

УДК 530.1

© Жилкин А. Г., 2024

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД К УРАВНЕНИЮ ДИРАКА ИЗ БИНАРНОЙ ГЕОМЕТРОФИЗИКИ

Жилкин А. Г.^{a,1}^a Институт астрономии РАН, ул. Пятницкая, д. 48, г. Москва, 119017, Россия.

Рассмотрена проблема вывода квантового уравнения Дирака из теории свободных (невзаимодействующих) элементарных частиц в бинарной геометрофизике. Представлено описание процедуры усреднения по элементарным базисам, составляющим макроприбор. Получено уравнение, соответствующее усредненному прообразу уравнения Дирака в рамках данной бинарной системы комплексных отношений. Показано, что в случае непрерывного множества элементарных процессов можно осуществить предельный переход к квантовому уравнению Дирака.

Ключевые слова: бинарная геометрофизика, конформные преобразования, макроприбор, квантовая редукция, уравнение Дирака.

LIMITING TRANSITION TO THE DIRAC EQUATION FROM BINARY GEOMETROPHYSICS

Zhilkin A. G.^{a,1}^a Institute of Astronomy RAS, 48 Pyatnitskaya Str., 119017, Moscow, Russia.

The problem of deriving the quantum Dirac equation from the theory of free (non-interacting) elementary particles in binary geometrophysics is considered. The description of the averaging procedure over elementary bases constituting a classical measurement apparatus is presented. An equation corresponding to the averaged prototype of the Dirac equation within the framework of a given binary system of complex relations is obtained. It is shown that in the case of a continuous set of elementary processes, it is possible to carry out the limiting transition to the quantum Dirac equation.

Keywords: binary geometrophysics, conformal transformations, classical measurement apparatus, quantum reduction, Dirac equation.

PACS: 03.65.Pm, 03.65.Ta

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2024.3-4.67-79

Введение

1. Усреднение по ансамблю элементарных базисов

В бинарной геометрофизике теория свободных (невзаимодействующих) частиц строится на основе БСКО ранга (3, 3). Формализм, использованный в работе [11], в существенной степени опирается на понятие *корты*, являющееся аналогом вектора состояния в квантовой механике. Напомним, что *бинарная предгеометрия* [6] описывается с помощью двух множеств \mathcal{M} и \mathcal{N} , состоящих из некоторых нечисловых элементов (i, j, \dots) и (α, β, \dots) соответственно. Для элементов множества \mathcal{M} определяются *прямые корты* $|i\rangle, |j\rangle, \dots$, а для элементов множества \mathcal{N} определяются *дуальные корты* $\langle\alpha|, \langle\beta|, \dots$. Парное отношение любых двух элементов i и α по определению равно

¹E-mail: zhilkin@inasan.ru

скалярному произведению соответствующих кортов, $u_{i\alpha} = \langle \alpha | i \rangle$. Помимо таких одновалентных кортов можно также формировать и многовалентные корты, как полностью антисимметричные комбинации прямых произведений одновалентных кортов.

Закон фундаментальной симметрии БСКО позволяет ввести *базисные* корты $|n^1\rangle, |n^2\rangle$ в множестве \mathcal{M} и $\langle \nu^1|, \langle \nu^2|$ в множестве \mathcal{N} . С их помощью определяются атрибуты небазисных кортов

$$i^\sigma = \langle \nu^\sigma | i \rangle, \quad \alpha^s = \langle \alpha | n^s \rangle, \quad (1)$$

где индексы s и σ пробегают значения 1 и 2. Это, в частности, позволяет выражать скалярные произведения кортов через их атрибуты. Переход от одних базисных кортов к другим приводит к закону преобразования атрибутов небазисных кортов. Сами небазисные корты при этом не изменяются.

Однако это не единственная возможность. Рассмотрим *конформные* преобразования

$$|\tilde{i}\rangle = C_i |i\rangle, \quad \langle \tilde{\alpha}| = \langle \alpha | C_\alpha, \quad (2)$$

где C_i и C_α — комплексные числа. При таких преобразованиях парное отношение изменяется по закону

$$\tilde{u}_{i\alpha} = \langle \tilde{\alpha} | \tilde{i} \rangle = C_i C_\alpha \langle \alpha | i \rangle = C_i C_\alpha u_{i\alpha}. \quad (3)$$

Нетрудно проверить, что для новых элементов закон БСКО ранга (3, 3) будет выполняться, если он выполняется для исходных элементов. В самом деле,

$$\begin{vmatrix} \tilde{u}_{i\alpha} & \tilde{u}_{i\beta} & \tilde{u}_{i\gamma} \\ \tilde{u}_{j\alpha} & \tilde{u}_{j\beta} & \tilde{u}_{j\gamma} \\ \tilde{u}_{k\alpha} & \tilde{u}_{k\beta} & \tilde{u}_{k\gamma} \end{vmatrix} = C_i C_j C_k C_\alpha C_\beta C_\gamma \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Отсюда можно прийти к заключению, что корты в БСКО ранга (3, 3) определены с точностью до конформного преобразования.

Каждому элементу i из множества \mathcal{M} соответствует комплексный параметр C_i , а каждому элементу α множества \mathcal{N} соответствует параметр C_α . Поэтому речь идет о БСКО ранга (2, 2), которая является подсистемой исходной БСКО ранга (3, 3). Но эта подсистема возникает иначе. БСКО ранга (3, 3) мы получили, задав на множествах \mathcal{M} и \mathcal{N} парные отношения $u_{i\alpha}$ и постулировав затем закон фундаментальной симметрии. Далее, выбирая эталонные элементы, мы получали атрибуты любых других кортов. В данном случае у нас с самого начала заданы параметры элементов нижнего C_i и верхнего C_α множеств, приводящие к закону БСКО ранга (2, 2). Поэтому нет смысла выбирать эталонные элементы и строить базис. Это означает, что физический смысл БСКО ранга (2, 2) должен быть принципиально иным.

В общем случае конформные параметры C_i, C_α никак между собой не связаны и могут задаваться произвольно и независимо. Однако для данной частицы атрибуты кортов удовлетворяют определенным условиям. Это накладывает ограничения на значения соответствующих конформных параметров. Конформные параметры для различных частиц по-прежнему остаются независимыми. Следовательно, конформные преобразования кортов, относящихся к разным частицам, можно рассматривать отдельно друг от друга.

Конформные преобразования базисных кортов БСКО ранга (3, 3) описываются выражениями:

$$|\tilde{n}^s\rangle = A_s |n^s\rangle, \quad \langle \tilde{\nu}^\sigma| = \langle \nu^\sigma | B_\sigma. \quad (5)$$

Здесь по индексам s и σ суммирование не производится. Как видно, эти преобразования можно описать с помощью диагональных матриц

$$C = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

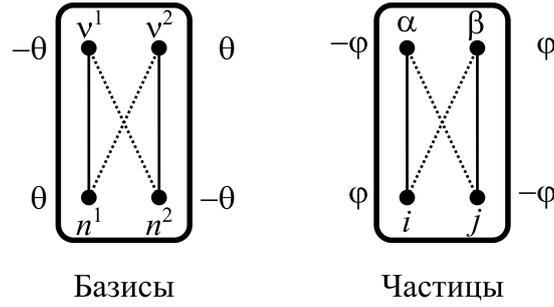


Рис. 1. Структура конформных факторов (фазовых углов) для базисов (слева) и частиц (справа).

Для физически допустимых базисов матрица парных отношений $Q^{s\sigma} = \langle \nu^\sigma | n^s \rangle$ является эрмитовой и, следовательно, должно быть $\tilde{C} = C^+$. Кроме того, будем рассматривать только такие конформные преобразования, для которых матрица Q имеет один и тот же набор собственных значений (собственные базисы). Это означает, что $C^{-1} = C^+$. Наконец, третьим условием для конформных преобразований положим равенство $\det C = 1$, необходимое для введения спинорных пространств. Собирая все эти свойства вместе, приходим к следующим значениям конформных параметров:

$$A_1 = e^{i\theta}, \quad A_2 = e^{-i\theta}, \quad B_1 = e^{-i\theta}, \quad B_2 = e^{i\theta}. \quad (7)$$

Таким образом, конформные преобразования базиса сводятся к фазовым преобразованиям (см. левую панель на рис. 1), которые описываются углом θ .

Аналогичным образом можно проанализировать конформные преобразования для двух пар сопряженных элементов (i, α) , (j, β) , из которых составлена частица. Здесь также можно сформулировать три условия, накладываемые на значения конформных параметров. Во-первых, в силу сопряженности элементов, матрица парных отношений

$$U = \begin{pmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} \end{pmatrix} \quad (8)$$

для частицы должна быть эрмитовой. Это, в частности, означает, что любую частицу также можно использовать в качестве физически допустимого элементарного базиса. Во-вторых, рассматриваем только такие преобразования, при которых собственные значения матрицы U не изменяются. Это приводит к тому, что состояние поляризации частицы будет сохраняться. В-третьих, учитываем такие конформные преобразования, при которых скалярные произведения $\langle \nu^2 \nu^1 | ij \rangle$ и $\langle \beta \alpha | n^1 n^2 \rangle$ остаются постоянными. Это условие обусловлено необходимостью фиксировать нормировку спинорных инвариантов частицы, $i^1 j^2 - i^2 j^1 = \pm 1$, где верхний знак соответствует частице, а нижний — античастице. Совокупность этих трех условий позволяет получить следующий набор конформных параметров

$$C_i = e^{i\varphi}, \quad C_j = e^{-i\varphi}, \quad C_\alpha = e^{-i\varphi}, \quad C_\beta = e^{i\varphi}, \quad (9)$$

где φ — фаза. Следовательно, конформные преобразования частицы также сводятся к фазовым преобразованиям (см. правую панель на рис. 1), которые описываются углом φ .

Атрибуты элементов при конформных преобразованиях с учетом выражений (1) и (5) изменяются по закону

$$\tilde{i}^\sigma = B_\sigma C_i i^\sigma, \quad \tilde{\alpha}^s = A_s C_\alpha \alpha^s. \quad (10)$$

Здесь, как и ранее в формулах (5), по индексам s и σ суммирование не производится. Применяя эти выражения к элементам, составляющим частицу, и учитывая значения конформных факторов (7) и (9), получаем

$$\tilde{i}^1 = e^{i(\varphi-\theta)} i^1, \quad \tilde{i}^2 = e^{i(\varphi+\theta)} i^2, \quad \tilde{j}^1 = e^{-i(\varphi+\theta)} j^1, \quad \tilde{j}^2 = e^{-i(\varphi-\theta)} j^2, \quad (11)$$

$$\tilde{\alpha}^1 = e^{-i(\varphi-\theta)}\alpha^1, \quad \tilde{\alpha}^2 = e^{-i(\varphi+\theta)}\alpha^2, \quad \tilde{\beta}^1 = e^{i(\varphi+\theta)}\beta^1, \quad \tilde{\beta}^2 = e^{i(\varphi-\theta)}\beta^2. \quad (12)$$

Эти соотношения позволяют найти законы конформного преобразования элементарных биспиноров

$$\psi = \begin{pmatrix} i^a \\ \beta_{\dot{a}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = -(j_a, \alpha^{\dot{a}}). \quad (13)$$

В самом деле, легко проверить, что эти конформные преобразования сводятся к следующим выражениям:

$$\tilde{\psi} = T(\theta)\psi e^{i\varphi}, \quad \tilde{\bar{\psi}} = e^{-i\varphi}\bar{\psi}T^+(\theta), \quad (14)$$

где матрица

$$T(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \quad (15)$$

зависит от фазы θ , определяющей конформные факторы для базиса (7). Эта диагональная матрица обладает следующими свойствами: $\det T = 1$, $T^{-1} = T^+$, $T^+(\theta) = T(-\theta)$.

Следует подчеркнуть, что в этих выражениях вполне определенные значения имеют сами конформные факторы. Следовательно, все фазы определены с точностью до периода. Например, фаза частицы может быть представлена в виде $\varphi = \varphi_0 + 2\pi n$, где φ_0 — главная фаза ($0 \leq \varphi_0 < 2\pi$), а n — произвольное целое число.

В квантовой теории динамика элементарной частицы описывается не по отношению к какой-либо другой элементарной частице, а по отношению к макроскопическому объекту, который называется *макроприбором*. Для того чтобы описать свойства частицы по отношению к макроприбору, необходимо выделить все элементарные базисы, из которых он состоит, и провести некоторую процедуру усреднения по этим элементарным базисам. Заметим, что в общем случае макроприбор состоит не из всех возможных элементарных базисов мира, а только из какого-то их подмножества. Поскольку элементарные базисы, используемые в развиваемой теории, удовлетворяют тем же свойствам, что и элементарные частицы, их также следует ассоциировать с элементарными частицами.

Покажем на примере отдельного биспинора, как производится усреднение по макроприбору. В процедуре усреднения по элементарным базисам, составляющим макроприбор, необходимо учесть, что параметры частицы и базиса определены с точностью до фазовых множителей. Элементарный биспинор можно представить в виде

$$\tilde{\psi} = T(\theta) \cdot S \psi_0 e^{i\varphi}, \quad (16)$$

где ψ_0 — биспинор, описывающий чистое (без учета конформных факторов) состояние в собственной системе отношений частицы, S — матрица, определяющая преобразование от чистого состояния в собственной системе отношений частицы к чистому состоянию в каком-либо другом базисе БСКО ранга (3, 3).

Обозначим элементарный базис через b . В выражении (16) от выбора элементарного базиса b зависят элементы матрицы $S = S_b$ и фазовые углы $\theta = \theta_b$. Биспинор ψ_0 и фаза φ частицы не зависят от элементарного базиса. В результате процедура усреднения по макроприбору B сводится к следующему:

$$\tilde{\psi} \rightarrow \langle \tilde{\psi} \rangle = \frac{1}{N_b} \sum_{b \in B} \tilde{\psi}_b = \left[\frac{1}{N_b} \sum_{b \in B} T(\theta_b) \cdot S_b \right] \psi_0 e^{i\varphi}, \quad (17)$$

где N_b — число элементарных базисов b в макроприборе B .

Поскольку в сумме каждый базис необходимо учесть всего один раз, то достаточно ограничиться только главными значениями фаз θ_b , лежащими в интервале $0 \leq \theta_b < 2\pi$. Поэтому

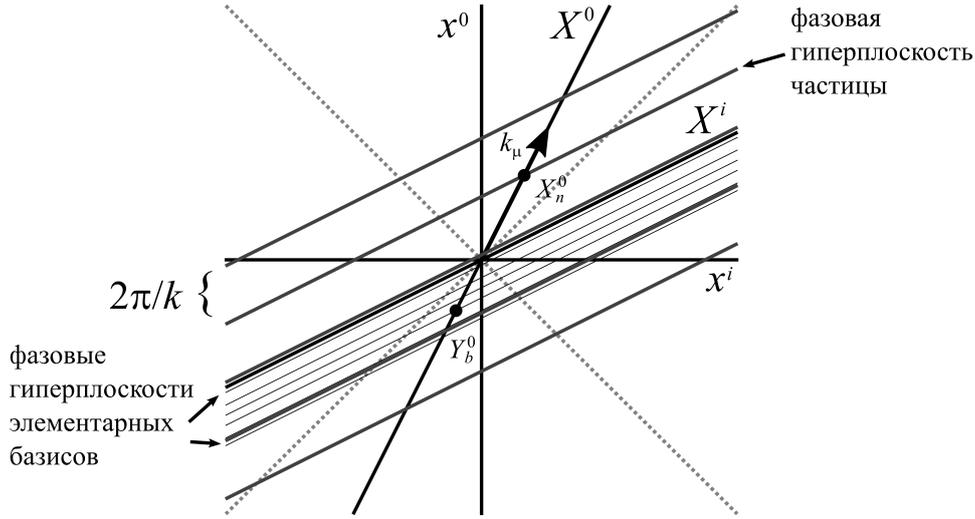


Рис. 2. Фазовые гиперплоскости выделенной частицы и элементарных базисов, составляющих макроприбор.

выберем произвольный времени-подобный вектор k_μ и найдем такие параметры y_b^μ , чтобы выполнялись соотношения $\theta_b = -k_\mu y_b^\mu$, где знак «минус» введен для согласования с квантовой механикой. Введенный вектор k_μ относится к частице и к макроприбору в целом. Заметим, что при этом параметры y_b^μ являются компактифицированными и их нельзя интерпретировать как координаты пространства-времени.

Можно формально от параметров y_b^μ перейти к новым параметрам Y_b^μ , по отношению к которым вектор k_μ будет иметь только временную компоненту k'_0 . Выражение для фазы элементарного базиса примет вид: $\theta_b = -k'_0 Y_b^0$. При таком преобразовании длина вектора k_μ не изменяется. Поэтому $(k'_0)^2 = k^2$ или $k'_0 = \pm k$, где знаки определяются направлением вектора k_μ в будущее или прошлое. В дальнейшем будем считать, что вектор k_μ направлен в будущее. Это позволяет окончательно написать: $\theta_b = -k Y_b^0$. Из этого соотношения однозначным образом определяется параметр Y_b^0 , а остальные параметры Y_b^i остаются произвольными. Полученное соотношение показывает, что каждому элементарному базису соответствует гиперплоскость постоянной фазы или *фазовая гиперплоскость* (см. рис. 2). Поскольку все фазы элементарных базисов лежат в интервале $0 \leq \theta_b < 2\pi$, то параметры Y_b^0 попадают в узкий диапазон значений $-2\pi/k < Y_b^0 \leq 0$. Ширина этого диапазона равна $2\pi/k$.

Отдельные компоненты в сумме (17) приводятся к выражениям вида

$$\frac{1}{N_b} \sum_{b \in B} e^{\pm i k Y_b^0} A_b = A(\pm k), \quad (18)$$

где коэффициенты обладают свойством $A(-k) = A^*(k)$. Эту формулу можно трактовать как аналог обратного преобразования Фурье, поскольку каждому b теперь соответствует вполне однозначное значение Y_b^0 . В результате находим

$$\langle \tilde{\psi} \rangle = S(k) \psi_0 e^{i\varphi} = \Psi(k) e^{i\varphi}, \quad (19)$$

где амплитуда $\Psi(k) = S(k) \psi_0$, а матрица

$$S(k) = \frac{1}{N_b} \sum_{b \in B} T(\theta_b) \cdot S_b. \quad (20)$$

Фазу частицы можно представить аналогичным образом, $\varphi = -k X^0 = -k \tilde{X}^0 + 2\pi n$, где \tilde{X}^0 — компактифицированная временная координата, n — целое число, а координаты X^i остаются произвольными. Поскольку сама фаза φ является фиксированной, то получаем бесконечный набор

фазовых гиперплоскостей, которые определяются уравнением $\varphi = -k_\mu x_n^\mu$ (см. рис. 2). Расстояние между соседними фазовыми гиперплоскостями $\Delta X^0 = 2\pi/k$. Частица может располагаться в любой точке одной из этих фазовых гиперплоскостей.

В результате можно написать

$$\langle \tilde{\psi} \rangle = \Psi = \Psi(k) e^{-ikx_n}. \quad (21)$$

Полученную функцию следует трактовать, как биспинор элементарной частицы по отношению к макроприбору в целом. Из сравнения с квантовой теорией можно заключить, что вектор k_μ представляет собой не что иное, как волновой вектор частицы. Из формулы де Бройля следует, что волновой вектор частицы связан с ее импульсом p_μ , $k_\mu = p_\mu/\hbar$. Компонента k_0 при этом связана с энергией частицы, $E = \hbar c k_0 \geq mc^2$, где m — масса частицы. Поскольку волновое число $k = mc/\hbar$, то временной зазор между соседними фазовыми гиперплоскостями оказывается равным $\Delta X^0 = c\Delta t = 2\pi/k = 2\pi\hbar/mc = \lambda_0$. Величина λ_0 определяет комптоновскую длину волны частицы. Для электрона $\lambda_0 \approx 10^{-10}$ см. Интересно отметить, что энергия частицы E и временной зазор Δt удовлетворяют неравенству $E\Delta t \geq 2\pi\hbar$, которое по своей форме совпадает с принципом неопределенности Гейзенберга.

Введем формально скорость частицы u_μ , удовлетворяющую выражению $p_\mu = mc u_\mu$. Используя выражения (21) для средних биспиноров Ψ и $\bar{\Psi}$, можно определить среднее значение скорости частицы по отношению к макроприбору:

$$\langle u^\mu \rangle = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N_b} \sum_{b \in B} \tilde{\psi}_b \right) \gamma^\mu \left(\frac{1}{N_b} \sum_{b \in B} \tilde{\psi}_b \right) = \frac{1}{2N_b^2} \sum_{a,b \in B} \tilde{\psi}_a \gamma^\mu \tilde{\psi}_b, \quad (22)$$

где γ^μ — матрицы Дирака. Нужно подчеркнуть, что фаза φ элементарной частицы в правой части этого соотношения сокращается. Следовательно, средняя скорость $\langle u_\mu \rangle$ не будет зависеть от координат x_n^μ . Поскольку эти величины описывают среднюю скорость частицы по отношению к макроприбору, то их следует ассоциировать с введенной выше скоростью u_μ , пропорциональной волновому вектору k_μ . Это означает, что усреднение по элементарным базисам, составляющим макроприбор, соответствует переходу $\tilde{\psi}_a \gamma^\mu \tilde{\psi}_b \rightarrow 2u_\mu$.

У данного макроприбора B вектор k_μ является фиксированным и задается конкретным набором фаз θ_b и параметров y_b^μ . В результате измерения импульса частицы мы получим совершенно однозначное значение $p_\mu = \hbar k_\mu$. Однако, если взять два макроприбора B_1 , B_2 и одновременно измерить с помощью них волновой вектор частицы, то мы получим два разных значения $k_\mu(1)$, $k_\mu(2)$, поскольку у этих макроприборов будет разный набор фаз θ_b . Таким образом, одновременные измерения неминуемо приведут к разным результатам.

Если измерять волновой вектор частицы одним и тем же макроприбором, но последовательно в разные моменты времени, то мы снова будем получать различающиеся результаты. Это обусловлено тем, что такие измерения производятся в рамках разных монад, каждая из которых характеризуется своим уникальным набором фаз. Следовательно, фазы макроприбора θ_b также в каждом акте измерения будут различаться, а значит этот макроприбор будет неизменно выдавать разные результаты.

Из этих рассуждений следует, что при любом способе измерения получаются некоторые случайные значения измеряемой величины. Это свойство вполне соответствует явлению *квантовой редукции* в квантовой механике.

В результате процедуры усреднения по ансамблю элементарных базисов внутри данной монады мы пришли к набору средних биспиноров вида (21). На конкретной фазовой гиперплоскости фаза φ остается фиксированной. Поэтому любая производная по координате равна нулю. В частности, действие оператора импульса

$$\hat{p}_\mu \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} = 0. \quad (23)$$

Если рассмотреть две какие-либо фазовые гиперплоскости, соответствующие индексам n_1 и n_2 , то для них разность биспоров, взятых в произвольных точках также будет равна нулю в силу периодичности экспоненты,

$$\Psi_{n_2} - \Psi_{n_1} = \Psi(k)e^{i\varphi_0} (e^{2i\pi n_2} - e^{2i\pi n_1}) = 0. \quad (24)$$

Отсюда следует, что в рамках данной монады явление квантовой редукции можно описать лишь частично. Можно объяснить особенности процедуры измерения, но нет возможности ввести квантовые операторы измеряемых величин. Для этого, очевидно, необходимо рассматривать, как минимум, две монады, поскольку оператор импульса является двухточечным.

2. Предельный переход к уравнению Дирака

В теории свободных элементарных частиц на базе БСКО ранга (3, 3) показывается, что по отношению к некоторому элементарному базису b выполняются алгебраические соотношения, играющие роль прообразов прямого и сопряженного уравнений Дирака [6, 11],

$$\tilde{u}_\mu(b)\gamma^\mu\tilde{\psi}_b + \tilde{\psi}_b = 0, \quad \tilde{u}_\mu(b)\tilde{\bar{\psi}}_b\gamma^\mu + \tilde{\bar{\psi}}_b = 0. \quad (25)$$

Эти уравнения записаны для частиц, когда спинорные инварианты $i^1j^2 - i^2j^1 = 1$. Для античастиц необходимо использовать операцию зарядовой инверсии C .

Непосредственное усреднение этих уравнений по ансамблю элементарных базисов, составляющих макроприбор B , дает

$$u_\mu\gamma^\mu\Psi + \Psi + \gamma^\mu r_\mu = 0, \quad u_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu + \bar{\Psi} + \bar{r}_\mu\gamma^\mu = 0. \quad (26)$$

В развернутом виде введенные невязки r_μ и \bar{r}_μ можно представить следующим образом

$$r_\mu = \frac{1}{N_b} \sum_{b \in B} [\tilde{u}_\mu(b) - u_\mu] \tilde{\psi}_b, \quad \bar{r}_\mu = \frac{1}{N_b} \sum_{b \in B} [\tilde{u}_\mu(b) - u_\mu] \tilde{\bar{\psi}}_b, \quad (27)$$

а их скалярное произведение

$$\bar{r}_\mu r^\mu = \frac{1}{N_b^2} \sum_{a, b \in B} [\tilde{u}_\mu(a) - u_\mu] [\tilde{u}^\mu(b) - u^\mu] \tilde{\bar{\psi}}_a \tilde{\psi}_b. \quad (28)$$

Отсюда видно, что эти невязки описывают эффекты, обусловленные дисперсией скорости частицы относительно элементарных базисов $u_\mu(b)$ при их усреднении по макроприбору B .

Заметим, что каждая невязка пропорциональна фазовому множителю $e^{i\varphi}$ или $e^{-i\varphi}$. Это означает, что их можно представить в виде

$$mcr^\mu = \pi_\mu\Psi, \quad mc\bar{r}^\mu = \pi_\mu\bar{\Psi}, \quad (29)$$

где π_μ — некоторые множители. В результате приходим к следующим уравнениям

$$(p_\mu + \pi_\mu)\gamma^\mu\Psi + mc\Psi = 0, \quad (p_\mu + \pi_\mu)\bar{\Psi}\gamma^\mu + mc\bar{\Psi} = 0. \quad (30)$$

Эти уравнения совпадают с квантовыми уравнениями Дирака для частного решения в виде плоской монохроматической волны, описывающей свободную частицу с определенным значением импульса. Отличия заключаются в том, что 1) эти уравнения относятся только к данной фазовой гиперплоскости (фаза является фиксированной), 2) возникает невязка π_μ , описывающая дисперсию скорости частицы. Эта невязка описывает внутренние свойства макроприбора. В квантовой теории рассматривается идеальный макроприбор, лишенный внутренних свойств. Поэтому в квантовом уравнении Дирака величина $\pi_\mu = 0$. Однако, например, при вычислении пропагаторов квантового поля Дирака такая невязка вводится искусственно для обхода особых точек в комплексной плоскости (см., например, [3]).

Для перехода к квантовой теории остается осуществить последний этап, учитывающий наличие других монад. Для этого необходимо выяснить, что же из себя представляет множество монад. Будем считать, что оно состоит из бесконечного числа элементов. Тогда можно рассмотреть два предельных варианта. 1) Множество монад является счетным. 2) Множество монад составляет континуум. Ряд соображений указывает на то, что в случае свободных частиц следует выбрать второй вариант.

У свободных частиц внутренние параметры, описывающие состояние поляризации, должны оставаться постоянными. Поэтому изменяться могут только внешние параметры (фазы), связанные с конформными преобразованиями. В теории БСКО ранга (3, 3) конформные параметры являются внешними и обусловлены БСКО ранга (2, 2), которая является подсистемой исходной БСКО ранга (3, 3). Поэтому конформные факторы могут быть какими угодно. Отсюда следует, что фазы частиц могут изменяться непрерывно. Если считать, что общее число частиц во Вселенной конечно, то совокупность конечного числа непрерывных параметров (фаз частиц) дает нам множество, имеющее мощность континуума.

На это можно посмотреть и с другой стороны. Монады соответствуют элементарному процессу, в результате которого мир переходит из одного состояния в другое. В случае свободных частиц элементарный процесс, очевидно, представляет собой состояние покоя. Это состояние должно воспроизводиться от монады к монаде. Поскольку с частицей при этом больше ничего не происходит, то такое состояние покоя должно воспроизводиться непрерывно.

Для того чтобы такая непрерывность нарушалась, необходимо, чтобы частица изменяла свое состояние. А это уже означает, что она взаимодействует с другой частицей. Здесь уместно напомнить, что в квантовой механике спектр атома водорода состоит как из дискретных, так и непрерывных уровней энергии. Дискретные уровни энергии связаны с процессами взаимодействия атома с какими-то другими частицами, когда происходит испускание или поглощение фотонов. Этим процессам, по-видимому, соответствуют дискретные элементы множества монад. В непрерывной части спектра взаимодействие осуществляется не отдельными актами, а непрерывным образом. Поэтому здесь, по-видимому, мы сталкиваемся с непрерывным распределением элементов множества монад. Поскольку свободные электроны возникают в пределе больших положительных энергий атомов, значит они тоже примыкают к непрерывному спектру. Этот факт является еще одним подтверждением того, что для свободных частиц следует рассматривать непрерывное множество монад.

Представим себе, что в рамках некоторой монады (назовем ее для определенности монадой A) было произведено измерение импульса (или волнового вектора) выделенной частицы. Можно считать, что эта монада соответствует начальному состоянию частицы, в котором она имеет вполне определенный волновой вектор k_μ . Рассмотрим некоторую другую монаду B , которую будем ассоциировать с конечным состоянием частицы. Если множество монад дискретное, то между монадами A и B нет никакого непрерывного перехода. Все электроны в монаде являются тождественными и, следовательно, они неотличимы друг от друга. Это означает, что указать, на каких именно элементах в монаде B строится частица, выделенная нами в монаде A , невозможно. В случае непрерывного множества имеется возможность проследить частицу от одной монады к другой и в каждой монаде указать элементы, из которых она формируется. Данное обстоятельство значительно упрощает рассматриваемую задачу.

Выберем такую монаду B , чтобы главная фаза выделенной частицы оказалась достаточно близкой к ее главной фазе в монаде A . Фазы частицы в монадах A и B можно представить как $\varphi_A = \varphi_A^0 + 2\pi n_A$, $\varphi_B = \varphi_B^0 + 2\pi n_B$, где φ_A^0 и φ_B^0 — главные фазы, а n_A и n_B — произвольные целые числа. Разность главных фаз $\Delta\varphi_0 = \varphi_A^0 - \varphi_B^0$ должна быть достаточно мала, $\Delta\varphi_0 \ll 2\pi$. Тогда разность усредненных биспиноров

$$\Psi_B - \Psi_A = \Psi(k) (e^{i\varphi_B} - e^{i\varphi_A}) = -i\Delta\varphi_0 \Psi_A + O(\Delta\varphi_0^2). \quad (31)$$

Положим $\Delta\varphi_0 = k\varepsilon$, где $\varepsilon \ll 2\pi/k = \lambda_0$, а соответствующий интервал времени $\Delta t = \varepsilon/c \ll \lambda_0/c \approx 10^{-20}$ с. Рассмотрим фазы φ_A и φ_B , для которых пространственные координаты X^i выбраны одинаковыми. В этом случае из (31) находим

$$i\hbar \frac{\Psi_B - \Psi_A}{\varepsilon} = mc\Psi_A + O(\varepsilon). \quad (32)$$

Эту конечную разность, вообще говоря, нельзя рассматривать в качестве аппроксимации производной биспинора по временной координате X^0 , поскольку фазы φ_A и φ_B могут относиться к разным периодам. В таком случае разность координат X_A^0 и X_B^0 уже не будет малой. Малая величина ε относится к главному периоду. Другими словами, время в выражении (32) остается компактифицированным. Полученное соотношение оказывается справедливым вследствие свойства периодичности комплексной экспоненциальной функции.

Если ограничиться только главным периодом, то конечная разность в (32) будет определять производную по переменной X^0 , когда остальные координаты X^i зафиксированы. Если рассматривать произвольные направления, то приходим к оператору импульса,

$$\hat{p}_\mu \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} = p_\mu \Psi. \quad (33)$$

Таким образом, рассматривая бесконечно малый непрерывный пучок монад, можно определить полноценный оператор импульса, если считать, что частица во всех монадах этого пучка располагается в одном и том же фазовом периоде. При этом величина импульса p_μ является его собственным значением, а биспинор Ψ представляет собой собственную функцию этого оператора.

Это позволяет прийти к квантовому уравнению Дирака. Используя полученную связь между импульсом и оператором импульса (33), уравнения (30) можно переписать в следующей форме:

$$(\hat{p}_\mu + \hat{\pi}_\mu) \gamma^\mu \Psi + mc\Psi = 0, \quad (\hat{p}_\mu + \hat{\pi}_\mu) \bar{\Psi} \gamma^\mu - mc\bar{\Psi} = 0. \quad (34)$$

По своему виду полученное уравнение напоминает уравнение Фока-Иваненко [12], которое является ковариантным обобщением уравнения Дирака. Такое уравнение используется для описания движения электрона (или позитрона) в неинерциальной системе отсчета или в случае искривленного пространства-времени. В уравнении Фока-Иваненко соответствующая поправка определяется биспинорной связностью. В уравнении (34) поправка к импульсу, описываемая оператором $\hat{\pi}_\mu$, обусловлена не свойствами пространства-времени, а дисперсией скорости частицы по отношению к ансамблю элементарных базисов. В квантовой теории эта поправка отсутствует. С точки зрения эксперимента оператор $\hat{\pi}_\mu$, по-видимому, связан с квантовыми шумами, которые являются неустранимыми по своей природе. Их объясняют проявлением неопределенности Гейзенберга. Однако эта неопределенность в квантовой механике напрямую связана с процессом измерения и, следовательно, обусловлена свойствами измерительного устройства.

Однако данное уравнение получено для бесконечно малого интервала в отдельном фазовом периоде. В силу периодичности экспоненциальной функции эта ситуация повторяется бесконечное число раз в каждом фазовом периоде. Все эти отдельные малые интервалы никак между собой не связаны и, следовательно, говорить о непрерывном времени пока еще не имеет смысла. Для этого необходимо провести процедуру *декомпактификации*.

В случае свободных частиц ее можно осуществить следующим способом. Разобьем весь интервал периода на N малых интервалов длиной ε , $\Delta X^0 = 2\pi/k = N\varepsilon$. Первый такой интервал ограничивается главными фазами частицы в монадах A и B , которые рассматривались выше. Выберем следующий пучок монад между монадой B и некоторой монадой C , ограниченный главной фазой $\varphi_C^0 = \varphi_B^0 - k\varepsilon$. В этом пучке монад также можно ввести оператор импульса и записать уравнения (34). Продолжая этот процесс дальше, приходим к последнему интервалу. Его заполнить пучком монад мы не можем, поскольку в таком случае достигается граница периода и мы снова возвращаемся к монаде A . Напомним, что главные фазы лежат в полуоткрытом диапазоне

$0 \leq \varphi_0 < 2\pi$. Оставляя этот последний промежуток пустым, перейдем к пределу при $N \rightarrow \infty$. В результате мы получаем заполнение каждого периода непрерывным пучком монад. При этом длина пустого промежутка у правой границы периода стягивается к нулю. Этим достигается сшивка всех отдельных периодов в одну непрерывную ось времени X^0 . Что касается пространственных координат X^i , то они задаются совершенно произвольно и, следовательно, не являются компактифицированными. Таким образом, мы приходим к непрерывному пространству-времени X^μ с метрикой Минковского.

В квантовой механике из уравнения Дирака (уравнение первого порядка) получают уравнение Клейна-Фока (уравнение второго порядка). Это легко сделать и в случае уравнения (34). Введем обозначения для операторов $\hat{p} = \gamma^\mu \hat{p}_\mu$, $\hat{\pi} = \gamma^\mu \hat{\pi}_\mu$. С учетом алгебраических свойств матриц Дирака γ^μ нетрудно убедиться, что $\hat{p}^2 = \eta^{\mu\nu} \hat{p}_\mu \hat{p}_\nu$, где $\eta^{\mu\nu}$ — метрический тензор пространства-времени Минковского. Аналогичное равенство будет справедливо и для оператора $\hat{\pi}_\mu$. Действуя слева оператором \hat{p} на прямое уравнение (34), находим

$$\hat{p}^2 \Psi - m^2 c^2 \Psi - mc \hat{\pi} \Psi + \hat{p} \hat{\pi} \Psi = 0. \quad (35)$$

Переставляя операторы в последнем слагаемом, приходим к уравнению

$$\hat{p}^2 \Psi - m^2 c^2 \Psi - 2mc \hat{\pi} \Psi - \hat{\pi}^2 \Psi + [\hat{p}, \hat{\pi}] \Psi = 0, \quad (36)$$

где квадратными скобками обозначен коммутатор операторов $[\hat{p}, \hat{\pi}] = \hat{p} \hat{\pi} - \hat{\pi} \hat{p}$. Отсюда видно, что в общем случае импульс частицы не будет удовлетворять условию $p^2 = m^2 c^2$. Интересно отметить, что в случае, когда коммутатор

$$[\hat{p}, \hat{\pi}] = \hat{\pi}(2mc + \hat{\pi}), \quad (37)$$

это условие восстанавливается, а уравнение (36) переходит в квантовое уравнение Клейна-Фока

$$\hat{p}^2 \Psi - m^2 c^2 \Psi = 0. \quad (38)$$

При этом аналоги квантового уравнения Дирака (34) сохраняют свой прежний вид.

Заключение

В квантовой теории фундаментальную роль играет уравнение Дирака [1] (см. также [2]). Оно описывает движение свободной (невзаимодействующей) релятивистской частицы со спином $1/2$. Из уравнения Дирака следует также вывод о существовании античастиц. Например, наряду с электронами должны существовать их античастицы — позитроны. Этот результат был подтвержден экспериментально в 1932 г. В современной физике уравнение Дирака составляет основу квантовой электродинамики [3], а в более общем подходе квантовой теории поля вообще (см., например, [4]). О том, как Дирак пришел к этому уравнению, можно ознакомиться в работе [5].

При стандартном изложении квантовой механики уравнение Дирака не выводится, а, фактически, постулируется. Хотя, конечно, его можно обосновать с различных точек зрения. Для полноценного вывода уравнения Дирака необходимо так или иначе выйти за рамки квантовой теории. Другими словами, для этого необходимо использовать теорию, которая является более общей и фундаментальной, чем квантовая теория. В настоящее время такой общепризнанной теории, по-видимому, не существует.

В качестве возможного кандидата на роль фундаментальной теории может претендовать бинарная геометрофизика [6], в которой используется свой математический аппарат, основанный на теории бинарных систем комплексных отношений (БСКО) [7, 8]. Каждая БСКО соответствует уже начавшемуся, но еще не закончившемуся элементарному процессу. В такой интерпретации БСКО можно рассматривать в качестве материальных проекций монад Лейбница. Каждая такая монада описывает переход мира из одного состояния в другое в результате некоторого элементарного процесса. Полная эволюция мира состоит из бесконечного количества таких элементарных процессов или монад, которые существуют параллельно.

В бинарной геометрофизике для описания свободных элементарных частиц (электронов и позитронов) используется БСКО ранга $(3, 3)$ [6]. В частности, показывается, что в рамках одной БСКО (монады) удается получить алгебраическое соотношение, играющее роль прообраза уравнения Дирака. С учетом некоторых дополнительных допущений его можно интерпретировать как квантовое уравнение Дирака в импульсном представлении [9]. Однако для полноценного вывода этого уравнения необходимо проводить процедуру усреднения по элементарным базисам, составляющим макроприбор [10]. В результате такой процедуры в теории должны возникнуть такие важные понятия, как макроскопическое пространство-время, корпускулярно-волновой характер частицы, явление квантовой редукции.

В данной работе предпринята попытка вывода уравнения Дирака из бинарной геометрофизики на основе формализма, изложенного в предыдущей работе автора [11].

В работе рассмотрен круг вопросов, связанных с выводом квантового уравнения Дирака из бинарной геометрофизики. Теория свободных элементарных частиц строится на основе бинарной системы комплексных отношений (БСКО) ранга $(3, 3)$. При этом важную роль играют конформные преобразования, обусловленные наличием подсистемы в виде БСКО ранга $(2, 2)$.

Для одной монады, соответствующей данной БСКО, удается сделать следующее:

1. Можно ввести понятие макроприбора и с помощью него получить усредненные характеристики частицы (биспинор). Частица при этом имеет компактифицированную фазу и может находиться на одной из фазовых гиперплоскостей $\varphi = \varphi_0 + 2\pi n$, где φ_0 — главная фаза, а n — произвольное целое число.

2. Можно описать некоторые свойства явления квантовой редукции, в результате которого формируется волновой вектор частицы по отношению к макроприбору. Удается понять, почему при измерении каждый раз получаются разные импульсы.

3. Для одной монады невозможно определить оператор импульса. Внутри фазовой гиперплоскости производная биспинора равна нулю, поскольку фаза на ней фиксирована. Разность биспиноров, взятых для двух различных гиперплоскостей, также равна нулю в силу периодичности комплексной экспоненциальной функции.

4. Можно вывести усредненный прообраз уравнения Дирака. При этом получается алгебраическое соотношение (30), соответствующее решению квантового уравнения Дирака для случая плоской монохроматической волны. При этом появляется невязка, описывающая дисперсию скорости частицы по отношению к макроприбору.

Для осуществления предельного перехода к квантовому уравнению Дирака необходимо учесть наличие других элементарных процессов или монад. Анализ показывает, что для свободных (невозмущаемых) частиц следует рассматривать непрерывное множество монад. Это позволяет проследить частицу (т.е. указать, из каких элементов она формируется) при переходе от одной монады к другой. Выбирая бесконечно малый пучок монад, когда главные фазы частицы различаются на величину много меньшую 2π , можно определить оператор импульса. Это позволяет получить квантовое уравнение Дирака, справедливое для данного бесконечно малого пучка монад. Взяв достаточно больше число таких пучков и переходя к соответствующему пределу, можно прийти к уравнению Дирака на конечном интервале времени.

В полученном уравнении (34) по сравнению с оригинальным уравнением Дирака возникает дополнительная поправка, описывающая эффекты, обусловленные дисперсией скорости частицы по отношению к ансамблю элементарных базисов, составляющих макроприбор. Такая поправка в квантовой механике отсутствует, поскольку в ней макроприбор считается идеальным устройством, лишенным каких-либо внутренних свойств. Однако, в экспериментах эти эффекты, по-видимому, проявляются в виде квантовых шумов.

Автор выражает благодарность Ю.С. Владимирову за полезные обсуждения и ценные замечания.

Список литературы

1. Dirac P.A.M. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1928. 117 (778). P. 610–624.
2. Дирак П.А.М. *Принципы квантовой механики*. М.: Наука, 1979. 440 с.
3. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. *Квантовая электродинамика*. М.: Физматлит, 2002. 720 с.
4. Вайнберг С. *Квантовая теория поля (в 2 т.)*. М.: Физматлит, 2003.
5. Дирак П.А.М. Релятивистское волновое уравнение электрона. *УФН*. 1979. Т. 128. С. 681–691.
6. Владимиров Ю.С. *Основания физики*. М.: БИНОМ, 2008. 455 с.
7. Владимиров Ю.С. *Теория физических структур*. Новосибирск: Альфа Виста, 2004. 851 с.
8. Кулаков Ю.И. *Теория физических структур*. М.: Доменико, 2004.
9. Solov'ov A.V. Relational analysis of Dirac equation in momentum representation. *Gravit. Cosmol.* 2022. V. 28. P. 382–389.
10. Владимиров Ю.С. *Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. 2 Теория физических взаимодействий*. М.: Моск гос. ун-т, 1998. 448 с.
11. Жилкин А.Г. Описание свободных элементарных частиц в бинарной геометрофизике. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2024 (в печати).
12. Fock V.A., Ivanenko D.D. On possible geometric interpretation of relativistic quantum theory. *Zeits. für Phys.* 1929. Bd. 54. S. 768.

References

1. Dirac P.A.M. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1928. 117 (778). P. 610–624.
2. Dirac P.A.M. *The Principles of Quantum Mechanics*. New York, Oxford University Press, 1958.
3. Berestetskii V.B., Lifshitz E.M., Pitaevskii L.P. *Quantum electrodynamics*. Butterworth-Heinemann, 1982.
4. Weinberg S. *Quantum theory of fields*. Cambridge, Cambridge University Press, 2000.
5. Dirac P.A.M. The relativistic electron wave equation. *Sov. Phys. Usp.* 1979. 22. P. 648–653.
6. Vladimirov Yu.S. *Physics foundations*. Moscow, Binom Publ., 2008. 455 p.
7. Vladimirov Yu.S. *Relational theory of space-time and interactions. Part 1*. Moscow, MSU Publishing House, 1996. (in Russ.)
8. Kulakov Yu.I. *Physical structures theory*. Moscow, Domenico Publ., 2004. (in Russ.)
9. Solov'ov A.V. Relational analysis of Dirac equation in momentum representation. *Gravit. Cosmol.* 2022. V. 28. P. 382–389.
10. Vladimirov Yu.S. *Relational theory of space-time and interactions. Part 2*. Moscow, MSU Publishing House, 1996. (in Russ.)
11. Zhilkin A.G. Description of free elementary particles in binary geometrophysics. *Space, time and fundamental interactions*. 2024 (in press).
12. Fock V.A., Ivanenko D.D. On possible geometric interpretation of relativistic quantum theory. *Zeits. für Phys.* 1929. Bd. 54. S. 768.

Авторы

Жилкин Андрей Георгиевич, д.ф.-м.н., в.н.с. Институт астрономии РАН, ул. Пятницкая, д. 48, г. Москва, 119017, Россия.

E-mail: zhilkin@inasan.ru

Просьба сослаться на эту статью следующим образом:

Жилкин А. Г. Предельный переход к уравнению Дирака из бинарной геометрофизики. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2024. № 3-4. С. 67–79.

Authors

Zhilkin Andrey Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Institute of Astronomy RAS, 48 Pyatnitskaya Str., 119017, Moscow, Russia.

E-mail: zhilkin@inasan.ru

Please cite this article in English as:

Zhilkin A. G. Limiting transition to the Dirac equation from binary geometrophysics. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2024, no. 3-4, pp. 67–79.