

УДК 51-71:530.12, 524.8

*И. В. Дробов,¹ С. Ф. Тегай²***ФОРМИРОВАНИЕ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК
ИЗ ПЫЛИ ЛЕМЕТРА – ТОЛМЕНА – БОНДИ**

Рассматриваются два варианта получения тонких оболочек в общей теории относительности из решения Леметра – Толмена – Бонди для пылевого облака. Первый метод состоит в предельном переходе от сферического пылевого слоя конечной толщины к бесконечно тонкому. Для этого случая показано противоречие условий сшивки на тонкой оболочке и уравнений поля для пространства, заполненного пылью. Второй способ заключается в естественном формировании тонкой оболочки в процессе эволюции слоев пыли. Для гладких начальных условий возможно найти слабое решение уравнений Эйнштейна, содержащее сингулярную часть тензора энергии-импульса, и, следовательно, отвечающее тонкой оболочке ненулевой массы. Показывается, что получающиеся тонкие оболочки имеют отличное от нуля тангенциальное давление, несмотря на то, что негравитационное взаимодействие между частицами исходного вещества отсутствует.

Ключевые слова: тонкие оболочки, пыль, предельный переход, каустика, слабое решение.

PACS: 04.20.Jb, 98.80.Jk

Введение

Решение Леметра – Толмена – Бонди (ЛТБ), описывающее поведение неоднородного сферического пылевого облака, в последнее время получило широкое применение в космологии. Одна из причин этого в том, что решение ЛТБ является наиболее простым из известных решений, которые могут описывать влияние пространственной неоднородности постоянной Хаббла и плотности вещества на красное смещение света, приходящего к наблюдателю от прошлых событий. В то же время, решение ЛТБ в общем случае содержит две произвольные функции, что позволяет при соответствующем их выборе объяснить известную зависимость яркости удаленных сверхновых от красного смещения без привлечения темной энергии. Подробное изложение идеи и обзор работ в данной области можно найти в [1, 2]. Другой важной особенностью решения ЛТБ является возможность описания войдов – пустых или сильно разреженных областей пространства, окруженных стенками с много большей концентрацией галактик. По современным данным войды являются неотъемлемой частью крупномасштабной структуры Вселенной (см. пример моделирования и краткий исторический обзор в [3]).

Один из способов моделирования стенки, окружающей войд – использование бесконечно тонкой оболочки, описываемой формализмом сшивки Дармуа – Лихнеровича – Израэля [4–6]. Такие модели давно применяются для построения неоднородных космологических моделей [7], объяснения зависимости между фотометрическим расстоянием и красным смещением [8, 10], а также для описания аномалий анизотропии реликтового излучения [9, 11]. Однако в природе не существует бесконечно тонких объектов, поэтому в нашей работе рассматриваются способы предельного перехода к оболочкам от более реалистичных моделей, описываемых решением ЛТБ.

1. Решение Леметра – Толмена – Бонди

В сопутствующей системе отсчета метрику ЛТБ можно записать в виде

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{r'^2(\tau, R)}{1 + E(R)} dR^2 - r^2(\tau, R)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.1)$$

Каждый слой пыли имеет свое фиксированное значение радиальной координаты R . Функция $r(\tau, R)$ определяет расстояние до центра для частиц пыли с данным R и является решением уравнений

$$\dot{r}^2 = E(R) + \frac{2m(R)}{r}, \quad (1.2)$$

¹E-mail: drivvl@mail.ru

²E-mail: tegai_s_f@inbox.ru

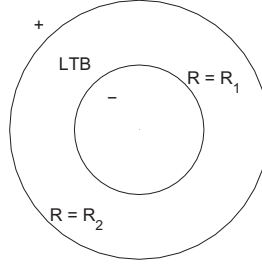


Рис. 1. Схематическое изображение модели. 'LTB' – пространство Леметра – Толмена – Бонди, '-' – пространство Минковского, '+' – внешнее пространство Шварцшильда или Фрийдмана.

$$\ddot{r} = -\frac{m(R)}{r^2}, \quad (1.3)$$

где функция $m(R)$ имеет смысл суммарной массы слоев вещества с радиальными координатами меньшими R . Плотность пыли дается выражением

$$\rho(\tau, R) = \frac{m(R)'}{4\pi r^2(\tau, R)r'(\tau, R)}. \quad (1.4)$$

2. Сферический пылевой слой в пустоте

Рассмотрим сферический слой пыли, окружающий пустое пространство. На внешней границе соединим этот слой, описываемый решением ЛТБ, с внешним пространством Шварцшильда или Фрийдмана (рис. 1). Подобные модели рассматривались в ряде работ [9, 12, 13], однако нашей целью будет изучение предельного перехода к бесконечно тонкой промежуточной области. Устремим толщину слоя пыли к нулю, оставляя его массу неизменной. Получится ли в результате такого перехода бесконечно тонкая оболочка, описываемая формализмом Израэля?

В формализме Израэля тонкая оболочка, разделяющая некоторые внутреннее и внешнее подпространства, описывается процедурой сшивки, условия которой заключаются в совпадении метрик, индуцированных на оболочке с внешней (+) и внутренней (-) сторон:

$$d\sigma^{\pm 2} = d\tau^2 - g_{\theta\theta}^{\pm}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.1)$$

Внутреннее время оболочки τ выбрано так, чтобы коэффициент при $d\tau^2$ равнялся единице:

$$g_{\tau\tau}^{\pm} = 1. \quad (2.2)$$

Условия сшивки (2.2) вместе с $g_{\theta\theta}^+ = g_{\theta\theta}^-$ должны удовлетворяться после выполнения предельного перехода к тонкой оболочке от рассматриваемой трехслойной модели.

Теперь выполним сшивку промежуточного слоя неоднородной пыли с окружающими его областями. В отличие от модели тонкой оболочки здесь сшивка производится по геометрическим поверхностям, не имеющим внутренней массы. Из-за того, что мы выбрали сопутствующую систему отсчета, уравнение внутренней и внешней поверхностей задаются простыми соотношениями $R = R_1, R = R_2$ соответственно, где R_1, R_2 — константы. К условию совпадения первых фундаментальных форм добавляется требование равенства внешних кривизн поверхности сшивки, вычисленных с разных её сторон. Так как все присутствующие в модели решения имеют нулевое давление, это требование приводит к непрерывности текущей массы Мизнера – Шарпа. То есть $m(R_1) = 0, m(R_2) = M$, где M — полная масса промежуточного слоя.

Метрика, индуцированная на поверхностях сшивки решением ЛТБ имеет вид

$$d\sigma_{1,2}^2 = d\tau^2 - r^2(\tau, R_{1,2})(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.3)$$

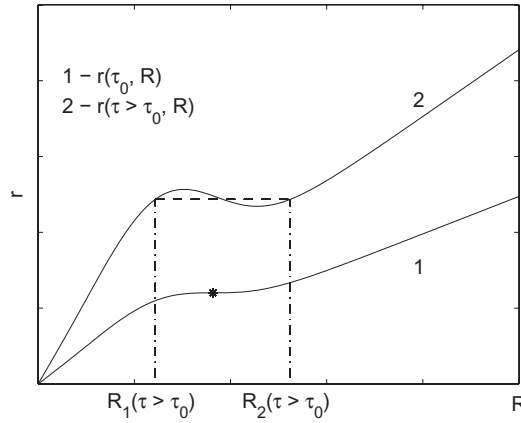


Рис. 2. Радиальная метрическая функция $r(\tau, R)$ после образования каустики (расширяющийся интервал $[R_1(\tau), R_2(\tau)]$ вырезается и заменяется тонкой оболочкой).

Каждая из угловых компонент $r^2(\tau, R_{1,2})$ по условиям сшивки совпадает с соответствующей компонентой $g_{\theta\theta}^{\pm}$. Но в пределе нулевой толщины $g_{\theta\theta}^+ = g_{\theta\theta}^-$, следовательно

$$\lim_{R_1 \rightarrow R_2} r(\tau, R_1) = r(\tau, R_2). \quad (2.4)$$

А так как мы работаем в сопутствующей системе отсчета, то и все производные по времени от функции $r(\tau, R)$ при $R_1 \rightarrow R_2$ должны стать непрерывными. Таким образом левая часть уравнения (1.3) должна быть непрерывна в пределе тонкой оболочки. Но правая часть этого же уравнения должна иметь скачок, так как содержит массу в числителе. Отсюда можно сделать вывод, что бесконечно тонкий слой пыли Леметра – Толмана – Бонди не дает тонкой оболочки в смысле формализма сшивки Израэля.

3. Тонкая оболочка как слабое решение для пространства Леметра – Толмана – Бонди

Для моделирования формирования тонкой оболочки возьмем начальные условия, приводящие, начиная с некоторого момента времени τ_0 , к пересечению различных слоев пыли (каустики). В классическом решении наличие каустики приводит к тому, что производная $r'(\tau, R)$ в некоторой области становится меньше нуля, что соответствует нефизической ситуации из-за отрицательной плотности (1.4). Кроме того, в результате пересечения слоев одному и тому же распределению материи внутри сферы площади $4\pi r^2(\tau, R)$ соответствуют различные значения массы $m(R)$ [14]. Чтобы избавиться от отрицательной плотности, вырежем сферический слой от $R = R_1(\tau)$ до $R = R_2(\tau)$ (рис. 2), содержащий нежелательные эффекты. Оставшиеся части соединим, следуя формализму Дармуа – Лихнеровича – Израэля. Так как значения массы $m(R_1), m(R_2)$ на границах вырезанной области различны, сшивка должна быть выполнена на тонкой оболочке ненулевой массы, а не на геометрической поверхности.

Поведение тонкой оболочки находится из условий сшивки. В качестве внутренних координат оболочки ξ^α выберем время τ и углы θ, ϕ . Тогда метрика на поверхности оболочки примет вид

$$d\sigma_{1,2}^2 = \left(1 - \frac{1}{1 + E_{1,2}} \left(r'_{1,2} \frac{dR_{1,2}}{d\tau} \right)^2 \right) d\tau^2 - r_{1,2}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.1)$$

где индексы 1, 2 указывают на значения функций на внутренней $R = R_1(\tau)$ и внешней $R = R_2(\tau)$ поверхностях оболочки соответственно. Из непрерывности первой фундаментальной формы следует

$$\frac{1}{1 + E_1} \left(r'_1 \frac{dR_1}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{1 + E_2} \left(r'_2 \frac{dR_2}{d\tau} \right)^2, \quad (3.2)$$

$$r_1 = r_2 \equiv r. \quad (3.3)$$

Первое уравнение имеет два решения. Для того, чтобы получить требуемый скачок массы, выберем решение с противоположными знаками:

$$\frac{r'_1}{\sqrt{1+E_1}} \cdot \frac{dR_1}{d\tau} = -\frac{r'_2}{\sqrt{1+E_2}} \cdot \frac{dR_2}{d\tau}. \quad (3.4)$$

Выбор одинаковых знаков дает классическое пространство-время ЛТБ.

Дифференцирование второго условия шивки (3.3) вместе с (3.4) позволяет найти производные $dR_{1,2}/d\tau$

$$\frac{dR_{1,2}}{d\tau} = \frac{\dot{r}_{2,1} - \dot{r}_{1,2}}{r'_{1,2}} \cdot \frac{\sqrt{1+E_{1,2}}}{\sqrt{1+E_1} + \sqrt{1+E_2}} \quad (3.5)$$

и затем скорость рассматриваемой тонкой оболочки

$$\frac{dr}{d\tau} = \dot{r}_{1,2} + r'_{1,2} \frac{dR_{1,2}}{d\tau} = \frac{\dot{r}_1 \sqrt{1+E_1} + \dot{r}_2 \sqrt{1+E_2}}{\sqrt{1+E_1} + \sqrt{1+E_2}}. \quad (3.6)$$

Для $E = 0$ это выражение в точности совпадает со скоростью ударной волны, полученной в [15] из условий Ренкина – Гюгонио.

Тензор энергии-импульса полученной модели имеет вид

$$T^{\alpha\beta} = T_{\text{пыль}}^{\alpha\beta} + S^{ab} e_{(a)}^\alpha e_{(b)}^\beta \delta_\Sigma(\mathbf{x}). \quad (3.7)$$

Здесь $\delta_\Sigma(\mathbf{x})$ — дельта функция Дирака с носителем на тонкой оболочке. $T_{\text{пыль}}^{\alpha\beta}$ — тензор энергии-импульса пыли. S^{ab} имеет смысл поверхностного тензора энергии-импульса и связан с внешней кривизной оболочки K^{ab} уравнением Ланцоша

$$S_{ab} = -\frac{n^\mu n_\mu}{8\pi} ([K_{ab}] - [K_a^a] g_{ab}). \quad (3.8)$$

До пересечения слоев пыли все компоненты S_b^a равны нулю и пространство-время описывается решением ЛТБ. После возникновения каустики диагональные компоненты S_b^a могут быть интерпретированы как поверхностная плотность σ и тангенциальное давление p , и принимают вид

$$\sigma \equiv -S_\tau^\tau = \frac{\Delta m}{2\pi r^2 \sqrt{(\sqrt{1+E_1} + \sqrt{1+E_2})^2 - (\dot{r}_2 - \dot{r}_1)^2}}, \quad (3.9)$$

$$p \equiv S_\theta^\theta = \frac{(2\pi\sigma)^3 r^5}{4\pi\Delta m^3} \left[4\pi (\dot{r}_2 - \dot{r}_1)^2 (\rho_2 - \rho_1) r^2 - \left(\frac{\dot{r}'_2}{r'_2} - \frac{\dot{r}'_1}{r'_1} \right) (\dot{r}_2 - \dot{r}_1) \Delta m, \right], \quad (3.10)$$

где $\Delta m = m_2 - m_1$ — масса оболочки.

Численный расчет конкретной модели войда с образованием тонкой оболочки вокруг него был выполнен в [16]. По построению нашей модели масса оболочки $m_\Sigma = m(R_2) - m(R_1)$ не может оставаться постоянной. Она растет (рис. 3) за счет поглощения вещества из внутренней и внешней областей. В то же время из закона сохранения $S_{a,b}^b = 0$ следует [17, 18]

$$4\pi r^2 \left(\dot{\sigma} + 2\frac{\dot{r}}{r}(\sigma + p) \right) = \dot{m}_\Sigma + 8\pi r \dot{r} p = 0. \quad (3.11)$$

То есть, тангенциальное давление образовавшейся оболочки не может быть равно нулю, несмотря на то, что исходное вещество является пылью.

Заключение

Мы рассмотрели два возможных способа формирования движущейся тонкой оболочки в модели разреженной вакуоли, помещенной в расширяющуюся Вселенную. Для первого из них получен отрицательный результат — невозможно произвести предельный переход от сферического слоя пыли Леметра – Толмена – Бонди конечной толщины к бесконечно тонкой оболочке той же массы.

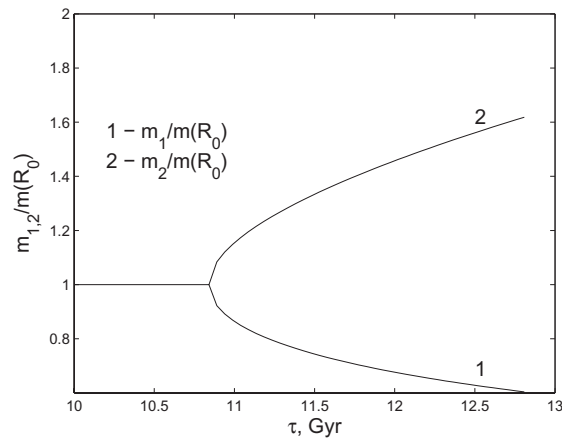


Рис. 3. Масса Мизнера – Шарпа с внутренней и внешней сторон оболочки.

Второй способ, описывает тонкую оболочку, возникающую как слабое решение уравнений Эйнштейна после пересечения различных слоев пыли. Так как эта модель является неоднородной, то в ней работает общий механизм объяснения наблюдаемого ускоренного расширения Вселенной без привлечения темной энергии. Недостатком модели является наличие поверхностного давления на оболочке, означающего негравитационное взаимодействие вещества, составляющего оболочку. Наличие взаимодействия затрудняет космологическую интерпретацию модели как стенки, состоящей из галактик и их скоплений и окружающей относительно пустую область пространства.

Возникающие трудности на наш взгляд связаны с условиями применимости уравнения состояния пыли в целом и решения Леметра – Толмена – Бонди в частности. Традиционное ограничение состоит в том, что при возрастании плотности вещества в нем возникают взаимодействия, приводящие к ненулевому давлению. Однако для космологических моделей это не вполне верно, так как даже при гипотетическом прохождении одной стенки галактик через другую, основным остается гравитационное взаимодействие. В космологических моделях с каустиками нарушение применимости решения Леметра – Толмена – Бонди возникает другим способом. Оно связано с тем, что тензор энергии-импульса пыли является результатом некоторого молчаливого усреднения дискретного распределения частиц пыли. При этом гравитационное поле находится из неусредненных уравнений Эйнштейна. Процедура усреднения в общей теории относительности из-за нелинейности уравнений чрезвычайно сложна и до сих пор является открытой проблемой, однако еще в [19] было показано, что в общем случае в результате усреднения в уравнениях Эйнштейна возникают дополнительные слагаемые, связанные с корреляциями гравитационных полей отдельных частиц. Такие слагаемые должны быть учтены при дальнейшем аналитическом моделировании формирования тонких оболочек в общей теории относительности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Enqvist K. Lemaitre -- Tolman -- Bondi model and accelerating expansion // *Gen. Rel. Grav.* 2008. Vol. 40. №2–3. P. 451–466.
2. Ellis G.F.R. Inhomogeneity effects in cosmology // *Class. Quantum Grav.* 2011. Vol. 28. №16. P. 164001.
3. Bolejko K., Krasinski A., Hellaby C. Formation of voids in the Universe within the Lemaitre – Tolman model // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2004. Vol. 000. P. 1–17.
4. Darms G., Les equations de la gravitation Einsteinienne (*Mémoires des sciences Mathématiques, Fascicule XXV*) (Paris: Gauthier-Villars), 1927.
5. Lichnerowicz A., Theories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme (Paris: Masson), 1955.
6. Israel W. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity // *Nuovo Cim.* 1966. Vol. 44. №1. P. 1–14.
7. Sakai N., Maeda K., Sato H. Expanding shell around a void and Universe model // *Prog. Theor. Phys.* 1993. Vol. 89. №6. P. 1193–1201.
8. Sugiura N., Nakao K., Harada T. Distance-redshift relation in an isotropic inhomogeneous universe: Spherically symmetric dust-shell universe. II // *Phys. Rev. D.* 1999. Vol. 60. №10. P. 103508.

9. Tomita K. Bulk flows and cosmic microwave background dipole anisotropy in cosmological void models // *ApJ*. 2000. Vol. 529. №1. P. 26–37.
10. Tomita K. A local void and the accelerating Universe // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2001. Vol. 326. P. 287–292.
11. Inoue K.T., Silk J. Local voids as the origin of large-angle cosmic microwave background anomalies. I. // *ApJ*. 2006. Vol. 648. №1. P. 23–30.
12. Khakshournia S., Mansouri R. Dynamics of general relativistic spherically symmetric sust thick shells *Gen. Rel. Grav.* 2002. Vol. 34. №11. P. 1847–1853.
13. Khosravi Sh., Khakshournia S., Mansouri R. Evolution of thick shells in curved spacetimes // *Class. Quantum Grav.* 2006. Vol. 23. №20. P. 5927–5939.
14. Lasky P.D., Lun A.W.C., Burston R.B. Initial value formalism for Lemaitre – Tolman – Bondi collapse // *ANZIAM J.* 2007. Vol. 49. P. 53.
15. Nolan B.C. Dynamical extensions for shell-crossing singularities // *Class. Quantum Grav.* 2003. Vol. 20. №4. P. 575–585.
16. Тегай С.Ф. О слабом решении уравнений Эйнштейна для расширяющейся пыли // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. 2011. Т.4. №1. С. 43–49.
17. Berezin V.A., Kuzmin V.A., Tkachev I.I. Dynamics of bubbles in general relativity // *Phys. Rev. D.* 1987. Vol. 36. №10. P. 2919–2944.
18. Gonçalves S.M.C.V. Relativistic shells: Dynamics, horizons, and shell crossing // *Phys. Rev. D.* 2002. Vol. 66. №8. P. 084021.
19. Zalaletdinov R.M. Averaging problem in general relativity, macroscopic gravity and using Einstein's equations in cosmology // *Bull. Astron. Soc. India.* 1997. Vol. 25. P. 401–416.

Поступила в редакцию 07.11.2012

Дробов Иван Владимирович, аспирант, кафедра теоретической физики и волновых явлений, Сибирский федеральный университет, 660041, Россия, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.
E-mail: drivvl@mail.ru

доцент, кафедра теоретической физики и волновых явлений, Сибирский федеральный университет, 660041, Россия, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.
E-mail: tegai_s_f@inbox.ru

I. V. Drobov, S. Ph. Tegaï

Formation of thin shells from Lemaitre – Tolman – Bondi dust

Keywords: thin shells, dust, vanishing thickness limit, shell crossing, weak solution.

PACS: 04.20.Jb, 98.80.Jk

We consider two different ways to receive a thin shell from Lemaitre – Tolman – Bondi solution for a dust cloud. The first method consists in taking a vanishing thickness limit of a thick dust layer. In that case we show a contradiction between matching conditions on thin shell and field equation for the dust. The second way is a formation of the shell due to the intersection of dust layers. For smooth initial conditions we provide the weak solution of Einstein equations with singular terms in stress-energy tensor corresponding to a thin shell. We show that the obtained thin shells have nonzero tangential pressure in spite of the absence of interaction between Lemaitre – Tolman – Bondi dust particles.

REFERENCES

1. Enqvist K. Lemaitre -- Tolman -- Bondi model and accelerating expansion, *Gen. Rel. Grav.*, 2008, vol. 40, no. 2–3, pp. 451–466.
2. Ellis G.F.R. Inhomogeneity effects in cosmology, *Class. Quantum Grav.*, 2011, vol. 28, no. 16, pp. 164001.
3. Bolejko K., Krasinski A., Hellaby C. Formation of voids in the Universe within the Lemaitre – Tolman model, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2004, vol. 000, pp. 1–17.
4. Darmois G., Les equations de la gravitation Einsteinienne (*Mémoires des sciences Mathématiques, Fascicule XXV*) (Paris: Gauthier-Villairs), 1927.
5. Lichnerowicz A., Theories relativistes de la gravitation et de l'électromagnetisme (Paris: Masson), 1955.
6. Israel W. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity, *Nuovo Cim.*, 1966, vol. 44, no. 1, pp. 1–14.

7. Sakai N., Maeda K., Sato H. Expanding shell around a void and Universe model, *Prog. Theor. Phys.*, 1993, vol. 89, no. 6, pp. 1193–1201.
8. Sugiura N., Nakao K., Harada T. Distance-redshift relation in an isotropic inhomogeneous universe: Spherically symmetric dust-shell universe. II, *Phys. Rev. D*, 1999, vol. 60, no. 10, pp. 103508.
9. Tomita K. Bulk flows and cosmic microwave background dipole anisotropy in cosmological void models, *ApJ* 2000, vol. 529, no. 1, pp. 26–37.
10. Tomita K. A local void and the accelerating Universe, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2001, vol. 326, pp. 287–292.
11. Inoue K.T., Silk J. Local voids as the origin of large-angle cosmic microwave background anomalies. I, *ApJ* 2006, vol. 648, no. 1, pp. 23–30.
12. Khakshournia S., Mansouri R. Dynamics of general relativistic spherically symmetric dust shells, *Gen. Rel. Grav.*, 2002, vol. 34, no. 11, pp. 1847–1853.
13. Khosravi Sh., Khakshournia S., Mansouri R. Evolution of thick shells in curved spacetimes, *Class. Quantum Grav.*, 2006, vol. 23, no. 20, pp. 5927–5939.
14. Lasky P.D., Lun A.W.C., Burston R.B. Initial value formalism for Lemaitre – Tolman – Bondi collapse, *ANZIAM J.*, 2007, vol. 49, pp. 53.
15. Nolan B.C. Dynamical extensions for shell-crossing singularities, *Class. Quantum Grav.*, 2003, vol. 20, no. 4, pp. 575–585.
16. Tegai S.Ph. On a weak solution of Einstein equations for expanding dust, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2011, vol. 4, no. 1, pp. 43–49.
17. Berezin V.A., Kuzmin V.A., Tkachev I.I. Dynamics of bubbles in general relativity, *Phys. Rev. D*, 1987, vol. 36, no. 10, pp. 2919–2944.
18. Gonçalves S.M.C.V. Relativistic shells: Dynamics, horizons, and shell crossing, *Phys. Rev. D*, 2002, vol. 66, no. 8, pp. 084021.
19. Zalaletdinov R.M. Averaging problem in general relativity, macroscopic gravity and using Einstein's equations in cosmology, *Bull. Astron. Soc. India*, 1997, vol. 25, pp. 401–416.

Received 07.11.2012

Drobov Ivan Vladimirovich, Postgraduate, Department of Theoretical Physics and Wave Phenomena, Siberian Federal University, Svobodny Prospect, 79, Krasnoyarsk, 660041, Russia.
E-mail: drivvl@mail.ru

Tegai Sergey Philippovich Associate Professor, Department of Theoretical Physics and Wave Phenomena, Siberian Federal University, Svobodny Prospect, 79, Krasnoyarsk, 660041, Russia.
E-mail: tegai_s_f@inbox.ru