УДК 53.01+524.8+51-71

ГЛОБАЛЬНОЕ ВРАЩЕНИЕ СРЕДЫ В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЙ КОСМОЛОГИИ

Журавлев В. М.[a,1]

[a] Ульяновский государственный педагогический университет, Лаборатория гравитации, космологии и астрофизики, г. Ульяновск, 432071, пл. Ленина, д. 4/5, Россия.

Построена космологическая модель эволюции вращающейся пылевидной среды с квазиклассическим полем тяготения, допускающим эффект скрытой массы (“темной материи”). Выведены уравнения эволюции масштабных факторов и дан краткий их анализ. Получены выражения для плотности среды и ее эволюции

Ключевые слова: Динамика самогравитирующей пыли, глобальное вращение, космология, уравнения Фридмана, темная материя, эффект скрытой массы.

GLOBAL ROTATION OF THE MEDIUM IN QUASI-CLASSICAL COSMOLOGY

Zhuravlev V. M.[a,1]

[a] Uliyanovsk Pedagogic State University, Laboratory of Gravity, Cosmology and Astrophysics, Uliyanovsk, 432071, Lenin Square, 4/5, Russia

A cosmological model of the evolution of a rotating dust medium with a quasi-classical gravitational field allowing for the effect of hidden mass (‘dark matter") is constructed. The equations of evolution of scale factors are derived and their brief analysis is given. Expressions for the density of the medium and its evolution are obtained

Keywords: Dynamics of self-gravitating dust, global rotation, cosmology, Friedman equations, dark matter, hidden mass effect .

PACS: 04.40.-b, 04.20.Cv
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2025.3.44-55

1. Введение

В работе [1] была построена космологическая модель в рамках теории квазиклассического поля тяготения, допускающая эффект скрытой массы, являющийся вариантом объяснения эффекта “темной материи”. Квазиклассическая космологическая модель является обобщением классической теории космологической эволюции [2–4]. Важным элементом квазиклассической теории поля тяготения [5] является новое представление решений классического уравнения Пуассона для напряженности поля тяготения, которое в расширенном варианте позволяет описать поле с эффектом скрытой массы. Этот подход опирается на Топологическую теорию фундаментальных полей [6–11]. Как было показано в [1], квазиклассические космологические модели позволяют решить некоторые проблемы современной космологии, например, проблему космологической постоянной [12, 13], исходя из того, что основным компонентом среды на космологических масштабах является “пылевидное” вещество (звезды и галактики). Такие модели допускают сложную эволюцию масштабных

[1]E-mail: zhvictorm@gmail.com

факторов, обусловленную не совокупностью множества различных материальных компонентов среды, как это принято в космологических моделях в Общей теории относительности (ОТО), а внешними условиями на границе наблюдаемой области Вселенной [1].

В настоящей работе, используя общий подход, развитый в работах [1,5], строится квазиклассическая космологическая модель с вращением среды. Наличие глобального вращения среды на космологических масштабах в настоящее время не наблюдается. Однако для анализа крупномасштабной структуры Вселенной на уровне скоплений галактик этот вопрос представляет интерес [13].

2. Лагранжево описание параметров среды и поля

Основой описания динамического равновесия пылевых структур [1, 5] является лагранжевы переменные или маркеры $e^a(\mathbf{x},t),\ a=1,2,3$, удовлетворяющие по определению уравнениям:

$$\frac{\partial e^a}{\partial t} \equiv \frac{\partial e^a}{\partial t} + u^\alpha \frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} = 0, \quad a=1,2,3. \tag{1}$$

Здесь и далее $\mathbf{x}=(x^1,x^2,x^3)$. Следствием этой системы уравнений является возможность представить плотность среды ρ с помощью соотношения:

$$\rho = M_0 \aleph(\mathbf{e})|J|, \tag{2}$$

где M_0 - размерная постоянная, $\aleph(\mathbf{e})$ - некоторая безразмерная дифференцируемая функция маркеров $\mathbf{e}=(e^1,e^2,e^3)$, $\mathbf{u}=(u^1,u^2,u^3)$ - декартовы компоненты поля скоростей гидродинамического потока и:

$$|J| = |\det \hat{\mathbf{J}}|. \tag{3}$$

- якобиан преобразования $\mathbf{e}\to\mathbf{x}$ с матрицей Якоби:

$$\hat{\mathbf{J}} = \left(\frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha}\right) \tag{4}$$

Такая возможность связана с тем, что функция (2) автоматически удовлетворяет уравнению неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\Big(\rho\mathbf{u}\Big) = 0. \tag{5}$$

Физический смысл соотношения (2) состоит в том, что плотность массы связывается с плотностью числа частиц, которая в точности равна $|J(\mathbf{x},t)|$. Функция $\aleph(\mathbf{e})$ описывает различия в массивности отдельных частиц среды, помеченных различными маркерами $\mathbf{e}$. Если все частицы имеют одинаковую массивность, то $\aleph=1$. Эта функция играет очень важную роль в интерпретации понятия скрытой массы или “темной материи” в рамках данного подхода и более общей теории [6–11].

Классическое поле тяготения также допускает описание в терминах лагранжевых переменных [5]. Как было показано в [5], векторное поле $\mathbf{g}$ с компонентами:

$$g^\alpha = \frac{4\pi G}{3} M_0 \Xi(\mathbf{e},t)|J| e^a \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} + [\mathrm{rot}\mathbf{W}]^\alpha, \quad \alpha=1,2,3, \tag{6}$$

удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\mathrm{div}\mathbf{g} = -4\pi G\mathcal{D}(\mathbf{e},t)\rho, \tag{7}$$

в котором:

$$\mathcal{D} = \frac{\Xi}{\aleph}\left(1 + \frac{1}{3}e^a \frac{\partial}{\partial e^a}\ln\Xi(\mathbf{e},t)\right). \tag{8}$$

Гладкое векторное поле $\mathbf{W}$ можно рассматривать как калибровочное, позволяющее компенсировать в поле $\mathbf{g}$ вихревую составляющую. В случае, если $\mathcal{D}=1$, что эквивалентно уравнению для функции $\Xi(\mathbf{e},t)$ следующего вида:

$$\Xi + \frac{1}{3}e^a \frac{\partial}{\partial e^a}\Xi(\mathbf{e},t) = \aleph(\mathbf{e}), \tag{9}$$

уравнение (7) в точности переходит в классическое уравнение Пуассона

$$\mathrm{div}\mathbf{g} = -4\pi G\rho. \tag{10}$$

В общем случае $\mathcal{D} \neq 1$ функцию

$$\rho_{eff} = \mathcal{D}\rho = \rho + \rho_D$$

можно рассматривать как эффективную плотность с плотностью “темной материи” :

$$\rho_D = (\mathcal{D} - 1)\rho.$$

3. Динамическое равновесие и автомодельные переменные

Понятие динамического равновесия [14] опирается на представление параметров среды и поля как функций тех или иных типов автомодельных переменных. Основным способом ввести автомодельные переменные является представление поля скорости среды в следующей форме:

$$u^\alpha = \dot{\theta}_\alpha \xi^\alpha(\mathbf{e}), \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{11}$$

Здесь $\xi^\alpha(\mathbf{e})$ - автомодельные переменные, являющиеся функциями маркеров, а $\theta_\alpha(t)$ - некоторые функции времени, часто называемые масштабными факторами. Поскольку ξ^α - функции маркеров, то маркеры можно представить функциями только автомодельных переменных:

$$e^a = e^a(\xi^1, \xi^2, \xi^3). \tag{12}$$

В силу того, что $\xi^\alpha(\mathbf{e})$ - функции маркеров, для эйлерова ускорения частиц среды имеют место соотношения:

$$\frac{du^\alpha}{dt} = \ddot{\theta}_\alpha \xi^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{13}$$

С другой стороны, (11) можно представить в следующем виде:

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = \dot{\theta}_\alpha(t)\xi^\alpha, \quad \frac{d\xi^\alpha}{dt} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{14}$$

Интегрируя эти уравнения, находим:

$$x^\alpha = \xi^\alpha \theta_\alpha(t) + X_0^\alpha(\xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad \alpha = 1, 2, 3, \tag{15}$$

где X_0^α - постоянные интегрирования (интегралы движения), зависящие от автомодельных переменных, которые определяются начальными условиями. Задавая функциональный вид X_0^α, можно получать различные типы автомодельных переменных, которые будут определять различную форму динамического равновесия астрофизических объектов. Если X_0^α, как функция автомодельных переменных, имеет сложную форму, то в общем случае вся область значений автомодельных переменных будет разделяться на ряд отдельных областей, в которых функциональный вид ξ^α будет отличаться от других областей. Это является следствием многозначности решений нелинейных уравнений (15) относительно ξ^α в случае нелинейной формы X_0^α как функций ξ^α. Вместе с тем есть несколько достаточно простых вариантов выбора $X_0^\alpha(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, которые оказываются полезными в прикладных задачах динамики самогравитирующей среды.

В космологии и звездной динамике [5, 14] наиболее часто встречаются автомодельные переменные, соответствующие потоку Хаббла с $X^\alpha = 0, \ \alpha = 1, 2, 3$. В этом случае:

$$\xi^\alpha = \frac{x^\alpha}{\theta_\alpha}, \quad u^\alpha = H_\alpha(t)x^\alpha, \ \alpha = 1, 2, 3,$$

где:

$$H_\alpha = \frac{\dot{\theta}^\alpha}{\theta_\alpha}, \ \alpha = 1, 2, 3,$$

называются параметрами Хаббла. Такой выбор автомодельных переменных описывает растяжения и сжатия масштабов структуры объектов вдоль осей координат.

В данной работе для описания вращения среды мы используем другой тип выбора $X_0^\alpha(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, соответствующий представлению:

$$X_0^\alpha = T_\beta^\alpha \xi^\beta, \tag{16}$$

где матрица $\hat{\mathbf{T}}$ с постоянными компонентами T_β^α предполагается невырожденной. В результате связь между ξ^α и физическими координатами будет иметь такой вид:

$$x^\alpha = P_\beta^\alpha(t)\xi^\beta, \quad \xi^\alpha = Q_\beta^\alpha(t)x^\beta, \tag{17}$$

где матрица $\hat{\mathbf{Q}}(t)$ с элементами $Q_\beta^\alpha(t)$ является обратной к матрице $\hat{\mathbf{P}}(t)$ с элементами:

$$P_\beta^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\beta} = \delta_\beta^\alpha \theta_\alpha(t) + T_\beta^\alpha. \tag{18}$$

Такой вариант выбора автомодельных переменных описывает в общем случае кроме растяжений и сжатий масштабов координат по осям еще и их вращение относительно начала координат.

Будем полагать, что вращение системы автомодельных переменных происходит вокруг оси $x^3 = z$. Введем также обозначения: $x^1 = x,\ x^2 = y$. Выберем матрицу $\hat{\mathbf{T}}$ в таком виде:

$$\hat{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} T_1^1 & T_2^1 & 0 \\ T_1^2 & T_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3^3 \end{pmatrix}$$

Соответственно, матрица $\hat{\mathbf{Q}}$ примет такой вид:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} a^{-2}(t)(T_2^2 + \theta_2(t)) & -a^{-2}(t)T_2^1 & 0 \\ -a^{-2}(t)T_1^2 & a^{-2}(t)(T_1^1 + \theta_1(t)) & 0 \\ 0 & 0 & b^{-1}(t) \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Здесь

$$a = \sqrt{\theta_1(t)\theta_2(t) + T_1^1\theta_2(t) + T_2^2\theta_1(t) + T_1^1T_2^2 - T_1^2T_2^1}, \quad b = \theta_3(t) + T_3^3.$$

Автомодельные переменные для такого выбора матрицы $\hat{\mathbf{T}}$ будут выглядеть так:

$$\begin{aligned} \xi^1 &= a^{-2}(t)\Big((T_2^2 + \theta_2(t))x - T_2^1 y\Big), \\ \xi^2 &= a^{-2}(t)\Big(-T_1^2 x + (T_1^1 + \theta_1(t))y\Big), \\ \xi^3 &= z/b(t). \end{aligned} \tag{20}$$

Заметим, что матрица $\hat{\mathbf{Q}}$ (19) не является ортогональной. Поэтому система координат автомодельных переменных будет косоугольной. Это означает, что оси автомодельной системы координат, соответствующие ξ_1 и ξ_2, будут не ортогональны друг другу, причем углы между ними, а также с осями x, y исходной декартовой системы координат, будут в общем случае меняться независимо друг от друга. Такие переменные могут описывать достаточно сложное автомодельное изменение структуры астрофизических объектов.

В более простой постановке задачи автомодельные переменные должны описывать однородное вращение вокруг оси z с возможным независимым изменением масштабов вдоль z и радиальной координаты в плоскости x, y. Такие автомодельные переменные соответствуют следующей редукции матрицы $\hat{\mathbf{T}}$:

$$T_2^1 = h, \quad T_1^2 = -h, \quad T_1^1 = T_2^2 = f,$$

где f и h - вещественные постоянные. Кроме этого, необходимо потребовать выполнение условия:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_0(t).$$

В этом случае матрица $\hat{\mathbf{Q}}$ оказывается ортогональной. В результате используемые далее автомодельные переменные будут иметь такой вид:

$$X = \xi_1 = \frac{r}{a(t)}\cos(\varphi + \chi(t)), \quad Y = \xi_2 = \frac{r}{a(t)}\sin(\varphi + \chi(t)), \quad Z = \xi_3 = z/b(t) \tag{21}$$

Здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ - радиальная координата в плоскости x, y. Функции $a(t)$, $b(t)$ и $\chi(t)$ (см. Приложение) определяются следующим образом:

$$a = \sqrt{\theta^2(t) + h^2}, \quad b = \theta_3(t) + T_3^3, \quad \chi = \arctan(h/\theta(t)), \quad \theta = \theta_0(t) + f. \tag{22}$$

Будем полагать, что автомодельные переменные X, Y, Z являются безразмерными. Отсюда следует, что функции $\theta(t)$, $a(t)$, $b(t)$, а также постоянные f и h, имеют размерность длины.

4. Параметры среды и поля в автомодельных переменных

Основная задача теперь состоит в том, чтобы записать уравнения (32)-(33) в новых автомодельных переменных $\mathbf{X} = (X, Y, Z)$. Для этого необходимо записать в автомодельных переменных параметры среды и поля.

Якобиан преобразования в переменных $\mathbf{X}$ имеет следующий вид:

$$J = \det\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}\right)\det\left(\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{X}}\right) = \det\hat{\mathbf{Q}}(t)\det\left(\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{X}}\right) = A(t)\mathcal{J}(\mathbf{X}), \tag{23}$$

где

$$A = 1/\det\hat{\mathbf{Q}}(t) = b(t)a^2(t), \quad \mathcal{J}(\mathbf{X}) = \det\left(\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{X}}\right).$$

Здесь использованы определения (3) и (4).

Для перезаписи этих уравнений в терминах автомодельных переменных достаточно представить плотность массы в такой форме:

$$\rho = \frac{M_0}{A(t)}\aleph(\mathbf{X})|\mathcal{J}(\mathbf{X})| = \frac{M_0}{A(t)}\mathcal{R}(\mathbf{X}), \tag{24}$$

где

$$\mathcal{R} = \aleph(\mathbf{X})|\mathcal{J}(\mathbf{X})|. \tag{25}$$

Ускорение свободного падения (6) можно записать в такой форме:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_K + \mathbf{g}_W,$$

где

$$\mathbf{g}_K = \Gamma_0\mathbf{K}, \quad \mathbf{g}_W = \mathrm{rot}\mathbf{W}, \tag{26}$$

$$K^\alpha = \Gamma_0\Xi(\mathbf{X}, t)|J|e^a\frac{\partial X^\beta}{\partial e^a}\frac{\partial x^\alpha}{\partial X^\beta} = A^{-1}(t)|\mathcal{J}(\mathbf{X})|P^\alpha_\beta(t)\Xi(\mathbf{X}, t)\mathcal{K}^\beta(\mathbf{X}). \tag{27}$$

Здесь $\Gamma_0 = 4\pi G M_0/3$ и:

$$\mathcal{K}^\beta = \frac{\partial X^\beta}{\partial e^a}e^a. \tag{28}$$

Векторное поле $\mathbf{K}$ с компонентами $\mathcal{K}^\alpha$ зависит только от автомодельных переменных, а матрица $\hat{\mathbf{P}}$ с компонентами, определенными в соотношении (18), зависит только от t. Используя (27), получаем следующие соотношения для g^α:

$$\begin{aligned} g_K^1 &= -\frac{\Gamma_0}{a^2(t)b(t)}|\mathcal{J}|\Xi\Big(\theta(t)\mathcal{K}^1(\mathbf{X}) + h\mathcal{K}^2(\mathbf{X})\Big), \\ g_K^2 &= -\frac{\Gamma_0}{a^2(t)b(t)}|\mathcal{J}|\Xi\Big(-h\mathcal{K}^1(\mathbf{X}) + \theta(t)\mathcal{K}^2(\mathbf{X})\Big), \\ g_K^3 &= -\frac{\Gamma_0}{a^2}|\mathcal{J}|\Xi\mathcal{K}^3(\mathbf{X}). \end{aligned} \tag{29}$$

Прямой проверкой убеждаемся, что поле $\mathbf{K}$ с компонентами $\mathcal{K}^\alpha$ удовлетворяет тождеству:

$$\frac{\partial |\mathcal{J}|\Xi\mathcal{K}^1}{\partial X} + \frac{\partial |\mathcal{J}|\Xi\mathcal{K}^2}{\partial Y} + \frac{\partial |\mathcal{J}|\Xi\mathcal{K}^3}{\partial Z} = 3\mathcal{R}\mathcal{D}. \tag{30}$$

Для компонентов вектора $\mathbf{g}_W$ с учетом (21) имеем:

$$\begin{aligned}
g_W^1 &= \frac{\partial}{\partial y}W^3 - \frac{\partial}{\partial z}W^2 = a^{-2}hW_X^3 + a^{-2}\theta(t)W_Y^3 - b^{-1}W_Z^2,\\
g_W^2 &= \frac{\partial}{\partial z}W^1 - \frac{\partial}{\partial x}W^3 = b^{-1}W_Z^1 - a^{-2}\theta(t)W_X^3 + a^{-2}hW_Y^3,\\
g_W^3 &= \frac{\partial}{\partial x}W^2 - \frac{\partial}{\partial y}W^1 = a^{-2}\theta(t)\Big(W_X^2 - W_Y^1\Big) - a^{-2}h\Big(W_Y^2 + W_X^1\Big).
\end{aligned} \tag{31}$$

5. Уравнения динамики самогравитирующей пыли

Динамика самогравитирующего газа и пыли в рамках классической механики описывается в декартовой системе координат уравнениями Эйлера и Пуассона :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} = -\nabla\phi,\\
&\rho_t + \mathrm{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, && (32)\\
&\mathrm{div}\mathbf{g} = -4\pi G\rho. && (33)
\end{aligned}$$

В этих уравнениях $\mathbf{u} = (u,\ v,\ w)$ - компоненты скорости гидродинамического потока, ρ - плотность пыли , ϕ - потенциал поля тяготения, G - постоянная тяготения Ньютона, r и z - радиальная и вертикальная координаты, t - время.

Собирая теперь все соотношения для параметров среды в автомодельных переменных, включая (13), получаем уравнения динамики в следующей форме:

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta}X &= -\frac{\Gamma_0}{a^2(t)b(t)}|\mathcal{J}|\Xi(\mathbf{X},t)\Big(\theta(t)\mathcal{K}^1(\mathbf{X}) + h\mathcal{K}^2(\mathbf{X})\Big) + a^{-2}hW_X^3 + a^{-2}\theta(t)W_Y^3 - b^{-1}W_Z^2,\\
\ddot{\theta}Y &= -\frac{\Gamma_0}{a^2(t)b(t)}|\mathcal{J}|\Xi(\mathbf{X},t)\Big(-h\mathcal{K}^1(\mathbf{X}) + \theta(t)\mathcal{K}^2(\mathbf{X})\Big) + b^{-1}W_Z^1 - a^{-2}\left(\theta(t)W_X^3 - hW_Y^3\right),\\
\ddot{b}Z &= -\frac{\Gamma_0}{a^2(t)}|\mathcal{J}|\Xi(\mathbf{X},t)\mathcal{K}^3(\mathbf{X}) + a^{-2}\left(\theta(t)\Big(W_X^2 - W_Y^1\Big) - h\Big(W_Y^2 + W_X^1\Big)\right).
\end{aligned} \tag{34}$$

В каждом из этих уравнений необходимо произвести разделение переменных, получив уравнения относительно $\theta(t)$ и $b(t)$, а также уравнения, описывающие автомодельную структуру исследуемого объекта.

В этих уравнениях функция $\Xi(\mathbf{X},t)$ и компоненты поля $\mathbf{W}(\mathbf{X},t)$ пока не определены. Поэтому по аналогии с $[1,5]$ их можно представить в виде рядов произведений функций от $\mathbf{X}$ и от t. При этом в силу того, что $\Xi(\mathbf{X},t)$ и компоненты поля $\mathbf{W}(\mathbf{X},t)$ входят в уравнения линейно и аддитивно, то соответствующие ряды можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\Xi = A(t)\sum_{j=0}^{\infty} f_j(t)\Xi_j(\mathbf{X}),\quad \mathcal{D} = A(t)\sum_{j=0}^{\infty} f_j(t)\mathcal{D}_j(\mathbf{X}),\quad W^3 = a^2(t)\sum_{j=0} f_j(t)\mathcal{W}_j^3(\mathbf{X}),\\
&W^1 = hb(t)\sum_{j=0} f_j(t)\mathcal{W}_j^1(\mathbf{X}),\quad W^2 = hb(t)\sum_{j=0} f_j(t)\mathcal{W}_j^2(\mathbf{X}),
\end{aligned} \tag{35}$$

где функции $f_j(t)$ по t одинаковы и для $\Xi(\mathbf{X},t)$ и для компонентов поля $\mathbf{W}(\mathbf{X},t)$.

После разделения переменных получаем систему уравнений относительно функций от пространственных переменных и систему уравнений относительно переменных, зависящих от времени.

Условия, следующие из третьего уравнения системы (34), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&h\left(\frac{\partial\mathcal{W}_j^1}{\partial Y} - \frac{\partial\mathcal{W}_j^2}{\partial X}\right) = -p_jZ,\quad h^2\left(\frac{\partial\mathcal{W}_j^1}{\partial X} + \frac{\partial\mathcal{W}_j^2}{\partial Y}\right) = -q_jZ,\\
&\mathcal{K}^3 = 0,
\end{aligned} \tag{36}$$

где $p_j,\ q_j,\ j = 0,\ldots,\infty$ - вещественные постоянные. Последнее условие следует из требования независимости функций $\Xi_j(\mathbf{X})$. Общее решение этих уравнений можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{W}^1 = \frac{\partial \mathcal{H}_j}{\partial X} - \mu_j XZ/h^2 + \chi_j YZ, \quad \mathcal{W}^2 = \frac{\partial \mathcal{H}_j}{\partial Y} + \nu_j XZ/h + \zeta_j YZ, \tag{37}$$

где $\mu_j, nu_j, p_j, q_j,\ j = 0,\ldots,\infty$ - вещественные постоянные. Подставляя это представление в первые два уравнения системы (36) находим, что функции $\mathcal{H}_j$ должны удовлетворять уравнениям:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}_j}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}_j}{\partial Y^2} = 0, \quad j = 0,\ldots,\infty.$$

При этом уравнение для функции времени $b(t)$ таковы:

$$\ddot{b} = \Gamma_0 \frac{b(t)}{a^2}\Big(\theta(t)P(t) + Q(t)\Big), \tag{38}$$

где μ_j и ν_j - параметры разделения переменных и введены обозначения:

$$P = \sum_{j=0}^{\infty} p_j f_j(t), \quad Q = \sum_{j=0}^{\infty} q_j f_j(t).$$

Первые два уравнения системы (34) эквивалентны для каждого $j = 0,\ldots,\infty$ следующим условиям:

$$\begin{aligned} -|\mathcal{J}|\Xi_j\mathcal{K}^1 + \frac{\partial \mathcal{W}_j^3}{\partial Y} = \lambda_j^{(1)} X, \quad -|\mathcal{J}|\Xi_j\mathcal{K}^2 + h\frac{\partial \mathcal{W}_j^3}{\partial X} - h\frac{\partial \mathcal{W}_j^2}{\partial Z} = \lambda_j^{(2)} X, \\ -|\mathcal{J}|\Xi_j\mathcal{K}^2 - \frac{\partial \mathcal{W}_j^3}{\partial X} = \lambda_j^{(1)} Y, \quad |\mathcal{J}|\Xi_j\mathcal{K}^1 + h\frac{\partial \mathcal{W}_j^3}{\partial Y} + h\frac{\partial \mathcal{W}_j^1}{\partial Z} = \lambda_j^{(2)} Y. \end{aligned} \tag{39}$$

Соответствующее уравнение для функции $\theta(t)$ примет такой вид:

$$\ddot{\theta} = \Gamma_0\Big(\theta(t)L_1(t) + L_2(t)\Big), \tag{40}$$

где введены обозначения:

$$L_k = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^{(k)} f_j(t), \quad k = 1, 2.$$

Для каждого j можем получить следующие соотношения:

$$|\mathcal{J}|K^1 = -\frac{1}{\Xi_j}\left(\lambda_j^{(1)} X - \frac{\partial \mathcal{W}_j^3}{\partial Y}\right), \quad |\mathcal{J}|K^2 = -\frac{1}{\Xi_j}\left(\lambda_j^{(1)} Y + \frac{\partial \mathcal{W}_j^3}{\partial X}\right). \tag{41}$$

Тогда оставшаяся пара уравнений для каждого j в системе (39) примет такой вид:

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial \mathcal{W}_j^3}{\partial X} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}_j}{\partial Y \partial Z} + (\lambda_j^1 - \zeta_j)Y - (\nu_j + \lambda_j^2)/hX = 0, \\ 2\frac{\partial \mathcal{W}_j^3}{\partial Y} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}_j}{\partial X \partial Z} - (2\lambda_j^2/h - \chi_j)Y - (\mu_j/h^2 + \lambda_j^1)X = 0. \end{aligned} \tag{42}$$

Общее решение этой системы можно искать в следующей форме:

$$H_j = 2\frac{\partial \mathcal{U}_j(X,Y,Z)}{\partial X}, \quad W_j^3 = \frac{\partial^2 \mathcal{U}_j}{\partial Z \partial Y} + k_j X^2 + m_j XY + n_j Y^2, \tag{43}$$

где $\mathcal{U}_j(X,Y,Z)$ - дифференцируемые функции. Подставляя эти соотношения в уравнения (42), приходим к условиям:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}_j}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}_j}{\partial Y^2} = 0, \tag{44}$$

и соотношениям на коэффициенты k_j, m_j, n_j:

$$m_j = -\lambda_j^{(1)}/2 + \zeta_j/2, \quad k_j = \Big(\lambda_j^{(2)} + \nu_j\Big)/(4h),$$
$$n_j = \lambda_j^{(2)}/(4h) - \chi_j/4, \quad mu_j = h^2(\zeta_j - 2\lambda_j^{(1)}),$$
$$p_j = \nu_j - h\chi_j, \quad q_j = -2h^2\lambda_j^{(1)}.$$

Отсюда, в частности, следует связь между функциями $Q(t)$ и $L_1(t)$:

$$Q = -2h^2 L_1(t). \tag{45}$$

6. Уравнение для $\mathcal{R}$ и $\mathcal{D}_j$

Используя соотношения (30), (41), а также $\mathcal{K}^3 = 0$, получаем следующее уравнение для $\mathcal{R}$ и $\mathcal{D}_j$:

$$\mathcal{D}_j = -\frac{1}{3\mathcal{R}}\Big(\lambda_j^{(1)} + \lambda_j^{(2)}\Big), \quad j = 0, \ldots, \infty. \tag{46}$$

Это соотношение аналогично соотношению, полученному в работе [1] для случая эволюции пылевой среды без собственного вращения. Из (46) следует:

$$\mathcal{D} = -\frac{1}{3\mathcal{R}} A(t)\Big(L_1(t) + L_2(t)\Big). \tag{47}$$

Таким образом, уравнение Пуассона для пылевидной среды с учетом (35) и (47) принимает такой вид:

$$\mathrm{div}\mathbf{g} = \frac{4\pi G M_0}{3}\Big(L_1(t) + L_2(t)\Big). \tag{48}$$

Как и в работе [1], правая часть уравнения Пуассона в случае наличия эффекта скрытой массы, представляет собой функцию, не зависящую от пространственных переменных. Это означает, что в такой теории эффективная плотность вещества с учетом скрытой массы оказывается всюду в пространстве постоянной величиной, меняющейся лишь со временем.

Учитывая (8), получаем следующую связь между Ξ_j и $\mathcal{D}_j$:

$$\mathcal{D}_j = -\frac{\Lambda_j}{3\mathcal{R}} = \frac{1}{3\aleph}\left(3\Xi_j + e^a \frac{\partial \Xi_j}{\partial e^a}\right), \quad j = 0, \ldots, \infty,$$

где введено обозначение: $\Lambda_j = \lambda_j^{(1)} + \lambda_j^{(2)}$. Используя определение $\mathcal{R}$, перепишем это соотношение в следующем виде:

$$\left(3\Xi_j + e\frac{\partial \Xi_j}{\partial e}\right) = -\Lambda_j \frac{1}{3|\mathcal{J}|}, \quad j = 0, \ldots, \infty,$$

где:

$$e^2 = (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2.$$

Решения аналогичного уравнения исследовались в [5]. Общее решение можно записать в такой форме:

$$\Xi_j = \frac{1}{e^3}\left(\sigma_j(\Phi, \Theta) - \Lambda_j \int\limits_0^e \frac{e^2 de}{\mathcal{J}(\mathbf{e})}\right). \tag{49}$$

Здесь $\operatorname{tg}\Phi = e^2/e^1$, $\Theta = \arcsin(e^3/e)$, а $\sigma_j(\Phi, \Theta)$ - постоянные интегрирования по e. Как показано в [5] слагаемое в (49) с множителями $\sigma_j(\Phi, \Theta)$ в записи напряженности поля тяготения соответствует полю источников с δ-образным распределением плотности массы с носителем в точках с координатами $\mathbf{x}_j$, в которых $e(\mathbf{x}_j, t) = 0$. Если сингулярных источников нет, то следует полагать $\sigma_j = 0$. В реальности, если следовать ТТФП [6–9, 9–11], то слагаемые с gs_j должны быть эквивалентны заряженным объектам с нетривиальной геометрией и, возможно, топологией. Однако рассмотрение этого вопроса выходит за рамки данной работы. В этом случае $\sigma_j = 0$, а решение для напряженности поля тяготения можно получать непосредственно из уравнения (48).

Учитывая сделанные замечания, соотношения (49) удобно записать в такой форме:

$$\Xi_j = -\Lambda_j \mathcal{S}(\mathbf{e}), \tag{50}$$

где

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{e^3}\int\limits_0^e \frac{e^2 de}{\mathcal{J}(\mathbf{e})}.$$

Таким образом, функции Ξ_j отличаются друг от друга только постоянными множителями. Исходя из этого, можно получить дополнительные следствия из соотношений (41), в которые входят функции Ξ_j.

Используя (50), получим теперь дополнительные соотношения на постоянные $\lambda_j^{(1)}$ и $\lambda_j^{(2)}$. Используя (43) и (50), перепишем соотношения (41) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Lambda_j \mathcal{S}|\mathcal{J}|K^1 &= \lambda_j^{(1)} X - \frac{\partial^3 \mathcal{U}_j}{\partial Z \partial Y^2} + m_j X + 2n_j Y,\\ \Lambda_j \mathcal{S}|\mathcal{J}|K^2 &= \lambda_j^{(1)} Y + \frac{\partial^3 \mathcal{U}_j}{\partial Z \partial Y \partial X} + 2k_j X + m_j Y.\end{aligned} \tag{51}$$

Для того, чтобы эти соотношения выполнялись, необходимо потребовать:

$$\mathcal{U}_j(X,Y,Z) = B_j \mathcal{V}(X,Y,Z) - m_j\Big(ZY^2X/2 - ZX^3\Big) - n_j ZY^3/3 - k_j ZX^2 Y.$$

В результате соотношения (51) принимают следующую форму:

$$\begin{aligned}\Lambda_j \mathcal{S}|\mathcal{J}|K^1 &= \lambda_j^{(1)} X - B_j \frac{\partial^3 \mathcal{V}}{\partial Z \partial Y^2},\\ \Lambda_j \mathcal{S}|\mathcal{J}|K^2 &= \lambda_j^{(1)} Y + B_j \frac{\partial^3 \mathcal{V}}{\partial Z \partial Y \partial X}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что существует два основных варианта выбора постоянных в этих двух соотношениях. Первый:

$$\lambda_j^{(2)} = 0, \quad B_j = \lambda_j^{(1)}, \tag{52}$$

и

$$\lambda_j^{(1)} = 0, \quad B_j = \lambda_j^{(2)}. \tag{53}$$

В случае (52) решение для $\mathcal{K}^1, \mathcal{K}^2$ можно записать в следующем виде:

$$K^1 = \frac{1}{\mathcal{S}|\mathcal{J}|}\left(X - \frac{\partial^3 \mathcal{V}}{\partial Z \partial Y^2}\right), \quad K^2 = -\frac{1}{\mathcal{S}|\mathcal{J}|}\left(Y + \frac{\partial^3 \mathcal{V}}{\partial Z \partial Y \partial X}\right). \tag{54}$$

В случае (53) имеем:

$$K^1 = -\frac{1}{\mathcal{S}|\mathcal{J}|}\frac{\partial^3 \mathcal{V}}{\partial Z \partial Y^2}, \quad K^2 = \frac{1}{\mathcal{S}|\mathcal{J}|}\frac{\partial^3 \mathcal{V}}{\partial Z \partial Y \partial X}. \tag{55}$$

Соответственно, для (52) имеем: $L_2 = 0$, а для (53) - $L_1 = 0$. В результате уравнения для масштабных факторов с учетом (45) примут такой вид для (52):

$$\ddot{\theta} = \Gamma_0\Big(\theta(t) L_1(t)\Big), \quad \ddot{b} = \Gamma_0 \frac{b(t)}{a^2}\Big(\theta(t) P(t) - 2h^2 L_1(t)\Big), \tag{56}$$

и (53):

$$\ddot{\theta} = \Gamma_0 L_2(t), \quad \ddot{b} = \Gamma_0 \frac{b(t)}{a^2}\theta(t) P(t). \tag{57}$$

Как было показано в [1], функции $L_1(t)$ (или $L_2(t)$) и $P(t)$ должны определяться граничными условиями для напряженности поля тяготения и плотности среды.

7. Классическое поле тяготения

Рассмотрим отдельно случай, когда эффект скрытой массы отсутствует. Отсутствие эффекта скрытой массы соответствует, как уже обсуждалось, условию $\mathcal{D} = 1$. Из (24) и (47) сразу находим:

$$\mathcal{R} = \overset{\circ}{R}_0 = -L_0/3, \quad A(t)(L_1(t) + L_2(t)) = L_0 = \mathrm{const}.$$

Эти условия эквивалентны тому, что плотность среды в пространстве постоянна и меняется со временем по закону:

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^2(t)b(t)}, \tag{58}$$

где

$$\rho_0 = -M_0 L_0/3 > 0. \tag{59}$$

Уравнение (48) приобретает классический вид:

$$\mathrm{div}\mathbf{g} = \frac{4\pi G M_0 L_0}{3A(t)} = -4\pi G\rho. \tag{60}$$

Эти выводы согласуются с космологическими решениями в классической физике [1, 3], но без вращения среды.

Уравнения эволюции масштабных факторов в случае классического поля тяготения имеют такой вид для (52):

$$\ddot{b} = \Gamma_0 \frac{b(t)}{a^2}\left(\theta(t)P(t) - 2h^2\frac{L_0}{a^2 b}\right), \quad \ddot{\theta} = \Gamma_0 \frac{L_0}{a^2 b}\theta(t). \tag{61}$$

Для (53):

$$\ddot{b} = \Gamma_0 \frac{b(t)}{a^2}\theta(t)P(t), \quad \ddot{\theta} = \Gamma_0 \frac{L_0}{a^2 b}\theta(t). \tag{62}$$

В отличие от классической космологической модели без вращения [1] уравнение Фридмана теперь разделяется на два уравнения относительно двух масштабных факторов $\theta(t)$ и $b(t)$. Это означает, что эволюция при наличии глобального вращения будет более сложной. Поведение решений этих уравнений требует дополнительно анализа, что выходит за рамки данной работы.

8. Заключение

В работе построена модель квазиклассической космологической эволюции Вселенной, заполненной самогравитирующей пылевидной средой, в квазиклассическом поле тяготения с глобальным вращением среды. Получены уравнения динамики масштабных факторов, являющиеся аналогом уравнений Фридмана. Показано, что в предельном переходе к классическому полю тяготения плотность вещества описывается стандартными для классической космологии соотношениями. При этом уравнения для масштабных факторов в случае наличия вращения отличаются от уравнений Фридмана классической теории. Общий анализ эволюции масштабных факторов требует нового подхода к вычислению функций, определяющих эволюцию, исходя из граничных условий для напряженности поля тяготения.

Список литературы

1. Zhuravlev V.M. The fundamental role of the hidden mass effect in quasi-classical cosmology. *Gravitation and Cosmology*, 2025, vol.31, no.4, pp.454–465.

2. McCrea W. Milne E. *Quart. J. Math.*, 1934, vol.5, pp.73–83.

3. Озерной Л.М. Прилуцкий О.Ф. Розенталь И.Л. *Астрофизика высоких энергий.* М.: Атомиздат, 1973.

4. Зельдович Я.Б. Новиков И.Д. *Строение и эволюция Вселенной.* М.: Наука, 1975.

5. Журавлев В.М. Поле тяготения сплошной самогравитирующей среды и «темная материя». *Письма в ЖЭТФ*, 2024, т.120, №6, с.400–408.

6. Журавлев В.М. Геометрия, топология и физические поля. Часть I. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*, 2014, №4, с.6–24.

7. Журавлев В.М. Геометрия, топология и физические поля. Часть II. Масса и гравитация. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*, 2014, №4, с.25–39.

8. Журавлев В.М. Геометрия, топология и физические поля. Часть III. Уравнение индукции фундаментальных полей. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*, 2015, №3, с.44–60.

9. Журавлев В.М. Геометрия, топология и физические поля. Часть IV. Топологическая структура элементарных частиц. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*, 2015, №4, с.104–118.

10. Zhuravlev V.M. Induction equations for fundamental fields and dark matter. *Gravitation and Cosmology*, 2017, vol.23, no.2, pp.95–104.

11. Zhuravlev V.M. Matter and space. New theory of fields and particles. *Gravitation and Cosmology*, 2022, vol.28, no.4, pp.319–341.

12. Вайнберг С. Проблема космологической постоянной (Лекции имени Мориса Леба по физике в Гарвардском университете). *УФН*, 1989, т.158, №8, с.639–678.

13. Вайнберг С. *Космология*. М.: УРСС, 2013.

14. Журавлев В.М. Модели динамического равновесия астрофизических объектов. *ЖЭТФ*, 2022, т.162, №6, с.850–877.

References

1. Zhuravlev V.M. The fundamental role of the hidden mass effect in quasi-classical cosmology. *Gravitation and Cosmology*, 2025, vol.31, no.4, pp.454–465.

2. McCrea W. Milne E. [Title missing]. *Quart. J. Math.*, 1934, vol.5, pp.73.

3. Ozernoy L.M. Prilutckiy O.F. Rozental I.L. *Astrofizika vysokikh energiy*. Moscow: Atomizdat, 1973.

4. Zeldovich Ya.B. Novikov I.D. *Stroenie i evolutciya Vselennoy*. Moscow: Nauka, 1975.

5. Zhuravlev V.M. The gravitational field of a continuous self-gravitating medium and "dark matter". *Letters to the JETF*, 2024, vol.120, no.6, pp.400–408.

6. Zhuravlev V.M. Geometry, topology, and physical fields. Part I. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2014, no.4, pp.6–24.

7. Zhuravlev V.M. Geometry, topology, and physical fields. Part II. Mass and gravity. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2014, no.4, pp.25–39.

8. Zhuravlev V.M. Geometry, topology, and physical fields. Part III. The equation of induction of fundamental fields. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2015, no.3, pp.44–60.

9. Zhuravlev V.M. Geometry, topology, and physical fields. Part IV. The topological structure of elementary particles. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2015, no.4, pp.104–118.

10. Zhuravlev V.M. Induction equations for fundamental fields and dark matter. *Gravitation and Cosmology*, 2017, vol.23, no.2, pp.95–104.

11. Zhuravlev V.M. Matter and space. New theory of fields and particles. *Gravitation and Cosmology*, 2022, vol.28, no.4, pp.319–341.

12. Weinberg S. The problem of the cosmological constant (Maurice Loeb Lectures on Physics at Harvard University). *UFN*, 1989, vol.158, no.8, pp.639–678.

13. Weinberg S. *Cosmology*. Moscow: URSS, 2013.

14. Zhuravlev V.M. Models of dynamic equilibrium of astrophysical objects. *JETF*, 2022, vol.162, no.6, pp.850–877.

Авторы

Журавлев Виктор Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник Лаборатории гравитации, космологии и астрофизики Ульяновского государственного педагогического университета, г. Ульяновск, 432071, пл. Ленина, д. 4/5, Россия.

E-mail: zhvictorm@gmail.com

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Журавлев В. М. Глобальное вращение среды в квазиклассической космологии. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2025. № 3. С. 44—55.

Authors

Zhuravlev Victor Mickhailovich, Dr., Professor, Leading Researcher, Laboratory of Gravity, Cosmology and Astrophysics, Uliyanovsk Pedagogic State University, Uliyanovsk, 432071, Lenin Square, 4/5, Russia
E-mail: zhvictorm@gmail.com

Please cite this article in English as:
Zhuravlev V. M. Global rotation of the medium in quasi-classical cosmology. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2025, no. 3, pp. 44–55.