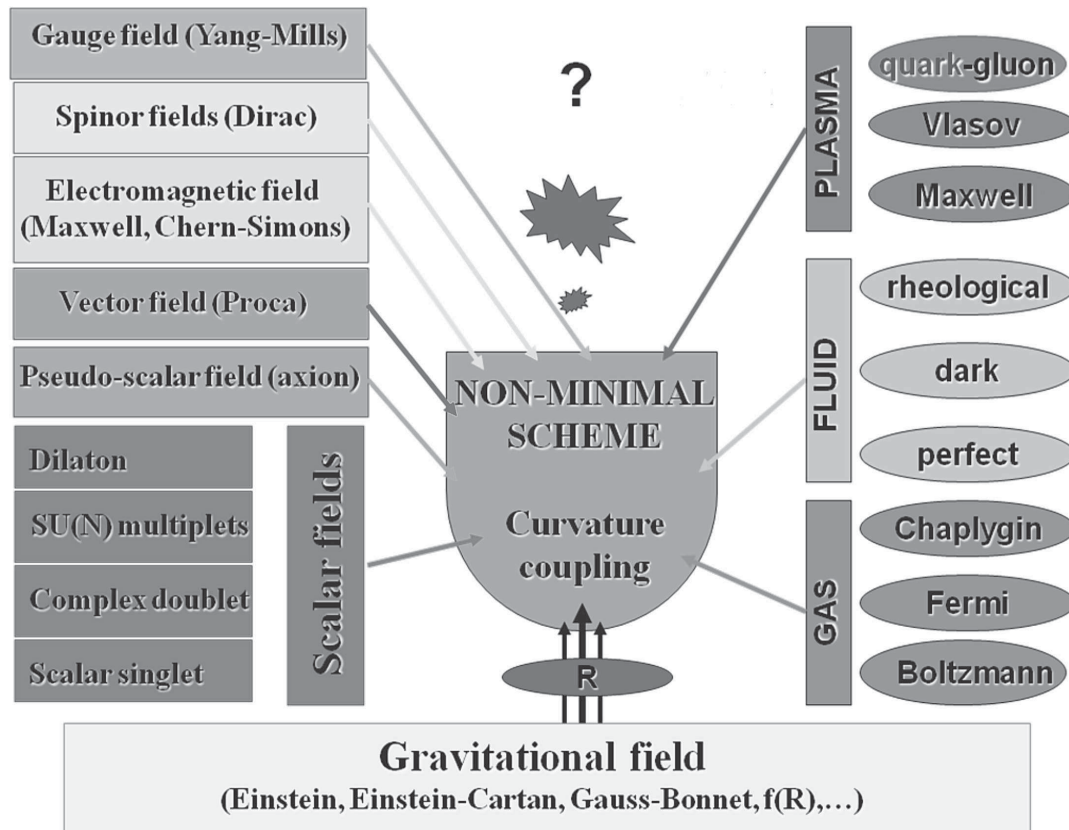


Рис. 1.

конечно в центре объекта, а на больших расстояниях спадает по кулоновскому закону [14, 15]. Можно также говорить о существовании проходимых кротовых нор, созданных не каким-то неведомым экзотическим скалярным субстратом, а хорошо знакомым электрическим или магнитным полем, неминимально взаимодействующим с кривизной пространства-времени [15, 16], или о неминимальных монополях [17].

Данная работа преследует две основные цели. Во-первых, на примере модели Эйнштейна–Янга–Миллса мы хотели бы познакомить читателя с общим формализмом неминимальной теории поля. Выбор модели мотивирован ещё и тем, что в случае так называемых калибровочных полей с *параллельными потенциалами* мы получаем эффективно абелев вариант неминимальной теории, и, следовательно, автоматически переносим все результаты на случай неминимальной электродинамики. Во-вторых, мы хотели бы обратить внимание читателей на наши результаты, связанные с регулярными точными решениями, полученными в рамках неминимальной модели Ву–Янга для статических сферически-симметричных объектов.

## 1. Неминимальная модель Эйнштейна–Янга–Миллса

### 1.1. Историческая справка

Основу теории калибровочных полей составляет принцип локальной (калибровочной) инвариантности. Этот принцип впервые был использован Г. Вейлем в 1918 году для геометрического описания электромагнитного поля в рамках своей объединённой модели гравитации и электромагнетизма [18], где он ввёл электромагнитное поле из требования инвариантности теории относительно локальных, то есть зависящих от точки, растяжений интервала. Впоследствии было показано, что все уравнения теории поля можно сделать инвариантными относительно локальных фазовых преобразований абелевой группы  $U(1)$ , вводя электромагнитное поле в соответствующие уравнения. Кардинальный шаг сделали Ч. Янг и Р. Миллс в 1954 году, обобщившие метод Вейля на неабелеву группу  $SU(2)$ . В их работе [19] осуществлена попытка построить теорию сильных взаимодействий,

опираясь на принцип инвариантности относительно локальных вращений изотопического спина, то есть на неразличимость протонов и нейтронов во всех точках пространства-времени, в отсутствие электромагнитного поля. При этом, для того чтобы обеспечить калибровочную инвариантность лагранжиана системы, потребовалось введение дополнительного компенсирующего поля (так называемого  $b$ -поля), кванты которого являются переносчиками взаимодействия. Этот подход был позднее развит Р. Утиямой в [20], где были получены уравнения динамики для калибровочного поля, соответствующего заданной группе симметрий. В ней была сделана, также, попытка получить уравнения Эйнштейна, исходя из калибровочного принципа.

Динамика калибровочных полей описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Поэтому получение точных решений этих уравнений само по себе является большой проблемой. Первое точное решение уравнений поля в теории Янга–Миллса, известное в литературе, было получено Икедой и Миячи в 1962 году [21]. Оно представляло собой обобщение кулоновского потенциала на случай калибровочной группы  $SU(2)$ . Спустя семь лет Ву и Янг построили первое решение монопольного типа [22]. Монополь Ву–Янга имеет особенность в начале координат. Однако, в отличие от монополя Дирака в электродинамике, он не содержит нефизической нити сингулярности (дираковской струны).

Общей особенностью описанных выше решений является то обстоятельство, что все они эффективно абелевы, то есть с помощью соответствующего калибровочного преобразования можно обратить в нуль все коммутаторы в уравнениях поля, и, следовательно, эти решения являются простыми обобщениями  $U(1)$ -симметричных решений в электродинамике Максвелла.

В 1975 году было начато изучение теории гравитирующих калибровочных полей (теории Эйнштейна–Янга–Миллса). Обобщая решение Ву–Янга, Ф. Ясскин получил первое решение в такой теории [23].

### 1.2. Основные определения

Теории Янга–Миллса посвящено множество различных учебников, монографий и обзоров (см., например, [24–26]). Следуя [25], мы будем рассматривать поле Янга–Миллса, принимающее значения в алгебре Ли калибровочной группы  $SU(n)$ :

$$\mathbf{A}_m = -i\mathcal{G} \mathbf{t}_{(a)} A_m^{(a)}. \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{t}_{(a)}$  — эрмитовы бесследовые генераторы группы  $SU(n)$ , а вещественные коэффициенты  $A_m^{(a)}$  представляют собой потенциалы калибровочного поля. Групповой индекс  $(a)$  пробегает значения от 1 до  $n^2 - 1$ , причём здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам будет подразумеваться суммирование. Генераторы  $\mathbf{t}_{(a)}$  удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[\mathbf{t}_{(a)}, \mathbf{t}_{(b)}] = i f_{(a)(b)(c)}^{(c)} \mathbf{t}_{(c)}, \quad (1.2)$$

где символы  $f_{(b)(c)}^{(a)}$  обозначают вещественные структурные постоянные калибровочной группы  $SU(n)$ . Из потенциалов (1.1) можно сконструировать калибровочное поле напряжённостей, аналогичное тензору Максвелла в электродинамике

$$\mathbf{F}_{mn} = \nabla_m \mathbf{A}_n - \nabla_n \mathbf{A}_m + [\mathbf{A}_m, \mathbf{A}_n]. \quad (1.3)$$

Как и  $\mathbf{A}_m$ , величины  $\mathbf{F}_{mn}$  принимают значения в алгебре Ли группы  $SU(n)$ , поэтому их можно записать в виде

$$\mathbf{F}_{mn} = -i\mathcal{G} \mathbf{t}_{(a)} F_{mn}^{(a)}, \quad F_{mn}^{(a)} = \nabla_m A_n^{(a)} - \nabla_n A_m^{(a)} + \mathcal{G} f_{(b)(c)}^{(a)} A_m^{(b)} A_n^{(c)}. \quad (1.4)$$

Под действием произвольного калибровочного преобразования  $\mathbf{U} \in SU(n)$  потенциалы и напряжённости поля Янга–Миллса преобразуются как

$$\mathbf{A}'_m = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A}_m \mathbf{U} + \mathbf{U}^{-1} \partial_m \mathbf{U}, \quad \mathbf{F}'_{mn} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{F}_{mn} \mathbf{U}. \quad (1.5)$$

В групповом пространстве можно ввести метрику  $G_{(a)(b)}$ , с помощью которой осуществляется опускание групповых индексов. В частности, для калибровочной группы  $SU(n)$  метрика имеет вид

$$G_{(a)(b)} = 2 \operatorname{Tr} \mathbf{t}_{(a)} \mathbf{t}_{(b)}, \quad (1.6)$$

причём генераторы могут быть выбраны таким образом, чтобы  $G_{(a)(b)} = \delta_{(a)(b)}$ . Используя метрику в групповом пространстве, можно определить операцию скалярного произведения калибровочных полей:

$$(\mathbf{F}_{ik}, \mathbf{F}_{mn}) \equiv 2 \operatorname{Tr} \mathbf{F}_{ik} \mathbf{F}_{mn} = -\mathcal{G}^2 \cdot G_{(a)(b)} F_{ik}^{(a)} F_{mn}^{(b)}. \quad (1.7)$$

Очевидно, что в силу данного определения, скалярное произведение является инвариантным относительно калибровочных преобразований (1.5). Наряду с полностью антисимметричным тензором в групповом пространстве  $f_{(a)(b)(c)}$  можно определить полностью симметричный тензор  $d_{(a)(b)(c)}$ :

$$d_{(a)(b)(c)} = 2 \operatorname{Tr} (\{\mathbf{t}_{(a)}, \mathbf{t}_{(b)}\} \mathbf{t}_{(c)}), \quad (1.8)$$

где  $\{\mathbf{t}_{(a)}, \mathbf{t}_{(b)}\} = \mathbf{t}_{(a)} \mathbf{t}_{(b)} + \mathbf{t}_{(b)} \mathbf{t}_{(a)}$  — антикоммутатор генераторов алгебры Ли. Свёртка  $d_{(a)(b)(c)}^{(a)}$  в случае алгебры  $SU(n)$  тождественно равна нулю, гарантируя отсутствие естественных объектов с одним групповым индексом. Помимо обычной ковариантной производной  $\nabla_m$  можно ввести калибровочную ковариантную производную  $\hat{D}_m$ , такую, что

$$\hat{D}_m \mathbf{F}_{ik} \equiv \nabla_m \mathbf{F}_{ik} + [\mathbf{A}_m, \mathbf{F}_{ik}], \quad (1.9)$$

или, используя групповые индексы,  $\hat{D}_m \mathbf{F}_{ik} = -i\mathcal{G} \hat{D}_m F_{ik}^{(a)} \mathbf{t}_{(a)}$ , где

$$\hat{D}_m F_{ik}^{(a)} = \nabla_m F_{ik}^{(a)} + \mathcal{G} f_{(b)(c)}^{(a)} A_m^{(b)} F_{ik}^{(c)}. \quad (1.10)$$

Данная формула допускает естественное обобщение на случай двух или большего числа групповых индексов, верхних или нижних [24]:

$$\hat{D}_m Q_{\dots(d)}^{(a)\dots} \equiv \nabla_m Q_{\dots(d)}^{(a)\dots} + \mathcal{G} f_{(b)(c)}^{(a)} A_m^{(b)} Q_{\dots(d)}^{(c)\dots} - \mathcal{G} f_{(b)(d)}^{(c)} A_m^{(b)} Q_{\dots(c)}^{(a)\dots} + \dots \quad (1.11)$$

Тогда, как легко видеть, метрика  $G_{(a)(b)}$ , структурные константы  $f_{(b)(c)}^{(a)}$  и тензор  $d_{(b)(c)}^{(a)}$  являются постоянными тензорами в обычном и ковариантном смысле [24]. Это означает, что

$$\hat{D}_m G_{(a)(b)} = 0, \quad \hat{D}_m f_{(b)(c)}^{(a)} = 0, \quad \hat{D}_m d_{(b)(c)}^{(a)} = 0. \quad (1.12)$$

Группа  $SU(2)$  является простейшей неабелевой калибровочной группой. Её генераторы можно представить в виде  $\mathbf{t}_{(a)} = \frac{\tau_{(a)}}{2}$ , где  $a = 1, 2, 3$ ,  $\tau_{(a)}$  — матрицы Паули:

$$\tau_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Для такого выбора базиса в алгебре Ли метрика (1.6) и структурные постоянные (1.2) принимают простой вид:

$$G_{(a)(b)} = \delta_{(a)(b)}, \quad f_{(a)(b)(c)} = \epsilon_{(a)(b)(c)}, \quad (1.14)$$

Здесь  $\epsilon_{(a)(b)(c)}$  — полностью антисимметричный символ, причём  $\epsilon_{(1)(2)(3)} = 1$ . Все коэффициенты  $d_{(a)(b)(c)}$ , определяемые равенством (1.8), равны нулю.

### 1.3. Минимальная теория Эйнштейна–Янга–Миллса

Минимальная теория Эйнштейна–Янга–Миллса может быть сформулирована в терминах функционала действия

$$S_{\text{EYM}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R + 2\Lambda}{8\pi} - \frac{(\mathbf{F}_{mn}, \mathbf{F}^{mn})}{2\mathcal{G}^2} \right\}, \quad (1.15)$$

где  $g = \det(g_{ik})$  — детерминант метрического тензора  $g_{ik}$ . Вариация его относительно потенциалов  $A_n^{(a)}$  даёт уравнения динамики калибровочного поля (уравнения Янга–Миллса):

$$\hat{D}_m F^{mn(a)} = 0. \quad (1.16)$$

С другой стороны, тензор напряжённости  $F_{mn}^{(a)}$  удовлетворяет также тождествам Бьянки

$$\hat{D}_i F_{mn}^{(a)} + \hat{D}_m F_{ni}^{(a)} + \hat{D}_n F_{im}^{(a)} = 0, \quad (1.17)$$

или, что тоже самое,

$$\hat{D}_m F_{(a)}^{*mn} = 0. \quad (1.18)$$

Здесь «звёздочка» обозначает операцию дуализации:

$$F_{(a)}^{*mn} = \frac{1}{2} \epsilon^{mnpq} F_{pq(a)}, \quad (1.19)$$

$\epsilon^{mnpq}$  — тензор Леви-Чивита, антисимметричный по любой паре своих индексов. Варьируя действие (1.15) относительно метрики, получаем, что

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \Lambda g_{ik} + 8\pi T_{ik}^{(YM)}, \quad (1.20)$$

где тензор  $T_{ik}^{(YM)}$  является тензором энергии-импульса поля Янга–Миллса

$$T_{ik}^{(YM)} = \frac{1}{4} g_{ik} F_{mn}^{(a)} F_{(a)}^{mn} - F_{im}^{(a)} F_{k(a)}^m. \quad (1.21)$$

Очевидно, что уравнения Эйнштейна (1.20) являются инвариантными относительно калибровочных преобразований (1.5), причём, так же как в электродинамике, дивергенция тензора энергии-импульса равна нулю, при условии выполнения уравнений Янга–Миллса (1.16).

#### 1.4. Неминимальное обобщение лагранжиана

Аналогично описанию неминимального взаимодействия гравитации со скалярным и электромагнитным полями, можно феноменологически рассматривать все возможные члены в лагранжиане взаимодействия  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$ , инвариантные относительно калибровочных и координатных преобразований и содержащие компоненты тензора кривизны  $R_{ikmn}$  и тензора напряжённости поля Янга–Миллса  $F_{ik}^{(a)}$ .

Элементы, из которых будут конструироваться такие инварианты, можно разделить на пять типов:

1. метрический тензор  $g_{ik}$ ;
2. тензор кривизны  $R_{ikmn}$ , его свёртки  $R_{ik}$ ,  $R$  и ковариантные производные  $\nabla_l R_{ikmn}$  и т. д.;
3. тензор напряжённости и его производные:  $F_{ik}^{(a)}$ ,  $\hat{D}_m F_{ik}^{(a)}$  и т. д.;
4. тензоры в групповом пространстве:  $G_{(a)(b)}$ ,  $f_{(a)(b)}^{(c)}$ ,  $d_{(a)(b)}^{(c)}$  и т. д.;
5. величины, характеризующую анизотропию в пространстве-времени и/или групповом пространстве:  $U^i$ ,  $X^i$ ,  $\Phi^{(a)}$ ,  $\nabla_k U^i$  и т. д., где  $U^i$  — времениподобный вектор наблюдателя,  $X^i$  — пространственноподобный вектор,  $\Phi^{(a)}$  — триплет скалярных полей, например полей Хиггса.

С другой стороны, эти инварианты могут быть классифицированы по степеням входящего в них тензора  $F_{ik}^{(a)}$ : инварианты первого порядка  $\mathcal{C}_{(a)}^{ik} F_{ik}^{(a)}$ , второго порядка —  $\mathcal{C}_{(a)(b)}^{ikmn} F_{ik}^{(a)} F_{mn}^{(b)}$ , третьего порядка —  $\mathcal{C}_{(a)(b)(c)}^{ikmnpq} F_{ik}^{(a)} F_{mn}^{(b)} F_{pq}^{(c)}$  и так далее. Величины  $\mathcal{C}_{(a)}^{ik}$ ,  $\mathcal{C}_{(a)(b)}^{ikmn}$  и т. п. не содержат компонент тензора напряжённости. Более того, будем считать, что они также не содержат компонент других материальных полей, имеющих групповые индексы (например, полей Хиггса  $\Phi^{(a)}$ ). Следовательно, данные величины должны состоять из комбинаций тензоров кривизны пространства-времени и тензоров в групповом пространстве, постоянных в обычном и ковариантном смысле ( $G_{(a)(b)}$ ,  $f_{(a)(b)(c)}$ ,  $d_{(a)(b)(c)}$ , ...).

Для калибровочной группы  $SU(n)$  набор таких объектов сильно ограничен: тензоров с одним групповым индексом, отличных от нуля, не существует, а любой тензор, имеющий два индекса, должен быть пропорционален  $G_{(a)(b)}$ .

Мы ограничимся рассмотрением моделей, в которых лагранжиан линеен по кривизне пространства-времени, квадратичен по тензору напряжённости поля Янга–Миллса и не содержит производных от тензоров кривизны и напряжённости. Данным требованиям удовлетворяют шестнадцать инвариантов:

$$I_1 = R F_{ik}^{(a)} F_{(a)}^{ik}, \quad I_2 = R^{ik} F_{im}^{(a)} F_{k(a)}^m, \quad I_3 = R^{ikmn} F_{ik}^{(a)} F_{mn(a)},$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= R^{ikmn} F_{im}^{(a)} F_{kn(a)}, & I_5 &= R F_{ik}^{*(a)} F_{(a)}^{*ik}, & I_6 &= R^{ik} F_{im}^{*(a)} F_{k(a)}^m, \\
I_7 &= R^{ikmn} F_{ik}^{*(a)} F_{mn(a)}^*, & I_8 &= R^{ikmn} F_{im}^{*(a)} F_{kn(a)}^*, \\
I_9 &= R^*{}^{ikmn} F_{ik}^{(a)} F_{mn(a)}^*, & I_{10} &= {}^*R^{ikmn} F_{ik}^{(a)} F_{mn(a)}^*, & I_{11} &= {}^*R^*{}^{ikmn} F_{ik}^{(a)} F_{mn(a)}, \\
I_{12} &= R^*{}^{ikmn} F_{im}^{(a)} F_{kn(a)}^*, & I_{13} &= {}^*R^{ikmn} F_{im}^{(a)} F_{kn(a)}^*, & I_{14} &= {}^*R^*{}^{ikmn} F_{im}^{(a)} F_{kn(a)}, \\
I_{15} &= {}^*R^*{}^{ikmn} F_{ik}^{(a)} F_{mn(a)}^*, & I_{16} &= {}^*R^*{}^{ikmn} F_{im}^{(a)} F_{kn(a)}^*,
\end{aligned}$$

где  ${}^*R^{ikmn} = \frac{1}{2} \epsilon^{ikpq} R_{pq}{}^{mn}$ ,  $R^*{}^{ikmn} = \frac{1}{2} \epsilon^{pqmn} R_{pq}^{ik}$ ,  ${}^*R^*{}^{ikmn} = \frac{1}{4} \epsilon^{ikpq} \epsilon^{mnl s} R_{pqls}$ . Однако независимыми среди них являются только первые три, остальные же являются их линейными комбинациями. Таким образом, наиболее общее выражение для  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$ , соответствующее приведённым выше требованиям, имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = \frac{q_1}{2} I_1 + q_2 I_2 + \frac{q_3}{2} I_3 = \frac{1}{2} \mathcal{R}^{ikmn} F_{ik}^{(a)} F_{mn(a)}, \quad (1.22)$$

$$\mathcal{R}^{ikmn} \equiv \frac{q_1}{2} R (g^{im} g^{kn} - g^{in} g^{km}) + \frac{q_2}{2} (R^{im} g^{kn} - R^{in} g^{km} + R^{kn} g^{im} - R^{km} g^{in}) + q_3 R^{ikmn}, \quad (1.23)$$

где  $q_1, q_2, q_3$  — феноменологические постоянные, имеющие размерность [длина]<sup>2</sup>. Полный лагранжиан *неминимальной* модели Эйнштейна–Янга–Миллса, линейный по кривизне пространства-времени и квадратичный по тензору напряжённости, как результат прямого обобщения электродинамической модели, построенной в работе [27] на случай неабелевой калибровочной группы имеет вид:

$$\mathcal{L}_{\text{NMEYM}} = \frac{R + 2\Lambda}{8\pi} + \frac{1}{2} F_{ik}^{(a)} F_{(a)}^{ik} + \frac{1}{2} \mathcal{R}^{ikmn} F_{ik}^{(a)} F_{mn(a)}. \quad (1.24)$$

Вариация действия с данным лагранжианом относительно компонент потенциалов калибровочного поля и метрического тензора даёт, соответственно, обобщения уравнений Янга–Миллса и уравнений Эйнштейна на случай неминимальной связи:

$$\hat{D}_k \mathbf{H}^{ik} = 0, \quad \mathbf{H}^{ik} = \mathbf{F}^{ik} + \mathcal{R}^{ikmn} \mathbf{F}_{mn}, \quad (1.25)$$

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \Lambda g_{ik} + 8\pi T_{ik}^{(\text{eff})}. \quad (1.26)$$

Тензор  $\mathbf{H}^{ik}$  является неабелевым аналогом тензора индукции в электродинамике, а величина  $\mathcal{R}^{ikmn}$  может рассматриваться, следовательно, как неминимальный тензор восприимчивости [27]. Эффективный тензор энергии-импульса  $T_{ik}^{(\text{eff})}$ , стоящий в правой части уравнения (1.26) может быть разбит на четыре слагаемых:

$$T_{ik}^{(\text{eff})} = T_{ik}^{(YM)} + q_1 T_{ik}^{(I)} + q_2 T_{ik}^{(II)} + q_3 T_{ik}^{(III)}. \quad (1.27)$$

Первый член  $T_{ik}^{(YM)}$  является тензором энергии-импульса чистого поля Янга–Миллса (1.21). Выражения для других трёх тензоров имеют вид:

$$T_{ik}^{(I)} = R T_{ik}^{(YM)} - \frac{1}{2} R_{ik} F_{mn}^{(a)} F_{(a)}^{mn} + \frac{1}{2} \left[ \hat{D}_i \hat{D}_k - g_{ik} \hat{D}^l \hat{D}_l \right] \left[ F_{mn}^{(a)} F_{(a)}^{mn} \right], \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned}
T_{ik}^{(II)} &= -\frac{1}{2} g_{ik} \left[ \hat{D}_m \hat{D}_l \left( F_{(a)}^{mn} F_{(a)}^l \right) - R_{lm} F_{(a)}^{mn} F_{(a)}^l \right] - F_{(a)}^{ln} \left( R_{il} F_{kn}^{(a)} + R_{kl} F_{in}^{(a)} \right) - \\
&- R^{mn} F_{im}^{(a)} F_{kn(a)} - \frac{1}{2} \hat{D}^m \hat{D}_m \left( F_{in}^{(a)} F_{k(a)}^n \right) + \frac{1}{2} \hat{D}_l \left[ \hat{D}_i \left( F_{kn}^{(a)} F_{(a)}^{ln} \right) + \hat{D}_k \left( F_{in}^{(a)} F_{(a)}^{ln} \right) \right], \quad (1.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{ik}^{(III)} &= \frac{1}{4} g_{ik} R^{mnl s} F_{mn}^{(a)} F_{ls(a)} - \frac{3}{4} F_{(a)}^{ls} \left( F_i{}^{n(a)} R_{knls} + F_k{}^{n(a)} R_{inls} \right) - \\
&- \frac{1}{2} \hat{D}_m \hat{D}_n \left[ F_i{}^{n(a)} F_{k(a)}^m + F_k{}^{n(a)} F_{i(a)}^m \right]. \quad (1.30)
\end{aligned}$$

Используя свойства тензора Римана, коммутационные соотношения между ковариантными производными и уравнения Янга–Миллса (1.25), можно показать, что тензор  $T_{ik}^{(\text{eff})}$ , также как и в минимальном случае, удовлетворяет закону сохранения  $\nabla^k T_{ik}^{(\text{eff})} = 0$ .

В отличие от бесследового тензора энергии-импульса поля Янга–Миллса  $T_{ik}^{(YM)}$ , тензор  $T^{(\text{eff})}$  имеет след, отличный от нуля:

$$T^{(\text{eff})} = -\frac{1}{2}\mathcal{R}^{mnl}s F_{mn}^{(a)}F_{ls(a)} - (q_2 + q_3)\hat{D}_m\hat{D}_n[F^{kn(a)}F_k^m] - \frac{1}{2}(3q_1 + q_2)\hat{D}^k\hat{D}_k[F_{mn}^{(a)}F_{(a)}^{mn}]. \quad (1.31)$$

Параметры  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$ , вообще говоря, являются произвольными; их количество может быть сведено к минимуму, если воспользоваться некоторыми дополнительными соображениями симметрии. Приведем четыре примера такой редукции.

а) *Тензор восприимчивости пропорционален тензору Римана.*

Если допустить, что  $\mathcal{R}_{ikmn} = qR_{ikmn}$ , как это сделал Прасанна [4], то мы получим, что  $q_1 = q_2 = 0$ ,  $q_3 = q$ , где  $q$  — единственный произвольный параметр.

б) *Тензор восприимчивости пропорционален дважды дуальному тензору Римана.*

Гравитационным аналогом дуального тензора Максвелла является дважды дуальный тензор Римана

$$G_{ikmn} = {}^*R_{ikmn}^* = \frac{1}{4}\epsilon_{ikpq}\epsilon_{mnr}sR^{pqrs}. \quad (1.32)$$

Аналогия эта связана с тем, что тензор  $G_{ikmn}$  также удовлетворяет тождеству

$$\nabla^i G_{ikmn} = 0. \quad (1.33)$$

С другой стороны, дважды дуальный тензор Римана может быть представлен в виде

$$G_{ikmn} = -\frac{1}{2}R(g_{im}g_{kn} - g_{in}g_{km}) + (R_{im}g_{kn} + R_{kn}g_{im} - R_{in}g_{km} - R_{km}g_{in}) - R_{ikmn}. \quad (1.34)$$

Таким образом, если предположить, что тензор восприимчивости  $\mathcal{R}_{ikmn}$  пропорционален дважды дуальному тензору Римана, мы получаем однопараметрическую модель, для которой  $q_1 = q_3 = -q$ ,  $q_2 = 2q$ . Впервые такая модель для описания неминимального взаимодействия гравитационного и электромагнитного полей рассматривалась Хорндески в 1976 году [28]. Позднее тот же лагранжиан был построен Бухдалем [29] и Мюллер-Хойссеном [30] путём размерной редукции пятимерного лагранжиана Гаусса–Бонне. Хорндески и Мюллер-Хойссен обобщили модель на случай неабелевого калибровочного поля [10, 11]. Отличительной особенностью рассматриваемой модели является то обстоятельство, что наибольший порядок производных от потенциалов калибровочного поля и метрического тензора во всех уравнениях равен двум [10, 11].

в) *Тензор восприимчивости пропорционален тензору Вейля.*

Тензор конформной кривизны (тензор Вейля) имеет вид

$$C_{ikmn} = R_{ikmn} - \frac{1}{2}(R_{im}g_{kn} + R_{kn}g_{im} - R_{in}g_{km} - R_{km}g_{in}) + \frac{1}{6}R(g_{im}g_{kn} - g_{in}g_{km}). \quad (1.35)$$

Свёртка тензора Вейля по любой паре индексов равна нулю:  $g^{im}C_{ikmn} = 0$ . Если предположить, что тензор восприимчивости пропорционален тензору конформной кривизны, то  $3q_1 + q_2 = 0$ ,  $q_2 + q_3 = 0$ . Необходимо отметить, что в данной модели в случае конформно плоского пространства-времени уравнения динамики калибровочного поля (1.25) совпадают с минимальными уравнениями Янга–Миллса.

г) *Модель Драммонда–Хатрелла.*

Драммонд и Хатрелл в [6], рассматривая однопетлевые поправки к лагранжиану в рамках квантовой электродинамики в искривлённом пространстве-времени, получили явные выражения для констант неминимального взаимодействия  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ :

$$q_1 = -5q, \quad q_2 = 13q, \quad q_3 = -2q, \quad q = \frac{\alpha_{\text{em}}}{180\pi m^2}, \quad (1.36)$$

где  $m$  — масса электрона,  $\alpha_{\text{em}} \approx 1/137$  — постоянная тонкой структуры.

Несмотря на то, что данная модель получена в рамках неминимального расширения электродинамики, формально можно рассматривать константы  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ , связанные теми же соотношениями, и в случае неминимальной теории Эйнштейна–Янга–Миллса.



### 1.5. Неминимальная модель Эйнштейна–Янга–Миллса с параллельными полями

Для параллельных калибровочных полей  $A_m^{(a)} = A_m q^{(a)}$ ,  $F_{mn}^{(a)} = F_{mn} q^{(a)}$ , где  $q^{(a)}$  — константы, уравнения Янга–Миллса запишутся как

$$\nabla_k H^{ik} = 0, \quad H^{ik} = F^{ik} + \mathcal{R}^{ikmn} F_{mn}. \quad (1.37)$$

Аналогично можно переписать и систему уравнений Эйнштейна:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = 8\pi q^2 T_{ik}^{(\text{eff})}, \quad q^2 \equiv q^{(a)} q_{(a)}. \quad (1.38)$$

Здесь  $T_{ik}^{(\text{eff})}$  представляет собой эффективный тензор энергии-импульса

$$T_{ik}^{(\text{eff})} = T_{ik}^{(M)} + q_1 T_{ik}^{(1)} + q_2 T_{ik}^{(2)} + q_3 T_{ik}^{(3)}, \quad (1.39)$$

а тензоры  $T_{ik}^{(M)}$ ,  $T_{ik}^{(1)}$ ,  $T_{ik}^{(2)}$  и  $T_{ik}^{(3)}$  задаются соотношениями

$$T_{ik}^{(M)} \equiv \frac{1}{4} g_{ik} F_{mn} F^{mn} - F_{in} F_k{}^n, \quad (1.40)$$

$$T_{ik}^{(1)} = R T_{ik}^{(M)} - \frac{1}{2} R_{ik} F_{mn} F^{mn} + \frac{1}{2} [\nabla_i \nabla_k - g_{ik} \nabla^l \nabla_l] F_{mn} F^{mn}, \quad (1.41)$$

$$T_{ik}^{(2)} = -\frac{1}{2} g_{ik} \left[ \nabla_m \nabla_l (F^{mn} F^l{}_n) - R_{lm} F^{mn} F^l{}_n \right] - F^{ln} (R_{il} F_{kn} + R_{kl} F_{in}) - R^{mn} F_{im} F_{kn} - \\ - \frac{1}{2} \nabla^m \nabla_m (F_{in} F_k{}^n) + \frac{1}{2} \nabla_l [\nabla_i (F_{kn} F^{ln}) + \nabla_k (F_{in} F^{ln})], \quad (1.42)$$

$$T_{ik}^{(3)} = \frac{1}{4} g_{ik} R^{mnl} F_{mn} F_{ls} - \frac{3}{4} F^{ls} (F_i{}^n R_{knls} + F_k{}^n R_{inls}) - \frac{1}{2} \nabla_m \nabla_n [F_i{}^n F_k{}^m + F_k{}^n F_i{}^m]. \quad (1.43)$$

Очевидно, что неминимальная модель калибровочного поля с параллельными потенциалами в точности воспроизводит неминимальную электродинамическую модель, так что результаты, полученные в первом случае, автоматически переносятся на второй.

## 2. Неминимальная модель Ву–Янга и примеры точных решений для статических полей со сферической симметрией

### 2.1. Неминимальный монополю Ву–Янга

Будем считать, что пространство-время является статическим, сферически-симметричным и описывается метрикой вида

$$ds^2 = \sigma^2 N dt^2 - \frac{dr^2}{N} - R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.1)$$

где функции  $\sigma$ ,  $N$  и  $R$  зависят только от «радиальной» переменной  $r$ . Если минимальное значение функции  $R^2(r)$  равно нулю, то говорят, что пространство-время имеет «центр».

Рассмотрим неминимальную модель Эйнштейна–Янга–Миллса с метрикой (2.1) при  $R(r) = r$ ; для специального случая  $q_1 + q_2 + q_3 = 0$ ,  $2q_1 + q_2 = 0$  такая модель с точечным магнитным зарядом исследовалась в работе [31]. Мы сосредоточим своё внимание на калибровочном поле, которое подчиняется специальному требованию (см. [32]):

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_r = 0, \quad \mathbf{A}_\theta = -i \left( \frac{w}{\nu} - 1 \right) \mathbf{t}_\varphi, \quad \mathbf{A}_\varphi = i (w - \nu) \sin \theta \mathbf{t}_\theta. \quad (2.2)$$

Генераторы  $\mathbf{t}_r$ ,  $\mathbf{t}_\theta$  и  $\mathbf{t}_\varphi$  зависят от координат и связаны со стандартными генераторами группы  $SU(2)$  как

$$\mathbf{t}_r = \cos \nu \varphi \sin \theta \mathbf{t}_{(1)} + \sin \nu \varphi \sin \theta \mathbf{t}_{(2)} + \cos \theta \mathbf{t}_{(3)}, \quad \mathbf{t}_\theta = \partial_\theta \mathbf{t}_r, \quad \mathbf{t}_\varphi = \frac{1}{\nu \sin \theta} \partial_\varphi \mathbf{t}_r, \quad (2.3)$$

причём

$$[\mathbf{t}_r, \mathbf{t}_\theta] = i \mathbf{t}_\varphi, \quad [\mathbf{t}_\theta, \mathbf{t}_\varphi] = i \mathbf{t}_r, \quad [\mathbf{t}_\varphi, \mathbf{t}_r] = i \mathbf{t}_\theta. \quad (2.4)$$

Тензор напряжённости в рассматриваемом случае имеет только одну ненулевую компоненту:

$$\mathbf{F}_{\theta\varphi} = -i \frac{(w^2 - \nu^2)}{\nu} \sin \theta \mathbf{t}_r, \quad (2.5)$$

которая не зависит от переменной  $r$ , и система уравнений Янга–Миллса сводится к одному уравнению

$$\frac{w(w^2 - \nu^2)}{r^4} (1 + 2\mathcal{R}^{\theta\varphi}_{\theta\varphi}) = 0. \quad (2.6)$$

Существуют три формальные возможности удовлетворить соотношению (2.6): во-первых,  $w = 0$ , во-вторых,  $w = \pm\nu$ , в-третьих,  $1 + 2\mathcal{R}^{\theta\varphi}_{\theta\varphi} = 0$ . Если пространство-время является асимптотически плоским ( $R_{ikmn}(r \rightarrow \infty) = 0$ ), то последний множитель в уравнении (2.6) не может быть равен нулю тождественно. Когда  $w = \pm\nu$ , из (2.5) мы получаем, что  $\mathbf{F}_{ik}$  равно нулю и, следовательно, данное решение описывает так называемую чистую калибровку. Наконец, когда  $w = 0$ , мы имеем дело с монопольным решением Ву–Янга, напряжённость поля Янга–Миллса которого  $\mathbf{F}_{\theta\varphi} = i\nu \sin \theta \mathbf{t}_r$ , такая же, как в минимальном случае [22]. Как известно, это решение является эффективно абелевым, так как с помощью подходящего калибровочного преобразования  $\mathbf{U} = \exp(-i\theta \mathbf{t}_\varphi)$  оно может быть преобразовано в произведение потенциала дираковского типа и генератора калибровочной группы  $\mathbf{t}_{(3)}$ .

## 2.2. Точное регулярное решение уравнений гравитационного поля для неминимального монополя Ву–Янга

**Ключевые уравнения.** Для метрики (2.1) с  $R = r$  только четыре компоненты тензора Эйнштейна отличны от нуля:

$$G_0^0 = \frac{1-N}{r^2} - \frac{N'}{r}, \quad G_r^r = \frac{1-N}{r^2} - \frac{N'}{r} - \frac{2N\sigma'}{r\sigma}, \quad (2.7)$$

$$G_\theta^\theta = G_\varphi^\varphi = -\frac{1}{2r\sigma} (2\sigma N' + 2N\sigma' + 3r\sigma'N' + 2rN\sigma'' + r\sigma N''). \quad (2.8)$$

Штрих означает производную по радиальной переменной  $r$ . Соответствующие четыре ненулевые компоненты эффективного тензора энергии-импульса (1.27)–(1.30) имеют вид

$$T_0^{0(\text{eff})} = \frac{\nu^2}{\mathcal{G}^2} \left[ \frac{1}{2r^4} - q_1 \frac{N'}{r^5} + (13q_1 + 4q_2 + q_3) \frac{N}{r^6} - (q_1 + q_2 + q_3) \frac{1}{r^6} \right], \quad (2.9)$$

$$T_r^{r(\text{eff})} = \frac{\nu^2}{\mathcal{G}^2} \left[ \frac{1}{2r^4} - q_1 \frac{N'}{r^5} - 2q_1 \frac{N\sigma'}{r^5\sigma} - (7q_1 + 4q_2 + q_3) \frac{N}{r^6} - (q_1 + q_2 + q_3) \frac{1}{r^6} \right], \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} T_\theta^{\theta(\text{eff})} = T_\varphi^{\varphi(\text{eff})} = & -\frac{\nu^2}{\mathcal{G}^2} \left[ \frac{1}{2r^4} - \frac{3q_1\sigma'N'}{2\sigma r^4} - \frac{q_1 N\sigma''}{\sigma r^4} - \frac{q_1 N''}{2r^4} - \right. \\ & \left. - (7q_1 + 4q_2 + q_3) \left( \frac{(\sigma N)'}{\sigma r^5} - \frac{2N}{r^6} \right) + (q_1 + q_2 + q_3) \frac{2}{r^6} \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Уравнение  $G_\theta^\theta = 8\pi T_\theta^{\theta(\text{eff})}$  является дифференциальным следствием двух первых уравнений Эйнштейна. Следствие из этих двух уравнений,  $G_0^0 - G_r^r = 8\pi (T_0^{0(\text{eff})} - T_r^{r(\text{eff})})$ , даёт уравнение на функцию  $\sigma(r)$ :

$$r \frac{\sigma'}{\sigma} \left( 1 - \frac{\kappa q_1}{r^4} \right) = \frac{\kappa(10q_1 + 4q_2 + q_3)}{r^4}. \quad (2.12)$$

Здесь  $\kappa = \frac{8\pi\nu^2}{\mathcal{G}^2}$  — новая удобная константа, имеющая размерность площади. Функция  $N(r)$  удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$rN' \left( 1 - \frac{\kappa q_1}{r^4} \right) + N \left[ 1 + \frac{\kappa}{r^4} (13q_1 + 4q_2 + q_3) \right] = 1 - \frac{\kappa}{2r^2} + \frac{\kappa}{r^4} (q_1 + q_2 + q_3). \quad (2.13)$$

**Минимальный предел**  $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ . Если  $q_1, q_2, q_3$  равны нулю, уравнение (2.12) и асимптотическое условие  $\sigma(\infty) = 1$  дают  $\sigma(r) = 1$ . Тогда из уравнения (2.13) получаем

$$N = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa}{2r^2}, \quad (2.14)$$

где  $M$  — константа интегрирования, описывающая асимптотическую массу монополя (в геометрических единицах  $2M$  равно радиусу Шварцшильда  $r_g$ ). Это решение типа Рейсснера–Нордстрёма.

**Неминимальные модели с  $q_1 \neq 0$ .** Для произвольных  $q_1, q_2, q_3$  уравнения (2.12) и (2.13) с условием  $\sigma(\infty) = 1$  дают

$$\sigma = \left(1 - \frac{\kappa q_1}{r^4}\right)^\beta, \quad \beta \equiv \frac{10q_1 + 4q_2 + q_3}{4q_1}, \quad (2.15)$$

$$N = 1 - \frac{1}{r} \cdot \left(1 - \frac{\kappa q_1}{r^4}\right)^{-(\beta+1)} \left\{ 2M - \frac{\kappa}{2} \int_r^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \left[ 1 + \frac{6}{x^2} (4q_1 + q_2) \right] \left(1 - \frac{\kappa q_1}{x^4}\right)^\beta \right\}. \quad (2.16)$$

Когда  $r \rightarrow \infty$  эти решения асимптотически ведут себя как

$$\sigma = 1 - \frac{\kappa q_1}{r^4} \beta + \dots, \quad N = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa}{2r^2} + \frac{\kappa}{r^4} (4q_1 + q_2) + \dots, \quad (2.17)$$

то есть ведущие члены разложения описывают решение Рейсснера–Нордстрёма, а неминимальные члены появляются, начиная с четвёртого порядка по  $\frac{1}{r}$ .

Когда  $r \rightarrow 0$ , функция  $\sigma(r)$  может стремиться к бесконечности, если  $\beta$  положительна, может стремиться к нулю, если  $\beta$  отрицательна, и остаётся равной единице, если  $\beta = 0$ . Другими словами, метрический коэффициент  $g_{00} = \sigma^2 N$  может быть нерегулярным в начале координат  $r = 0$ , когда  $10q_1 + 4q_2 + q_3 \neq 0$ . Более того, когда параметр  $q_1$  положителен,  $\sigma(r)$  равна нулю в точке  $r_{(s)} = (\kappa q_1)^{\frac{1}{4}}$ , если  $\beta > 0$ , и становится бесконечной, если  $\beta < 0$ , обеспечивая равенство бесконечности инвариантов кривизны при  $r_{(s)}$ . Чтобы проиллюстрировать это замечание, положим, что  $\beta = 1$ , или, эквивалентно,  $6q_1 + 4q_2 + q_3 = 0$ . Тогда получаем точное решение

$$\sigma = 1 - \left(\frac{r_{(s)}}{r}\right)^4, \quad (2.18)$$

$$N = 1 - \left[ 1 - \left(\frac{r_{(s)}}{r}\right)^4 \right]^{-2} \left\{ \frac{2M}{r} - \frac{\kappa}{2r^2} \left[ 1 - \frac{1}{5} \left(\frac{r_{(s)}}{r}\right)^4 + \frac{2(4q_1 + q_2)}{r^2} \left[ 1 - \frac{3}{7} \left(\frac{r_{(s)}}{r}\right)^4 \right] \right] \right\}, \quad (2.19)$$

для которого,  $\sigma(r_{(s)}) = 0$ . Что касается величины  $N(r_{(s)})$ , то она может быть конечной, бесконечной или равной нулю в зависимости от соотношения между  $q_1, q_2, M$  и  $\kappa$ . Например, когда  $q_1 = \frac{\kappa}{16}$ ,  $q_2 = -\frac{\kappa}{8}$  и  $M = \frac{24}{35}\sqrt{\kappa}$ , получаем, что  $r_{(s)} = \frac{\sqrt{\kappa}}{2}$  и  $N(r_{(s)}) = 0$ , однако скаляр Риччи  $R$  и квадратичные инварианты кривизны  $R_{ik}R^{ik}, R_{ikmn}R^{ikmn}$  регулярны в точке  $r_{(s)}$ . В других случаях эти инварианты обращаются в бесконечность. Таким образом, можно определить такую точку  $r = r_{(s)}$  как особую неминимальную сингулярность. Когда  $q_1$  отрицательно, такая сингулярность не появляется.

**Неминимальные модели с  $q_1 = 0$ .** Так как  $q_1$  появляется в знаменателе выражения для  $\beta$  (2.15), рассмотрим теперь специальный случай  $q_1 = 0$ . Теперь метрические функции имеют вид:

$$\sigma = \exp \left\{ -\frac{\kappa}{4r^4} (4q_2 + q_3) \right\}, \quad (2.20)$$

$$N = 1 - \frac{1}{r} \cdot \exp \left\{ \frac{\kappa(4q_2 + q_3)}{4r^4} \right\} \times \left( 2M - \frac{\kappa}{2} \int_r^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \left( 1 + \frac{6q_2}{x^2} \right) \exp \left\{ -\frac{\kappa(4q_2 + q_3)}{4x^4} \right\} \right). \quad (2.21)$$

Очевидный аналитический прогресс возможен для модели с  $q_3 = -4q_2$ . Действительно, для этой модели  $\sigma(r) = 1$ , а явное точное решение для функции  $N(r)$  имеет вид:

$$N = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa}{2r^2} + \frac{\kappa q_2}{r^4}. \quad (2.22)$$

Мы имеем дело с неминимальным обобщением решения Рейсснера–Нордстрёма с  $N(0) = \infty$ . Такое решение обладает горизонтами, когда алгебраическое уравнение четвёртого порядка

$$r^4 - 2Mr^3 + \frac{\kappa}{2}r^2 + \kappa q_2 = 0 \quad (2.23)$$

имеет вещественные положительные корни. Отметим два точно решаемых случая, допускающие специфические неминимальные горизонты.

(i)  $M = 0$  и  $q_2 < 0$

Тогда положительный вещественный корень (2.23)

$$r = r_{(H)} = \frac{1}{2}\sqrt{\kappa}\sqrt{\sqrt{1 + \frac{16|q_2|}{\kappa}} - 1}. \quad (2.24)$$

В минимальном пределе  $r_{(H)}$  совпадает с  $r = 0$  и стремится к  $\sqrt{2|q_2|}$ , когда  $|q_2| \ll \kappa$ .

(ii)  $\kappa = 2M^2$  и  $q_2 < 0$

Уравнение (2.23) имеет вещественный положительный корень

$$r_{(H1)} = \frac{M}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4\sqrt{2|q_2|}}{M}} \right). \quad (2.25)$$

Если, вдобавок,  $M > 4\sqrt{2|q_2|}$ , то существуют ещё два корня

$$r_{(H2,3)} = \frac{M}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\sqrt{2|q_2|}}{M}} \right). \quad (2.26)$$

В минимальном пределе условие  $\kappa = 2M^2$  представляет так называемую экстремальную чёрную дыру Рейсснера–Нордстрёма, для которой оба горизонта совпадают. Если  $q_2 < 0$ , специфические радиусы  $r_{(H1)}$ ,  $r_{(H2)}$  и  $r_{(H3)}$  играют роль неминимальных радиусов горизонтов. Заметим, что, когда  $q_2$  стремится к нулю,  $r_{(H1)} \rightarrow r_{(H2)} \rightarrow M$  и  $r_{(H3)} \rightarrow 0$ .

**Регулярная однопараметрическая модель.** Когда  $10q_1 + 4q_2 + q_3 = 0$ ,  $4q_1 + q_2 = 0$ , то есть,  $q_1 = -q$ ,  $q_2 = 4q$ ,  $q_3 = -6q$ , и  $q$  положительно, мы получаем новое явное точное решение

$$\sigma(r) = 1, \quad N(r) = 1 + \frac{r^2(k - 4Mr)}{2(r^4 + \kappa q)}. \quad (2.27)$$

Найденная функция  $N(r)$  принимает значение  $N = 1$  в трёх точках:  $N(0) = 1$ ,  $N(\frac{\kappa}{4M}) = 1$ ,  $N(\infty) = 1$  (асимптотически). Если  $M = 0$  вторая и третья точки совпадают,  $N(r) \geq 1$  и  $N(r)$  имеет только один экстремум, максимум, в точке  $r_{(\max)} = (\kappa q)^{\frac{1}{4}}$ . Если  $M \neq 0$  наблюдается следующая тенденция, когда масса  $M$  возрастает. Для небольших  $M$  имеется минимум в некоторой точке  $r_{(\min)}$  ( $r_{(\min)} > \frac{\kappa}{4M}$ ), для которой  $0 < N_{(\min)} < 1$ . Затем этот минимум достигает значения  $N_{(\min)} = 0$ , когда масса принимает некоторое критическое значение  $M_{(\text{crit})}$ ,

$$M_{(\text{crit})} = \frac{r_*}{6} \left( 4 + \frac{\kappa}{r_*^2} \right), \quad r_* = \frac{\sqrt{\kappa}}{2} \sqrt{\left( \sqrt{1 + \frac{48q}{\kappa}} + 1 \right)}. \quad (2.28)$$

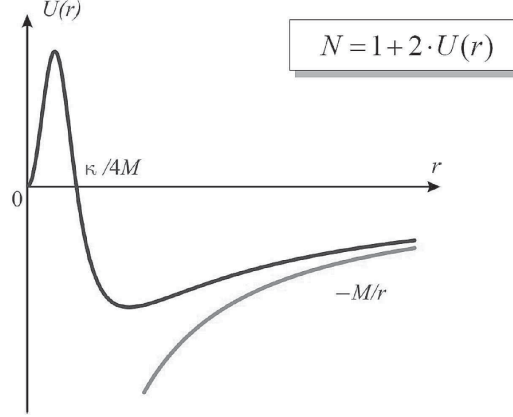
Таким образом, когда  $M < M_{(\text{crit})}$  метрика (2.27) не имеет горизонтов, когда  $M > M_{(\text{crit})}$ , существуют два горизонта,  $r_-$  и  $r_+$ . Когда  $M = M_{(\text{crit})}$  функция  $N(r)$  равна нулю только при  $r = r_*$ , то есть, в этом случае метрика (2.27) является неминимальным аналогом экстремального решения Рейсснера–Нордстрёма. Если  $q = 0$ , параметр  $r_*$  совпадает с радиусом Рейсснера–Нордстрёма,  $r_Q = \sqrt{\frac{\kappa}{2}}$ .

Уникальность точного решения (2.27) состоит в том, что оно регулярно в точке  $r = 0$ , так как знаменатель не может обращаться в нуль, а инварианты кривизны  $R$ ,  $R_{ik}R^{ik}$ ,  $R_{ikmn}R^{ikmn}$  конечны при  $r = 0$ .

Эффективный тензор энергии-импульса для данного решения в окрестности начала координат не удовлетворяет слабому энергетическому условию, так как

$$T_0^{0(\text{eff})} = \frac{\kappa}{16\pi} \cdot \frac{r^4 + 16Mqr - 3\kappa q}{(r^4 + \kappa q)^2} \quad (2.29)$$

и, следовательно, при достаточно малых  $r$  (например, при  $r = 0$ ) существует времениподобный вектор  $U^i = \delta_0^i$ , для которого  $T_{ik}^{(\text{eff})} U^i U^k < 0$ .



**Рис. 2.** Гравитационный потенциал в регулярной неминимальной модели. Нижняя линия соответствует классическому ньютоновскому гравитационному потенциалу с особенностью типа  $\frac{1}{r}$  в центре. Приливные взаимодействия обеспечивают наличие трех новых элементов в профиле потенциала: во-первых, минимума потенциала и соответствующей зоны отдыха; во-вторых, максимума потенциала и соответствующего отталкивающего барьера, расположенного между экстремумами; в-третьих, минимума потенциала в центре с ловушкой в его окрестности.

### 3. Неминимальные кротовые норы

#### 3.1. Решение в модели «без центра»

Основной особенностью физики кротовых нор является тот факт, что проходимые кротовые норы связаны с неизбежным нарушением светового энергетического условия, то есть, материя, находящаяся в горловине кротовой норы, должна обладать «экзотическими» свойствами [33]. Альтернативу такой экзотической субстанции может составить калибровочное поле, неминимально связанное с гравитационным полем объекта.

Пусть в метрике (2.1) радиальная функция задается соотношением  $R^2 = r^2 + a^2$ , а калибровочное поле будет иметь вид

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_r = 0, \quad \mathbf{A}_\theta = it_\varphi, \quad \mathbf{A}_\varphi = -i\nu \sin\theta \mathbf{t}_\theta. \quad (3.1)$$

Повторяя процедуру, примененную нами при нахождении монопольных решений, получим функцию  $\sigma(r)$  в явной форме для произвольных значений параметров  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$ :

$$\sigma(r) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}} \left[ 1 - \frac{\kappa q_1}{(r^2 + a^2)^2} \right]^{\frac{10q_1 + 4q_2 + q_3}{4q_1}}, \quad (3.2)$$

и уравнение на функцию  $N(r)$ :

$$r \left[ 1 - \frac{\kappa q_1}{(r^2 + a^2)^2} \right] N' + N \left[ 1 + \frac{a^2}{(r^2 + a^2)} + \frac{\kappa(13q_1 + 4q_2 + q_3)}{(r^2 + a^2)^2} - \frac{\kappa a^2(15q_1 + 4q_2 + q_3)}{(r^2 + a^2)^3} \right] = 1 - \frac{\kappa}{2(r^2 + a^2)} + \frac{\kappa(q_1 + q_2 + q_3)}{(r^2 + a^2)^2}. \quad (3.3)$$

**Случай  $q_1 < 0$ .** Для отрицательного  $q_1$  функция  $\sigma(r)$  имеет вид

$$\sigma(r) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}} \left[ 1 + \frac{\kappa|q_1|}{(r^2 + a^2)^2} \right]^{\frac{10|q_1| - 4q_2 - q_3}{4|q_1|}}. \quad (3.4)$$

Отметим, что  $\sigma(r)$  в (3.4) превращается в нуль при  $r = 0$ , то есть  $\sigma(0) = 0$ . Такое решение не может описывать проходимость кротовую нору. Заметим, также, что  $\sqrt{-g(0)} = 0$ , где  $g$  — детерминант  $g_{ik}$ ,  $g = -\sigma^2(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta$ . Это означает, что выбранная система координат является плохо определённой при  $r = 0$ , и не имеет особенностей только при  $r \in (0, +\infty)$  (или, эквивалентно, при  $(-\infty, 0)$ ).

**Случай  $q_1 = 0$ .** В этом случае решение для  $\sigma(r)$  преобразуется в

$$\sigma(r) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}} \exp \left\{ -\frac{\kappa(4q_2 + q_3)}{(r^2 + a^2)^2} \right\}. \quad (3.5)$$

Функция  $\sigma(r)$  равна нулю при  $r = 0$ , то есть  $\sigma(0) = 0$ . Это означает, что и случай  $q_1 = 0$  не допускает существования проходимых кротовых нор.

**Случай  $q_1 > 0$ .** Для положительного  $q_1$  тип решения существенно зависит от управляющего параметра  $\beta \equiv (\kappa q_1)^{1/4}$ . Рассмотрим три случая.

(i)  $\beta < a$ . Перепишем решение для (3.2) следующим образом:

$$\sigma(r) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}} \left[ \frac{(r^2 + a^2 - \beta^2)(r^2 + a^2 + \beta^2)}{(r^2 + a^2)^2} \right]^{\frac{10q_1 + 4q_2 + q_3}{4q_1}}. \quad (3.6)$$

Очевидно, что благодаря условию  $\beta < a$  выражение в квадратных скобках в формуле (3.6) положительно для любого  $r$ . Следовательно, для всех значений параметра  $(10q_1 + 4q_2 + q_3)/4q_1$  функция  $\sigma(r)$  имеет тот же знак, что и  $r$ , и обращается в нуль при  $r = 0$ , то есть  $\sigma(0) = 0$ . Так же как предыдущих случаях, это означает, что проходимость кротовые норы не существуют.

(ii)  $\beta > a$ . В этом случае выражение в квадратных скобках в уравнении (3.6) равно нулю, если  $r = r^* \equiv (\beta^2 - a^2)^{1/2}$ . Тогда, в зависимости от знака величины  $(10q_1 + 4q_2 + q_3)/4q_1$ , решение  $\sigma(r)$  обращается в нуль или стремится к бесконечности при  $r = r^*$ . Когда  $10q_1 + 4q_2 + q_3 = 0$ , снова имеем, что  $\sigma(0) = 0$ . Таким образом, случай  $\beta > a$  также не допускает проходимых кротовых нор.

(iii)  $\beta = a$  (или, эквивалентно,  $q_1 = a^4/\kappa$ ). Решение (3.6) для функции  $\sigma(r)$  удобно переписать в следующей форме:

$$\sigma(r) = \sqrt{\frac{r^2 + a^2}{r^2 + 2a^2}} \left[ \frac{r^2(r^2 + 2a^2)}{(r^2 + a^2)^2} \right]^{\frac{12q_1 + 4q_2 + q_3}{4q_1}}. \quad (3.7)$$

Поведение  $\sigma(r)$  вблизи  $r = 0$  существенно зависит от знака параметра  $12q_1 + 4q_2 + q_3$ , стоящего в показателе степени. В частности, для  $12q_1 + 4q_2 + q_3 > 0$  имеем  $\sigma(0) = 0$ , в то время как если  $12q_1 + 4q_2 + q_3 < 0$ , то  $\sigma(0) = \infty$ . Такое поведение  $\sigma(r)$  исключает проходимость кротовые норы. Рассмотрим последний случай, когда  $12q_1 + 4q_2 + q_3 = 0$ . В этом случае мы получаем, что

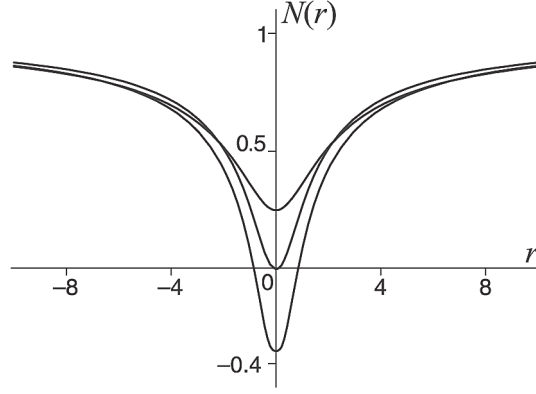
$$\sigma(r) = \sqrt{\frac{r^2 + a^2}{r^2 + 2a^2}}. \quad (3.8)$$

Функция  $\sigma(r)$ , данная в (3.8), является регулярной и положительной во всём интервале  $(-\infty, +\infty)$ , более того,  $\sigma(\pm\infty) = 1$ . Таким образом,  $\sigma(r)$  удовлетворяет всем необходимым условиям, и соответствующая полевая конфигурация может рассматриваться как кандидат для поиска проходимых кротовых нор. В следующем параграфе мы дополним решение для  $\sigma(r)$  решением для функции  $N(r)$  и обсудим свойства неминимальной кротовой норы Ву–Янга.

### 3.2. Неминимальная кротовая нора Ву–Янга

В этом параграфе мы детально рассмотрим специальный случай, соответствующий следующему выбору параметров неминимального взаимодействия  $q_1, q_2, q_3$ :

$$q_1 = a^4/\kappa, \quad 12q_1 + 4q_2 + q_3 = 0. \quad (3.9)$$



**Рис. 3.** Графики функции  $N(r)$  для случаев  $\alpha \equiv a\kappa^{-1/2} > 1/2$ ,  $\alpha = 1/2$ , и  $\alpha < 1/2$ .

Тогда уравнение (3.3) может быть легко проинтегрировано в квадратурах

$$N(r) = \frac{(r^2 + a^2)^{3/2}}{r^3 \sqrt{r^2 + 2a^2}} \left\{ \int_0^r \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2} \sqrt{x^2 + 2a^2}} \left[ x^4 + 2x^2 \left( a^2 - \frac{\kappa}{4} \right) - \left( 10a^4 + \frac{\kappa a^2}{2} + 3\kappa q_2 \right) \right] + C \right\}, \quad (3.10)$$

где  $C$  — константа интегрирования. Отметим, что для произвольных значений  $a$ ,  $q_2$  и  $C$  функция  $N(r)$  из (3.10) удовлетворяет асимптотическому условию  $N(\pm\infty) = 1$ . Вблизи  $r = 0$  выражение для  $N(r)$ , вообще говоря, расходится. Такое поведение  $N(r)$  является неподходящим для описания проходимых кротовых нор. Однако существуют специальные значения параметров  $q_2$  и  $C$ , а именно:

$$C = 0, \quad q_2 = -\frac{10a^4}{3\kappa} - \frac{a^2}{6}, \quad (3.11)$$

для которых решение (2.13) превращается в

$$N(r) = \frac{(r^2 + a^2)^{3/2}}{r^3 \sqrt{r^2 + 2a^2}} J(r), \quad (3.12)$$

где

$$J(r) = \int_0^r \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^{3/2} \sqrt{x^2 + 2a^2}} \left( x^2 + 2a^2 - \frac{\kappa}{2} \right) \quad (3.13)$$

— функция от  $r$  и двух управляющих параметров,  $a$  и  $\kappa$ . В окрестности  $r = 0$  функция  $N(r)$ , данная в (3.12), ведёт себя как

$$N(r) = (3a^2)^{-1} (a^2 - \kappa/4) + O(r^2). \quad (3.14)$$

Отсюда видно, что  $N(r)$  может быть положительной, отрицательной или равной нулю при  $r = 0$  в зависимости от отношения между двумя параметрами:  $a$  (радиусом горловины кротовой норы) и  $\kappa$  (зарядовым параметром). В дальнейшем будет удобно использовать безразмерный параметр  $\alpha = a\kappa^{-1/2}$ . Поведение функции  $N(r)$  в зависимости от  $\alpha$  проиллюстрировано на Рис. 3.

Принимая во внимание соотношения  $g_{00} = \sigma^2 N$ ,  $-g_{rr} = 1/N$  и используя решения (3.8), (3.12) для  $\sigma(r)$  и  $N(r)$  окончательно получаем следующую метрику, которая представляет собой новое точное решение неминимально модифицированных уравнений Эйнштейна–Янга–Миллса:

$$ds^2 = \frac{(r^2 + a^2)^{5/2}}{r^3 (r^2 + 2a^2)^{3/2}} J(r) dt^2 - \frac{r^3 (r^2 + 2a^2)^{1/2}}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \frac{dr^2}{J(r)} - (r^2 + a^2) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.15)$$

Эта метрика описывает регулярное (то есть не имеющее сингулярностей) пространство-время, содержащее две асимптотически плоские области  $r = \pm\infty$ , соединённые горловиной, расположенной в  $r = 0$ . Таким образом, метрика (3.15) описывает кротовую нору, которую мы будем здесь и в дальнейшем называть *неминимальной кротовой норой Ву–Янга*.

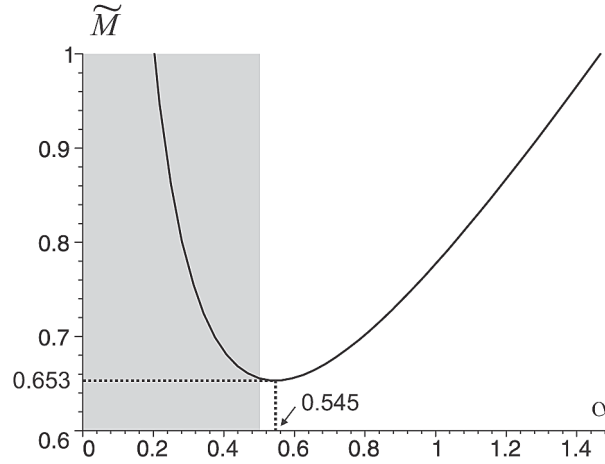


Рис. 4. Масса кротовой норы  $\widetilde{M}(\alpha)$ . Затенённая область соответствует  $\alpha < 1/2$ .

Структура пространства-времени кротовой норы Ву–Янга существенно зависит от значения безразмерного параметра  $\alpha = a\kappa^{-1/2}$ . Заметим, что для  $\alpha > 1/2$  функция  $N(r)$  является положительно определённой (см. Рис. 3), и, следовательно, компоненты метрики  $g_{00} = \sigma^2 N$  и  $-g_{rr} = 1/N$  конечны и положительны во всей области  $(-\infty, +\infty)$ . Это означает, что пространство-время не имеет горизонтов событий, то есть в этом случае кротовая нора Ву–Янга является *проходимой*.

В случае  $\alpha < 1/2$  функция  $N(r)$  меняет знак. Она положительна для  $|r| > r_h$ , отрицательна для  $|r| < r_h$  и равна нулю при  $|r| = r_h$ , то есть  $N(\pm r_h) = 0$  ( $r_h$  — некоторый параметр, который может быть легко найден численно для каждого  $\alpha < 1/2$ ). В окрестности  $|r| = r_h$  имеем  $g_{00} \sim (r - r_h)$  и  $g_{rr} \sim (r - r_h)^{-1}$ . Это означает, что точки  $|r| = r_h$  являются ничем иным, как двумя горизонтами событий шварцшильдовского типа в пространстве-времени кротовой норы, а  $r_h$  — радиус горизонтов. В принятых обозначениях области  $|r| > r_h$  с  $N(r) > 0$  и  $|r| < r_h$  с  $N(r) < 0$  представляют собой R- и T-области, соответственно. Таким образом, в случае  $\alpha < 1/2$  горловина кротовой норы Ву–Янга оказывается скрытой в T-области за горизонтами. Такие кротовые норы являются *непроходимыми* с точки зрения удалённого наблюдателя. По аналогии с чёрными дырами можно назвать такие объекты «чёрными» кротовыми норами.

Отметим, что для  $\alpha = 1/2$  оба горизонта  $|r| = r_h$  сливаются друг с другом и образуют горизонт событий, расположенный в горловине кротовой норы  $r = 0$ . Теперь в окрестности  $r = 0$  имеем  $g_{00} \sim r^2$  и  $g_{rr} \sim r^{-2}$ , и это значит, что  $r = 0$  является экстремальным горизонтом. В этом случае T-область отсутствует, а горизонт событий разделяет две R-области.

Обсудим теперь формулу для асимптотической массы кротовой норы Ву–Янга, измеренной удалённым наблюдателем. Масса статической сферически симметричной конфигурации определяется как

$$M = \frac{1}{2} \cdot \lim_{r \rightarrow \pm\infty} \{|r|(1 - g_{00}(r))\}. \quad (3.16)$$

Используя метрику (3.15) можно найти после несложных преобразований, что выражение для массы неминимальной кротовой норы Ву–Янга имеет вид:

$$\frac{M}{\kappa^{1/2}} \equiv \widetilde{M}(\alpha) = \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{\Gamma^2(\frac{1}{4})} \left( \alpha - \frac{1}{4\alpha} \right) + \frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{16\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\alpha}, \quad (3.17)$$

где  $\Gamma(z)$  — гамма-функция Эйлера, а  $\alpha = a\kappa^{-1/2}$  и  $\widetilde{M} = M\kappa^{-1/2}$  — безразмерные величины. График  $\widetilde{M}(\alpha)$  дан на Рис. 4. Стоит отметить, что  $\widetilde{M}(\alpha)$  положительна,  $\widetilde{M}(\alpha) > 0$ . Более того, функция  $\widetilde{M}(\alpha)$  имеет минимум  $\widetilde{M}_{\min} \approx 0.653$  при  $\alpha = \alpha_{\min} \approx 0.545$ .



## Заключение

Попытки продвинуться вперёд в формулировании общих принципов неминимальной теории поля, опираясь на неминимальную теорию калибровочных полей и некоторые точные решения, полученные в рамках модели Эйнштейна–Янга–Миллса, привели нас к трём важным выводам.

1. Использование симметрии группового пространства ( $U(1)$ ,  $SU(n)$ , ...) как центрального стержня в унификации моделей неминимального взаимодействия, несомненно, должно стать ключевым элементом построения неминимальной теории поля. Увеличение размерности эффективного пространства для достижения данной цели представляется нам менее результативным.

2. Идея о редукции числа значимых феноменологических параметров в неминимальной теории поля к минимальному набору констант приливного взаимодействия может быть осуществлена за счёт трёх требований: а) регулярности решений полевых уравнений при малых временах и на малых расстояниях; б) регулярности решений полевых уравнений на временной и пространственной бесконечности; в) требования некой дополнительной (скажем, геометрической) симметрии (например, чтобы тензор неминимальной восприимчивости был пропорционален дважды дуальному тензору Римана и т. п.).

3. Необходимо создать каталог точных решений в неминимальной теории поля: для всех известных минимальных полевых и материальных конфигураций (монополи, дионы, струны, браны, чёрные дыры, кротовые норы и т. д.) необходимо найти неминимальные аналоги.

Мы надеемся, что озвученная нами программа исследований заинтересует также и тех коллег, которые занимаются *квантовыми* аспектами неминимальной теории поля.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Faraoni V., Gunzig E., Nardone P. Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology // *Fundamentals of Cosmic Physics*. 1999. Vol. 20. P. 121–175.
2. Hehl F.W., Obukhov Yu.N. How does the electromagnetic field couple to gravity, in particular to metric, nonmetricity, torsion, and curvature? // *Lecture Notes in Physics*. 2001. Vol. 562. P. 479–504.
3. Novello M., Oliveira L.A.R. Non-minimal interaction of gravity with other physical fields: An overview // *Revista Brasileira de Física*. 1987. Vol. 17. P. 432–455.
4. Prasanna A.R. A new invariant for electromagnetic fields in curved space-time // *Physics Letters A*. 1971. Vol. 37. P. 331–332.
5. Novello M., Salim J.M. Nonlinear photons in the universe // *Physical Review D*. 1979. Vol. 20. P. 377–383.
6. Drummond I.T., Hathrell S.J. QED vacuum polarization in a background gravitational field and its effect on the velocity of photons // *Physical Review D*. 1980. Vol. 22. P. 343–355.
7. Lafrance R., Myers R.C. Gravity's rainbow: Limits for the applicability of the equivalence principle // *Physical Review D*. 1995. Vol. 51. P. 2584–2590.
8. Solanki S.K., Preuss O., Haugan M.P., Gandorfer A., Povel H.P., Steiner P., Stucki K., Bernasconi P.N., Soltau D. Solar constraints on new couplings between electromagnetism and gravity // *Physical Review D*. 2004. Vol. 69. Id. 062001. 11 p.
9. Balakin A.B., Ni W.-T. Nonminimal coupling of photons and axions // *Classical and Quantum Gravity*. 2010. Vol. 27. Id. 055003. 23 p.
10. Horndeski G.W. Conservation of charge and second-order gauge-tensor field theories // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1981. Vol. 75. P. 229–249.
11. Müller-Hoissen F. Modification of Einstein–Yang–Mills theory from dimensional reduction of the Gauss–Bonnet action // *Classical and Quantum Gravity*. 1988. Vol. 5. P. L35–L40.
12. Van der Bij J.J., Radu E. Regular and black-hole solutions of the Einstein–Yang–Mills–Higgs equations; the case of nonminimal coupling // *Nuclear Physics B*. 2000. Vol. 585. P. 637–665.
13. Nojiri S., Odintsov S.D. Unified cosmic history in modified gravity: from  $F(R)$  theory to Lorentz non-invariant models // *Physics Reports*. 2012. Vol. 505. P. 59–144.
14. Balakin A.B., Bochkarev V.V., Lemos J.P.S. Nonminimal coupling for the gravitational and electromagnetic fields: Black hole solutions and solitons // *Physical Review D*. 2008. Vol. 77. Id. 084013. 19 p.
15. Balakin A.B., Lemos J.P.S., Zayats A.E. Nonminimal coupling for the gravitational and electromagnetic fields: Traversable electric wormholes // *Physical Review D*. 2010. Vol. 81. Id. 084015. 13 p.
16. Balakin A.B., Sushkov S.V., Zayats A.E. Nonminimal Wu–Yang wormhole // *Physical Review D*. 2007. Vol. 75. Id. 084042. 7 p.

17. Balakin A.B., Zayats A.E. Non-minimal Wu–Yang monopole // *Physics Letters B*. 2007. Vol. 644. P. 294–298.
18. Weyl H. *Gravitation und Electricität* // *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*. 1918. Vol. 26. P. 465–480.
19. Yang C.N., Mills R.L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance // *Physical Review*. 1954. Vol. 96. P. 191–195.
20. Utiyama R. Invariant theoretical interpretation of interaction // *Physical Review*. 1956. Vol. 101. P. 1597–1607.
21. Ikeda M., Miyachi Y. On the static and spherically symmetric solutions of the Yang–Mills fields // *Progress of Theoretical Physics*. 1962. Vol. 27. P. 474–482.
22. Wu T.T., Yang C.N. Some solutions of the classical isotopic gauge field equations // *Properties of matter under unusual conditions* [Ed. H. Mark and S. Fernbach]. New York: Interscience, 1969. P. 349–354.
23. Yasskin P.B. Solutions for gravity coupled to massless gauge fields // *Physical Review D*. 1975. Vol. 12. P. 2212–2217.
24. Ахиезер А.И., Пелетминский С.В. *Поля и фундаментальные взаимодействия*. Киев: Наукова думка, 1986. 552 с.
25. Рубаков В.А. *Классические калибровочные поля*. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 336 с.
26. Volkov M.S., Gal'tsov D.V. Gravitating non-Abelian solitons and black holes with Yang–Mills fields // *Physics Reports*. 1999. Vol. 319. P. 1–83.
27. Balakin A.B., Lemos J.P.S. Non-minimal coupling for the gravitational and electromagnetic fields: A general system of equations // *Classical and Quantum Gravity*. 2005. Vol. 22. P. 1867–1880.
28. Horndeski G.W. Conservation of charge and the Einstein–Maxwell field equations // *Journal of Mathematical Physics*. 1976. Vol. 17. P. 1980–1987.
29. Buchdahl H.A. On a Lagrangian for non-minimally coupled gravitational and electromagnetic fields // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1979. Vol. 12. P. 1037–1043.
30. Müller-Hoissen F. Non-minimal coupling from dimensional reduction of the Gauss–Bonnet action // *Physics Letters B*. 1988. Vol. 201. P. 325–327.
31. Horndeski G.W. Birkhoff's theorem and magnetic monopole solutions for a system of generalized Einstein–Maxwell field equations // *Journal of Mathematical Physics*. 1978. Vol. 19. P. 668–674.
32. Bais F.A. Configurations of  $SO(3)$  monopoles with multiple magnetic charge // *Physics Letters B*. 1976. Vol. 64. P. 465–468.
33. Morris M.S., Thorne K.S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity // *American Journal of Physics*. 1988. Vol. 56. P. 395–412.

Поступила в редакцию 07.06.2013

Балакин Александр Борисович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра теории относительности и гравитации, Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлёвская, 18.

E-mail: Alexander.Balakin@ksu.ru

Зяц Алексей Евгеньевич, к. ф.-м. н., ассистент, кафедра теории относительности и гравитации, Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлёвская, 18.

E-mail: Alexei.Zayats@ksu.ru

*A. B. Balakin, A. E. Zayats*

### Nonminimal field theory: I. Extension of the Einstein-Yang-Mills model

*Keywords:* Nonminimal interactions, curvature tensor, gauge fields, nonminimal Wu-Yang monopole.

PACS: 04.20.-q, 04.20.Jb, 14.80.Hv, 04.20.Gz

Nonminimal field theory stands to extend the idea of geometrization of the interaction models of physical systems with the gravity field by introducing new cross-couplings, in which the space-time curvature plays a key role. At present time this science is considered only as a formal unification of the models of nonminimal coupling between scalar, pseudoscalar, vector, gauge fields and gravity. Now we faced with the problem of formulation of basic principles of the nonminimal field theory as a new science. In this work we discuss some general aspects of the nonminimal field theory construction by the example of gauge interactions, and illustrate some principally new results, which we have obtained in the framework of the nonminimal Einstein-Yang-Mills model.

#### REFERENCES

1. Faraoni V., Gunzig E., Nardone P. *Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology*, Fundamentals of Cosmic Physics, 1999, vol. 20, pp. 121–175.
2. Hehl F.W., Obukhov Yu.N. *How does the electromagnetic field couple to gravity, in particular to metric, nonmetricity, torsion, and curvature?*, Lecture Notes in Physics, 2001, vol. 562, pp. 479–504.
3. Novello M., Oliveira L.A.R. *Non-minimal interaction of gravity with other physical fields: An overview*, Revista Brasileira de Física, 1987, vol. 17, pp. 432–455.
4. Prasanna A.R. *A new invariant for electromagnetic fields in curved space-time*, Physics Letters A, 1971, vol. 37, pp. 331–332.
5. Novello M., Salim J.M. *Nonlinear photons in the universe*, Physical Review D, 1979, vol. 20, pp. 377–383.
6. Drummond I.T., Hathrell S.J. *QED vacuum polarization in a background gravitational field and its effect on the velocity of photons*, Physical Review D, 1980, vol. 22, pp. 343–355.
7. Lafrance R., Myers R.C. *Gravity's rainbow: Limits for the applicability of the equivalence principle*, Physical Review D, 1995, vol. 51, pp. 2584–2590.
8. Solanki S.K., Preuss O., Haugan M.P., Gandorfer A., Povel H.P., Steiner P., Stucki K., Bernasconi P.N., Soltan D. *Solar constraints on new couplings between electromagnetism and gravity*, Physical Review D, 2004, vol. 69, 062001.
9. Balakin A.B., Ni W.-T. *Nonminimal coupling of photons and axions*, Classical and Quantum Gravity, 2010, vol. 27, 055003.
10. Horndeski G.W. *Conservation of charge and second-order gauge-tensor field theories*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1981, vol. 75, pp. 229–249.
11. Müller-Hoissen F. *Modification of Einstein-Yang-Mills theory from dimensional reduction of the Gauss-Bonnet action*, Classical and Quantum Gravity, 1988, vol. 5, pp. L35–L40.
12. Van der Bij J.J., Radu E. *Regular and black-hole solutions of the Einstein-Yang-Mills-Higgs equations; the case of nonminimal coupling*, Nuclear Physics B, 2000, vol. 585, pp. 637–665.
13. Nojiri S., Odintsov S.D. *Unified cosmic history in modified gravity: from  $F(R)$  theory to Lorentz non-invariant models*, Physics Reports, 2012, vol. 505, pp. 59–144.
14. Balakin A.B., Bochkarev V.V., Lemos J.P.S. *Nonminimal coupling for the gravitational and electromagnetic fields: Black hole solutions and solitons*, Physical Review D, 2008, vol. 77, 084013.
15. Balakin A.B., Lemos J.P.S., Zayats A.E. *Nonminimal coupling for the gravitational and electromagnetic fields: Traversable electric wormholes*, Physical Review D, 2010, vol. 81, 084015.
16. Balakin A.B., Sushkov S.V., Zayats A.E. *Nonminimal Wu-Yang wormhole*, Physical Review D, 2007, vol. 75, 084042.
17. Balakin A.B., Zayats A.E. *Non-minimal Wu-Yang monopole*, Physics Letters B, 2007, vol. 644, pp. 294–298.
18. Weyl H. *Gravitation und Electricität*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, 1918, vol. 26, pp. 465–480.
19. Yang C.N., Mills R.L. *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*, Physical Review, 1954, vol. 96, pp. 191–195.
20. Utiyama R. *Invariant theoretical interpretation of interaction*, Physical Review, 1956, vol. 101, pp. 1597–1607.
21. Ikeda M., Miyachi Y. *On the static and spherically symmetric solutions of the Yang-Mills fields*, Progress of Theoretical Physics, 1962, vol. 27, pp. 474–482.
22. Wu T.T., Yang C.N. *Some solutions of the classical isotopic gauge field equations*. Properties of matter under unusual conditions [Ed. H. Mark and S. Fernbach]. New York, Interscience, 1969. pp. 349–354.
23. Yasskin P.B. *Solutions for gravity coupled to massless gauge fields*, Physical Review D, 1975, vol. 12, pp. 2212–2217.

24. Akhiezer A.I., Peletminsky S.V. *Polya i fundamental'niye vzaimodeistviya* (Fields and fundamental interactions). Kiev, Naukova dumka, 1986. 552 p.
25. Rubakov V.A. *Klassicheskie kalibrovochniye polya* (Classical gauge fields). Moscow, Editorial URSS, 1999. 336 p.
26. Volkov M.S., Gal'tsov D.V. *Gravitating non-Abelian solitons and black holes with Yang–Mills fields*, Physics Reports, 1999, vol. 319, pp. 1–83.
27. Balakin A.B., Lemos J.P.S. *Non-minimal coupling for the gravitational and electromagnetic fields: A general system of equations*, Classical and Quantum Gravity, 2005, vol. 22, pp. 1867–1880.
28. Horndeski G.W. *Conservation of charge and the Einstein–Maxwell field equations*, Journal of Mathematical Physics, 1976, vol. 17, pp. 1980–1987.
29. Buchdahl H.A. *On a Lagrangian for non-minimally coupled gravitational and electromagnetic fields*, Journal of Physics A: Mathematical and General, 1979, vol. 12, pp. 1037–1043.
30. Müller-Hoissen F. *Non-minimal coupling from dimensional reduction of the Gauss–Bonnet action*, Physics Letters B, 1988, vol. 201, pp. 325–327.
31. Horndeski G.W. *Birkhoff's theorem and magnetic monopole solutions for a system of generalized Einstein–Maxwell field equations*, Journal of Mathematical Physics, 1978, vol. 19, pp. 668–674.
32. Bais F.A. *Configurations of  $SO(3)$  monopoles with multiple magnetic charge*, Physics Letters B, 1976, vol. 64, pp. 465–468.
33. Morris M.S., Thorne K.S. *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity*, American Journal of Physics, 1988, vol. 56, pp. 395–412.

Received 07.06.2013

Balakin Alexander Borisovich, Doctor of Sciences, Professor, Department of General Relativity and Gravitation, Institute of Physics, Kazan Federal University, ul. Kremlevskaya, 18, Kazan, 420008, Russia.  
E-mail: Alexander.Balakin@ksu.ru

Zayats Alexei Evgenievich, Candidate of Physics and Mathematics, Assistant, Department of General Relativity and Gravitation, Institute of Physics, Kazan Federal University, ul. Kremlevskaya, 18, Kazan, 420008, Russia.  
E-mail: Alexei.Zayats@ksu.ru