УДК 517.917

Ю. Г. Игнатьев[1], ***А. А. Агафонов***[2]

КАЧЕСТВЕННЫЙ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ОСНОВАННОЙ НА ФАНТОМНОМ СКАЛЯРНОМ ПОЛЕ С САМОДЕЙСТВИЕМ

На основе качественного анализа системы дифференциальных уравнений космологической модели, основанной на фантомном скалярном поле, исследовано асимптотическое поведение таких моделей и показано, что в отличие от моделей с классическим скалярным полем, такие модели имеют устойчивые асимптотические решения с постоянным значением потенциала как в бесконечном прошлом , так и в бесконечном будущем. Построены численные модели космологической эволюции модели с фантомным скалярным полем.

Ключевые слова: фантомное скалярное поле, качественный анализ, асимптотическое поведение, численное моделирование, численная гравитация.

PACS: 34D08, 93C15

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 3.1526.2014/К).

1. Введение

Ранее была сформулирована космологическая модель, основанная на статистических системах скалярно заряженных частиц с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием, обладающего отрицательной кинетической энергией поля [1–3]. На основе сформулированной математической модели было проведено численное моделирование как вырожденных вырожденных Ферми – систем, так и зарядово симметричной больцмановкой плазмы, состоящей из скалярно заряженных частиц и античастиц [4–6]. Эти исследования выявили уникальные особенности космологических моделей, основанных на статистических системах скалярно заряженных частиц с фантомным скалярным взаимодействием. Однако, поскольку основные результаты были получены методами численного моделирования, на основе их затруднительно описать асимптотические свойства соответствующих космологических моделей. В [7] комбинированным применением методов качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и их численного интегрирования были исследованы асимптотические свойства стандартной космологической модели, основанной на классическом массивном скалярном поле. В частности, в этих работах было показано, что система уравнений Эйнштейна – Клейна–Гордона для однородной пространственно плоской космологической модели имеет одну особую точку, соответствующую нулевым значениям потенциала скалярного поля и его производной, причем указанная особая точка может являться либо притягивающим центром, либо притягивающим фокусом, либо притягивающим седлом. Кроме того, был обнаружен микроскопический колебательный характер инвариантного космологического ускорения при приближении к особой точке со средним значением, соответствующим нерелятивистскому уравнению состояния. В этой статье мы проведем аналогичное исследование для «стандартной» космологической модели, основанной на фантомных полях. В этой модели, в отличие от рассмотренных в статьях [8], [9], мы не будем учитывать вклад обычной материи, то есть, будем рассматривать свободные фантомные поля без источника.

[1]E-mail: ignatev-yurii@mail.ru
[2]E-mail: a.a.agathonov@gmail.com

2. Основные соотношения для космологической модели с фантомным скалярным полем

2.1. Уравнения свободного скалярного фантомного поля с самодействием

Функция Лагранжа фантомного скалярного поля с массой m и самодействием имеет вид [7]:

$$L = -\frac{1}{8\pi}\left(g^{ik}\Phi_{,i}\Phi_{,k} + m^2\Phi^2 + \frac{\alpha}{2}\Phi^4\right),$$

где α — константа самодействия. Тензор энергии — импульса относительно этой функции

$$T^{ik} = \frac{1}{8\pi}\left(-2\Phi^{,i}\Phi^{,k} + g^{ik}\Phi_{,j}\Phi^{,j} + g^{ik}m^2\Phi^2 + g^{ik}\frac{\alpha}{2}\Phi^4\right) \quad (1)$$

имеет отрицательный кинетический член. Равенство нулю ковариантной дивергенции этого тензора приводит к уравнению свободного фантомного скалярного поля:

$$\Box\Phi - m_*^2\Phi = 0, \quad (2)$$

где

$$m_*^2 = m^2 + \alpha\Phi^2$$

— эффективная масса скалярного бозона. Уравнение (2) отличается от уравнения Клейна-Гордона наличием кубической нелинейности и отрицательным знаком массивного члена.

Выпишем также уравнения Эйнштейна с космологическим членом $\Lambda > 0$ [3]

$$R^{ik} - \frac{1}{2}Rg^{ik} = \Lambda g^{ik} + 8\pi T^{ik}. \quad (3)$$

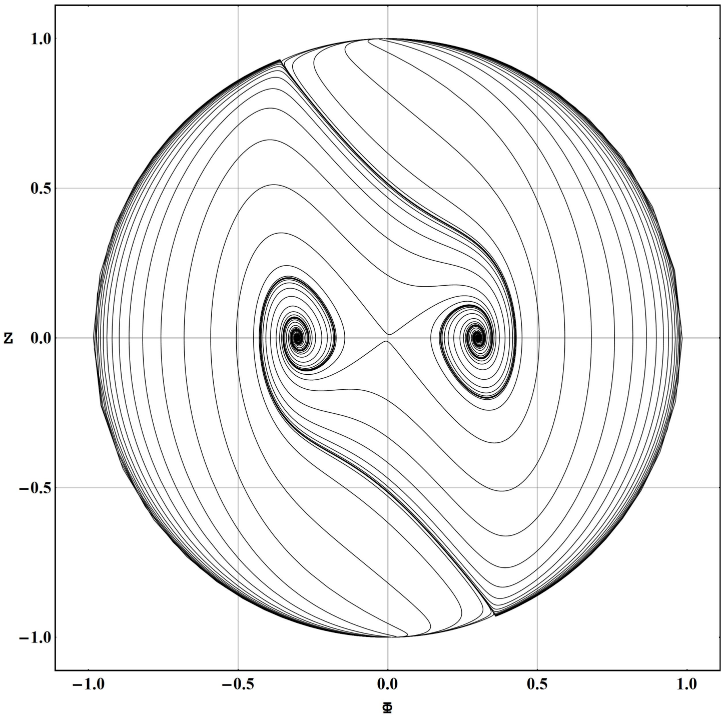

Рис. 1. Подпись рисунка.

[3] Мы используем планковскую систему единиц: $G = c = \hbar = 1$.

2.2. *Самосогласованные уравнения для пространственно-плоской модели Фридмана*

Выпишем самосогласованные уравнения пространственно - плоской космологической модели

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

– уравнение Эйнштейна

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\dot{\Phi}^2 + m^2\Phi^2 + \frac{\alpha}{2}\Phi^4 + \Lambda$$

и уравнение массивного фантомного скалярного поля с кубической нелинейностью[4]:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} - m_*^2\Phi = 0.$$

При этом тензор энергии – импульса (1) имеет структуру тензора энергии – импульса изотропной жидкости с плотностью энергии и давлением:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{8\pi}\left(-\dot{\Phi}^2 + m^2\Phi^2 + \frac{\alpha}{2}\Phi^4\right); \\ p &= -\frac{1}{8\pi}\left(\dot{\Phi}^2 + m^2\Phi^2 + \frac{\alpha}{2}\Phi^4\right), \end{aligned} \tag{4}$$

так что:

$$\varepsilon + p = -\frac{\dot{\Phi}^2}{4\pi}.$$

3. Качественный анализ

3.1. *Приведение системы уравнений к нормальному виду*

Пользуясь тем, что постоянную Хаббла можно выразить из уравнения Эйнштейна (3) через функции $\Phi, \dot{\Phi}$, переходя к безразмерному комптоновскому времени:

$$mt = \tau; \quad (m \not\equiv 0)$$

и проводя стандартную замену переменных $\Phi' = Z(t)$, приведем уравнение поля eq:fieldEq к виду нормальной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости $\{\Phi, Z\}$:

$$\Phi' = Z; \quad Z' = -\sqrt{3}\sqrt{\Lambda_m - Z^2 + \Phi^2 + \frac{\alpha_m}{2}\Phi^4}Z + \Phi + \alpha_m\Phi^3, \tag{5}$$

где $f' \equiv df/d\tau$ и введены обозначения:

$$\Lambda_m \equiv \frac{\Lambda}{m^2}; \quad \alpha_m \equiv \frac{\alpha}{m^2}.$$

При этом:

$$H = m\frac{a'}{a} \equiv mh; \quad \Omega = \frac{aa''}{a'^2} \equiv 1 + \frac{h'}{h^2}.$$

Таким образом, имеем автономную двумерную динамическую систему на фазовой плоскости $\{\Phi, Z\}$. Для приведения её к стандартным обозначениям качественной теории дифференциальных уравнений положим:

$$\Phi = x; \; Z = y; P(x, y) = y; \; Q(x, y) = -\sqrt{3}\sqrt{\Lambda_m - y^2 + x^2 + \frac{\alpha_m}{2}x^4}y + x + \alpha_m x^3.$$

Соответствующая нормальная система уравнений в стандартных обозначениях имеет вид:

$$x' = P(x, y); \quad y' = Q(x, y).$$

Для того, чтобы система дифференциальных уравнений (5) имела вещественное решение, необходимо выполнение неравенства:

$$\Lambda_m - y^2 + x^2 + \frac{\alpha_m}{2}x^4 \geq 0.$$

[4] Здесь и в дальнейшем $\dot{f} \equiv df/dt$.

3.2. *Численное моделирование для $\alpha < 0$*

Численное моделирование динамической системы проводилось в прикладном математическом пакете Mathematica. На представленных ниже рисунках 2, 3 показаны некоторые результаты численного уравнений (5), демонстрирующие наиболее характерные особенности динамики космологической системы.

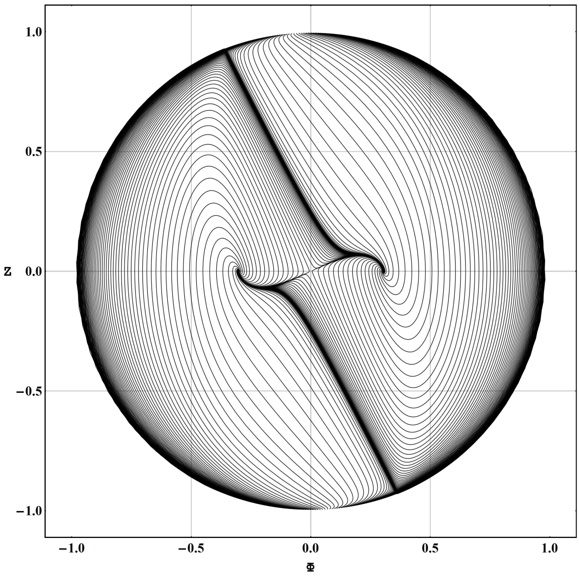

Рис. 2. Подпись первого рисунка.

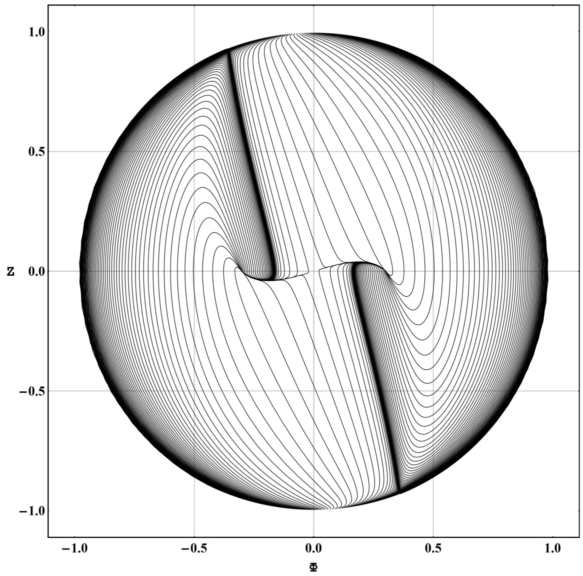

Рис. 3. Подпись второго рисунка.

4. Заключение

Нетрудно видеть, что система (5) инвариантна относительно преобразования

$$\Phi \to -\Phi; \quad Z \to -Z,$$

то есть, по отношению отражения от нулевой особой точки, но не инвариантна по отношению отражения от координатных осей. Кроме того видно, в что моменты времени $t = \pm\infty$ переменные $|\Phi(\pm\infty)| \to \infty$; Z($\pm\,\infty)| \to \infty$, то есть, в этой модели бесконечные значения скалярного потенциала и его производной достигаются, как в бесконечном прошлом, так и в бесконечном будущем. При этом фазовые траектории стремятся к сепаратрисам: $Z = \pm\Phi$, то есть, $\Phi \sim e^{\pm t}$. Поэтому при $\alpha > 0$ в бесконечном прошлом и бесконечном будущем $H = \mathrm{Const} \Rightarrow \Omega = 1$, то есть, как в бесконечном прошлом, так и в бесконечном будущем Вселенная находится на стадии инфляции.

В случае отрицательной константы взаимодействия в наиболее интересном случае существования двух симметричных фокусов решение уравнений космологической модели стремится к инфляционному в бесконечном будущем, причем в отличие от стандартной модели с классическим скалярным полем $\Phi(+\infty) = \Phi_\infty \neq 0$ и $\Phi(+\infty) \neq \Phi(-\infty)$. В этом случае поздняя инфляция может поддерживаться как космологической постоянной, так и поздним скалярным полем, что открывает новые возможности для манипуляции космологическими моделями в целях подгонки их к наблюдательным данным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 550 с.
2. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Едиториал УРСС, 2004. 400 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1966. 608 с.

4. Stokes A. A Floquet theory for functional-differential equations // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1962. Vol. 48. № 8. P. 1330–1334.

5. Данилов Л.И. О почти периодических сечениях многозначных отображений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 2. С. 34–41.

6. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Почти инвариантные множества управляемых систем // Дифференциальные уравнения и топология: тез. докл. Междунар. конф., посвященной 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина. МГУ. М., 2008. С. 392–393.

7. Борисов А.В., Мамаев И.С., Болсинов А.В. Топология и устойчивость динамических систем // Регулярная и хаотическая динамика: тез. докл. Всероссийской конференции. УдГУ. Ижевск, 2010. С. 11.

8. Зайцев В.А. Достижимость и ляпуновская приводимость линейных управляемых систем // Оптимизация, управление, интеллект: сб. статей. ИДСТУ СО РАН. Иркутск, 2005. № 2 (10). С. 76–84.

9. Bell M.G. Compact ccc non-separable spaces of small weight // Topology Proceedings. 1980. Vol. 5. P. 11–25. URL: http://topo.math.auburn.edu/tp/reprints/v05/tp05002s.pdf

Поступила в редакцию 11.05.2017

Игнатьев Юрий Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35.
E-mail: ignatev-yurii@mail.ru

Агафонов Александр Алексеевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35.
E-mail: a.a.agathonov@gmail.com

Yu. G. Ignat'ev, A. A. Agathonov

The qualitative and numerical analysis of the cosmological model based on phantom scalar field with self interation

Keywords: phantom scalar field, quality analysis, asymptotic behavior, numerical simulation, numerical gravitation.

PACS: 34D08, 93C15

Based on a qualitative analysis of the system of differential equations a cosmological model based on phantom scalar field, the asymptotic behavior of such models and shows that in contrast to the models with a classical scalar field, such models are asymptotically stable solutions with a constant value of the potential in the infinite past, and in the infinite future. The numerical models of cosmological evolution models with phantom scalar field.

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Nekotorye zadachi teorii ustoichivosti dvizheniya* (Some problems of the theory of stability of motion), Moscow: Fizmatgiz, 1959, 550 p.

2. Kalman R., Falb P., Arbib M. *Topics in mathematical system theory*, New York: McGraw-Hill, 1969, 358 p. Translated under the title *Ocherki po matematicheskoi teorii sistem*, Moscow: Editorial URSS, 2004, 400 p.

3. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* (A course of differential and integral calculus), vol. 1, Moscow: Nauka, 1966, 608 p.

4. Stokes A. A Floquet theory for functional-differential equations, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1962, vol. 48, no. 8, pp. 1330–1334.

5. Danilov L.I. On almost periodic selections of multivalued maps, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2008, no. 2, pp. 34–41.

6. Rodina L.I., Tonkov E.L. The almost invariant sets of controlled systems, *Differential Equation and Topology: Abstracts of Int. Conf. Dedicated to the Centennial Anniversary of Lev Semenovich Pontryagin*, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 2008, pp. 392–393.

7. Borisov A.V., Mamaev I.S., Bolsinov A.V. Topology and stability of dynamic systems, *Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika: tez. dokl. Vserossiiskoi konferentsii* (Regular and chaotic dynamics: abstracts of All-Russian conference), Udmurt State University, Izhevsk, 2010, p. 11.

8. Zaitsev V.A. Attainability and Lyapunov reducibility of linear control systems, *Optimizatsiya, upravlenie, intellekt: sbornik statei* (Optimization, control, intelligence: Transactions), Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 2005, no. 2 (10), pp. 76–84.

9. Bell M.G. Compact ccc non-separable spaces of small weight, *Topology Proceedings*, 1980, vol. 5, pp. 11–25. http://topo.math.auburn.edu/tp/reprints/v05/tp05002s.pdf

Received 11.05.2017

Ignat'ev Yurii Gennadievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: ignatev-yurii@mail.ru

Agathonov Alexander Alexeevich, Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: a.a.agathonov@gmail.com