УДК 530.12, 514.822

© Юров А. В., Обноскина А. В., Трунин А. С., 2024

ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ В ДВУМЕРНЫХ МОДЕЛЯХ С МОЙЯЛОВСКИМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ*

Юров А. В.[a,1], Обноскина А. В.[a,2], Трунин А. С.[a,3]

[a] Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Калининград, ул. Невского, 14, 236041, Россия.

Обсуждается ограничение Бекенштейна и поведение энтропии в окрестности сингулярности типа Big Rip (Большой Разрыв). Размер горизонта схлопывается до нуля при приближении к сингулярности и число допустимых состояний стремится к нулю. Ситуация кардинально меняется в случае квантовых флуктуаций в некоммутативном пространстве времени, которое естественно возникает в некоторых моделях бран в рамках единой M-теории. Мы описываем математические свойства умножения Мояла и некоммутативное обобщение оператора Лапласа. Показано, что полевые модели некоммутативной геометрии в двумерном лоренцевом пространстве допускают два типа изоспектральных дискретных симметрий.

Ключевые слова: большой разрыв, ограничение Бекенштейна, энтропия, некоммутативная геометрия, умножение Мояла, преобразование Дарбу.

ISOSPECTRAL SYMMETRIES IN TWO-DIMENSIONAL MODELS WITH MOYAL PRODUCT

Yurov A. V.[a,1], Obnoskina A. V.[a,2], Trunin A. S.[a,3]

[a] Immanuel Kant Baltic Federal University,Kaliningrad, st. Nevsky, 14, 236041, Russia.

We discuss the Bekenstein constraint and the behavior of entropy in the vicinity of a Big Rip singularity. The horizon size collapses to zero as we approach the singularity and the number of admissible states tends to zero. The situation changes dramatically in the case of quantum fluctuations in non-commutative space-time, which naturally arises in some brane models within the unified M-theory. We describe the mathematical properties of the Moyal multiplication and a non-commutative generalization of the Laplace operator. We show that field models of non-commutative geometry in two-dimensional Lorentzian space admit two types of isospectral discrete symmetries.

Keywords: Big rip, Bekenstain bound, entropy, noncommutative geometry, Moyal production, Darboux transformations.

PACS: 04.60.-m, 11.25.-w
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2024.3-4.87-93

Введение

В работе [1], Сасскинд обсудил три космологические модели, динамика в которых приводит к противоречию со вторым началом термодинамики и которые, по логике, должны быть признаны

*Работа поддержана министерством науки и образования РФ (грант №075-02-2024-1430).

[1]E-mail: aiurov@kantiana.ru
[2]E-mail: angelinalina15@mail.ru
[3]E-mail: deletednyas@live.ru

нефизическими. В этом списке теории содержащие фантомные поля [2], приводящие к сингулярности Большого разрыва (BR), а также циклические космологии [3] и FGG механизм генерации инфлюирующих вселенных [4]. В этой статье нас интересуют фантомные модели, поэтому рассмотрим эту аргументацию подробнее.

Одно из важных заключений, которые можно сделать обсуждая физику процессов около сингулярности большого разрыва (имеющую место, скажем при $t = t_f$) является то, что при $t \to t_f$ вселенная начинает делиться на множество не связанных областей, между которыми невозможен обмен энергетический обмен. Происходит это потому, что при приближении к BR-сингулярности горизонт событий $R(t)$ для произвольной точки сжимается до нуля. Действительно, так как

$$R(t) = a(t) \int_t^{t_f} \frac{cdt'}{a(t')},$$

а $(k = 0)$

$$a(t) = \left(\frac{2}{3\epsilon\kappa(t_f - t)} \right)^{2/(3\epsilon)},$$

где κ - постоянная интегрирования, определяемая начальными условиями, а $\epsilon = -1 - w > 0$, то горизонт событий и плотность вычисляются по формулам

$$R(t) = \frac{3\epsilon c}{2 + 3\epsilon} (t_f - t), \qquad \rho(t) = \frac{4}{24\pi G\epsilon^2 (t_f - t)^2}, \tag{1}$$

откуда очевидно следует, что $R(t) \to 0$ при $t \to t_f$.

Обращения в нуль горизонта событий показывает, что физика процессов происходящих окрест BR-сингулярности является очень "бедной", по крайней мере в рамках изотропных и однородных метрик. В самом деле, согласно ограничению Бекенштейна, полное число возможных квантовых состояний N_q в заданном объеме с характерным масштабом R будет ограниченно неравенством:

$$N_q \leq \frac{2\pi ER}{\hbar c \ln 2}, \tag{2}$$

где E полная энергия заключенная в объеме. Поясним происхождение этого соотношения.

Рассмотрим квантовую, одномерную (для простоты) систему. Неразличимые квантовые состояния лежат в ячейках, меньших, чем произведение неопределенности координаты на неопределенность импульса, поэтому общее число различных квантовых состояний получается делением всего фазового объема на размер такой ячейки. Так как, в соответствии с принципом неопределенности Гейзенберга, размер последней не может быть меньше постоянной Планка, размер полного числа квантовых состояний N не может быть больше фазового объема PR (где P - импульс, а R - координата), деленного на постоянную Планка. На следующем шаге надо вспомнить, что в релятивистской теории импульс P всегда меньше (либо равен - для безмассовых полей) энергии E, деленной на скорость света. Отсюда получается неравенство (2). Отметим еще, что энергия пропорциональна массе, а значит, число возможных состояний не больше некоторой константы, умноженной на размер исследуемого объема R и на его массу. Наконец, следует учесть, что масса объема при заданном R не может быть сколь угодно велика, ее максимально допустимое значение пропорционально R, поскольку при больших массах начнется гравитационный коллапс. Окончательно получаем, что число допустимых, физически различимых квантовых состояний в заданном объеме меньше, чем площадь поверхности этого объема умноженная на некоторую универсальную для всех объемом константу. Это так называемое второе ограничение Бекенштейна, которое нам не понадобится.

Подставляя (1) в (2) и считая, что $E = \rho R^3$, получаем

$$N_q \leq \frac{27c^5\epsilon^2(t_f - t)^2}{\hbar \ln 2 G(2 + 3\epsilon)^4}. \tag{3}$$

Таким образом выражение для горизонта событий (1) и ограничение Бекенштейна (3) показывают, что при приближении к BR-сингулярности имеют место два обстоятельства: (i) различные участки вселенной утрачивают причинный контакт друг с другом и (ii) число допустимых квантовых состояний в этих областях стремится к нулю по мере приближения к финальной сингулярности. Вероятно для этой ситуации удобно использовать лейбницевский термин ”монада”, понимая под монадой области пространства времени не имеющие никакой причинной связи друг с другом. Несколько злоупотребляя терминологией, ситуацию вблизи сингулярности большого разрыва можно описать как разделение пространства-времени на все большее число монад, сложность которых быстро уменьшается до нуля. Таким образом, создается впечатление, что физика процессов вблизи сингулярности большого разрыва во фридмановской космологии в определенном смысле тривиальна и более того – энтропия явно уменьшается, что очевидно противоречит второму началу.

В работе [5] исследовалась фантомная космология на бране и был обнаружен весьма богатый репертуар поведения различных решений, в том числе около сингулярности большого разрыва. Отметим, что теория бран привела к еще одной, фундаментальной гипотезе - возможно существующей некоммутативной геометрии. В этом параграфе мы рассмотрим квантовые флуктуации в некоммутативном пространстве времени с размерностью (1+1). Дальнейшие исследования показали, что эффекты пространственно-временной некоммутативности приводят к значительно более богатой физической картине, которая имеет прямое отношение к обсуждаемой теме. Дело в том, что решения полевых уравнений при наличии ”большого разрыва” сами сингулярны. Изучая квантовые флуктуации на фоне классических решений в пространстве-времени с такой особенностью, мы должны использовать классические сингулярные решения. Как было показано в работе [6], пространственно-временная некоммутативность приведет в этом случая к появлению бесконечного числа новых связанных состояний, что указывает на возможность весьма богатой структуры физических процессов (по крайней мере в однопетлевом приближении) окрест BR-сингулярности, в отличие от наивного подхода изложенного выше (и использованного в [1]). Поскольку решение полевых уравнений в сложной метрике представляет собой весьма нетривиальную задачу, в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением простейшего двумерного лоренцевского пространства-времени. Богатство потенциальных физических явлений вблизи BR-сингулярности в моделях с некоммутативной геометрией делает интересной исследование математических свойств таких моделей. В этой работе мы продемонстрируем, что двумерные гамильтонианы с мойяловским произведением обладают набором изоспектральных симметрий, что открывает дорогу исследованиям вопроса об интегрируемости таких моделей.

Работа организована следующим образом: в следующем разделе мы приведем основные определения операций возникающих в моделях некоммутативной геометрии и покажем схему вычисления спектра флуктуаций. Главное свойство наличия изоспектральной симметрии в двумерном пространстве-времени будет доказано в параграфе 2. В заключение, мы подведем итоги.

1. Постановка задачи

Пусть $x^0 = t$ и $x^1 = x$. Мы используем умножение Мояла определенное формулой:

$$f(x) \star g(x) = \left[\exp \left(\frac{i}{2} \theta^{mn} \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial y^n} \right) f(x) g(y) \right]_{x=y}, \tag{4}$$

где $\theta^{mn} = -\theta^{nm}$ постоянная антисимметричная 2×2 матрица для которой мы выберем представление $\theta^{mn} = 2\theta\epsilon^{mn}$, где θ =const, $\epsilon^{mn} = -\epsilon^{nm}$ и $\epsilon^{01} = 1$. Можно убедиться, что (4) определяет некоммутативное, но ассоциативное произведение:

$$(f(x) \star g(x)) \star p(x) = f(x) \star (g(x) \star p(x)).$$

Легко проверить, что

$$x^m \star x^n - x^n \star x^m = i\theta^{mn}, \qquad c \star f(x) = f(x) \star c = cf(x),$$

для произвольной c =const. В случае $D = 2$ выражение (4) можно записать следующим образом:

$$f \star g = fg + i\theta(f_t g_x - f_x g_t) + \frac{(i\theta)^2}{2!}(f_{tt}g_{xx} + f_{xx}g_{tt} - 2f_{xt}g_{xt}) +$$
$$\frac{(i\theta)^3}{3!}(f_{ttt}g_{xxx} - f_{xxx}g_{ttt} + 3f_{txx}g_{ttx} - 3f_{ttx}g_{txx}) + ... \tag{5}$$

Наконец, используя (5) получаем важную формулу:

$$f(x) \star e^{i\omega t} = \exp(i\omega t) f(x + \theta\omega), \qquad e^{i\omega t} \star f(x) = \exp(i\omega t) f(x - \theta\omega). \tag{6}$$

Эта формула будет широко применяется в важном вопросе вычисления флуктуаций на классическом, некоммутативном фоне.

Рассмотрим скалярное поле $\phi(x, t)$ с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\partial_m\phi\,\partial^m\phi - V(\phi).$$

Уравнения движения имеют вид

$$\ddot{\phi} - \phi'' + V'(\phi) = 0, \tag{7}$$

где $\dot{\phi} = \partial\phi/\partial t$, $\phi' = \partial\phi/\partial x$, $V'(\phi) = \partial V/\partial\phi$. Пусть $\Phi = \Phi(x)$ стационарное решение (7). Чтобы вычислить спектр флуктуаций на фоне Φ положим

$$\phi(x, t) = \Phi(x) + \delta\phi(x, t), \qquad \delta\phi(x, t) = \eta(x)e^{i\omega t}. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7) получаем уравнение Шредингера для величины $\eta(x)$:

$$-\eta''(x) + U(x)\eta(x) = \omega^2\eta(x), \tag{9}$$

где $U(x) = V''(\phi)$. Решив (9) мы найдем спектр флуктуаций. Например, в случае модели ϕ^4 можно выбрать в качестве $\Phi(x)$ решение в виде кинка. В этом случае, $U(x)$ оказывается хорошо известным двухуровневым безотражательным потенциалом. Некоммутативное же обобщение (7) имеет вид:

$$\ddot{\phi} - \phi'' + V'_\star(\phi) = 0,$$

и вычисление спектра флуктуаций для этого случая приводит к неожиданным заключениям о которых мы упоминали во введении.

2. Преобразование Дарбу в некоммутативной теории

В работе [7] было предложено естественное обобщение операторов типа "лапласиан" на случай мояловского "звездного" произведения (4), (5), которое подробно обсуждалось в предыдущем параграфе. Это обобщение выглядит следующим образом:

$$H \star \psi \equiv (g^{mn}\partial_m\partial_n + A^m\partial_m + B) \star \psi. \tag{10}$$

Следуя [7] будем называть оператор определенный (10) "звездным лапласианом".

В [7] изучалось асимптотическое поведение "heat kernel" для (10). Целью этого параграфа является рассмотрение уравнения $H \star \psi = 0$ с точки зрения его интегрируемости методом ПД. Рассмотрим $D = 2$ уравнение $H \star \psi = 0$ с $g^{mn} = \mathrm{diag}(+1, -1)$. Вводя переменные светового конуса $x = \eta + \xi$, $y = \eta - \xi$ и определяя

$$a = \frac{1}{2}\left(A^0 + A^1\right), \qquad b = \frac{1}{2}\left(A^0 - A^1\right), \qquad c = B,$$

запишем это уравнение в виде:

$$\psi_{xy}[i] + a \star \psi_x[i] + b \star \psi_y[i] + c \star \psi[i] = 0, \tag{11}$$

где $\psi[i] = \psi_i(x,y)$, $i = 1,..,n+1$, (удобно обозначить $\psi[n+1] \equiv \psi$) $a = a(x,y)$, $b = b(x,y)$, $c = c(x,y)$. Другими словами, имеется $n+1$ решений уравнения (11) для заданных a, b и c, которые, следуя традиции, будем называть потенциалами. Предположим, что для данных a, b и c уравнение (11) может быть решено явно. В этом случае, потенциалы назовем интегрируемыми.

Теперь мы хотим использовать n известных функций $\psi[i]$ для одевания решения ψ и потенциалов уравнения (11): $\psi \to \tilde{\psi}$, $a \to \tilde{a}$, $b \to \tilde{b}$, $c \to \tilde{c}$ так, чтобы новая функция $\tilde{\psi}$ была бы решением одетого уравнения

$$\tilde{\psi}_{xy} + \tilde{a} \star \tilde{\psi}_x + \tilde{b} \star \tilde{\psi}_y + \tilde{c} \star \tilde{\psi} = 0. \tag{12}$$

Используя общепринятую терминологию, указанные n функций $\psi[i]$ будем называть опорными функциями. Искомая процедура будет n-кратным ПД для уравнения (11) если одетая функция $\tilde{\psi}$ имеет нетривиальное ядро K в пространстве решений с $\dim K = n$. Общий результат можно сформулировать в виде теоремы:

Теорема. Пусть для $k = 0,..,n$ B_k и D_k определены соотношениями:

$$B_k = 1 \star \left(\overleftarrow{\partial}_y - a\right)^k, \qquad D_k = 1 \star \left(\overleftarrow{\partial}_x - b\right)^k, \tag{13}$$

(так что $B_0 = D_0 = 1$, $B_1 = -a$, $D_1 = -b$, $B_2 = a^2 - a_y$, $D_2 = b^2 - b_x$ и т.д.), а функции G_k и P_k являются решениями системы линейных уравнений:

$$\sum_{k=0}^{n-1} G_k \star \psi_{ky}[i] = \psi_{ny}[i], \qquad i = 1,..,n, \qquad G_n = -1, \tag{14}$$

и

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_k \star \psi_{kx}[i] = \psi_{nx}[i], \qquad i = 1,..,n, \qquad P_n = -1, \tag{15}$$

где $\psi_{kx} = \partial^k \psi / \partial x^k$, $\psi_{ky} = \partial^k \psi / \partial y^k$ и $\psi[i]$, ψ решения (11) с заданными потенциалами a, b, c. Тогда одетые функции

$$\psi^{(n)} \equiv \psi_{ny} - \sum_{k=0}^{n-1} G_k \star \psi_{ky}, \qquad {}^{(n)}\psi \equiv \psi_{nx} - \sum_{k=0}^{n-1} P_k \star \psi_{kx}, \tag{16}$$

будут решениями (12) с нетривиальным n-мерным ядром в пространстве решений (11) с новыми потенциалами $a^{(n)}$, $b^{(n)}$, $c^{(n)}$ (для $\psi^{(n)}$) и ${}^{(n)}a$, ${}^{(n)}b$, ${}^{(n)}c$ (для ${}^{(n)}\psi$) которые вычисляются из системы уравнений:

$$\begin{gathered} a^{(n)} \star \left(\sum_{k=0}^{n} G_k \star B_k\right) + \sum_{k=0}^{n} \left(G_{k,y} \star B_k + G_k \star B_{k+1}\right) = 0, \\ b^{(n)} = b, \\ c^{(n)} = c + \left(a^{(n)} - a\right) \star b + n b_y + G_{n-1,x} + b \star G_{n-1} - G_{n-1} \star b, \end{gathered} \tag{17}$$

и

$$\begin{gathered} {}^{(n)}a = a, \\ {}^{(n)}b \star \left(\sum_{k=0}^{n} P_k \star D_k\right) + \sum_{k=0}^{n} \left(P_{k,x} \star D_k + P_k \star D_{k+1}\right) = 0, \\ {}^{(n)}c = c + \left({}^{(n)}b - b\right) \star a + n a_x + P_{n-1,y} + a \star P_{n-1} - P_{n-1} \star a. \end{gathered} \tag{18}$$

Простейший способ доказать эту теорему (или проверить ее) - начать с однократного ПД ($n = 1$) и затем использовать метод математической индукции. Для $n = 1$ (17) и (18) выглядят следующим образом

$$\psi^{(1)} = \psi_y - G_0 \star \psi, \qquad a^{(1)} \star \alpha - \alpha \star a = -\alpha_y,$$
$$b^{(1)} = b, \qquad c^{(1)} = a^{(1)} \star b + b_y - \alpha \star \beta, \tag{19}$$

и

$${}^{(1)}\psi = \psi_x - P_0 \star \psi, \qquad {}^{(1)}a = a,$$
$${}^{(1)}b \star \beta - \beta \star b = -\beta_x, \qquad {}^{(1)}c = {}^{(1)}b \star a + a_x - \beta \star \alpha, \tag{20}$$

где $\alpha = a + G_0$, $\beta = b + P_0$ и

$$G_0 = \psi_y[1] \star (\psi[1])^{-1}, \qquad P_0 = \psi_x[1] \star (\psi[1])^{-1},$$

а выражение $(\psi[1])^{-1}$ определено формулой:

$$\psi[1] \star (\psi[1])^{-1} = (\psi[1])^{-1} \star \psi[1] = 1.$$

Заключение

Таким образом можно использовать ПД для построения интегрируемых потенциалов и в случае ”звездного лапласиана”. Отметим, однако, что практическое использование приведенных формул может оказаться чрезвычайно сложным, за исключением тривиальных случаев.

То обстоятельство, что ПД справедливы для уравнений типа (11), открывает возможности для изучения свойства интегрируемости в некоммутативной геометрии. В свою очередь, интересно было бы рассмотреть уравнения типа (11), как L-уравнения генерирующие некоммутативные иерархии. Заметим, что это уравнение содержит не только вторые, но и первые производные. Известно, что для обычного линейного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами ПД справедливо лишь если присутствуют слагаемые первого порядка (хотя бы одно). Если же первые производные отсутствуют, то уравнение ковариантно лишь относительно преобразований Мутара. Поэтому интересным открытым вопросом является наличие ПМ для ”звездного уравнения”.

Список литературы

1. Susskind L. Three Impossible Theories, 2021; arXiv:2107.11688 [hep-th].

2. Caldwell R., Kamionkowski M. and Weinberg N. Phantom energy and cosmic doomsday. *Phys.Rev.Lett.* 2003; 91, 071301.

3. Steinhardt P.J., Turok N. The Cyclic universe: An Informal introduction. *Nucl.Phys.Proc.Suppl*, 2003; 124: S. 38-49.

4. Farhi E., Guth A.H., Guven J. Is It Possible to Create a Universe in the Laboratory by Quantum Tunneling? *Nucl.Phys.* 1990; 339: S. 417-490.

5. Yurov A. V., Moruno P.M., Gonzalez-Diaz P.F. New "Bigs"in cosmology, *Nucl.Phys.* 2006; B759: S. 320-341.

6. Vassilevich D.V., Yurov A.V. Space-time non-commutativity tends to create bound states, *Phys.Rev.* 2004; D69, 105006.

7. Vassilevich D.V. Non-commutative heat kernel, *Lett.Math.Phys.* 2004; 67: S. 185-194.

References

1. Susskind L. Three Impossible Theories, 2021; arXiv:2107.11688 [hep-th].

2. Caldwell R., Kamionkowski M. and Weinberg N. Phantom energy and cosmic doomsday. *Phys.Rev.Lett.* 2003; 91, 071301.

3. Steinhardt P.J., Turok N. The Cyclic universe: An Informal introduction. *Nucl.Phys.Proc.Suppl*, 2003; 124: S. 38-49.

4. Farhi E., Guth A.H., Guven J. Is It Possible to Create a Universe in the Laboratory by Quantum Tunneling? *Nucl.Phys.* 1990; 339: S. 417-490.

5. Yurov A. V., Moruno P.M., Gonzalez-Diaz P.F. New "Bigs" in cosmology, *Nucl.Phys.* 2006; B759: S. 320-341.

6. Vassilevich D.V., Yurov A.V. Space-time non-commutativity tends to create bound states, *Phys.Rev.* 2004; D69, 105006.

7. Vassilevich D.V. Non-commutative heat kernel, *Lett.Math.Phys.* 2004; 67: S. 185-194.

Авторы

Юров Артём Валерианович, д.ф.-м.н., профессор, Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Калининград, ул. Невского, 14, 236041, Россия.
E-mail: aiurov@kantiana.ru

Обноскина Ангелина Васильевна, аспирант, Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Калининград, ул. Невского, 14, 236041, Россия.
E-mail: angelinalina15@mail.ru

Трунин Артем Сергеевич, аспирант, Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Калининград, ул. Невского, 14, 236041, Россия.
E-mail: deletednyas@live.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Юров А. В., Обноскина А. В., Трунин А. С. Изоспектральные симметрии в двумерных моделях с мойяловским произведением. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2024. № 3-4. С. 87—93.

Authors

Yurov Artyom Valerianovich, Doctor of Physico-mathematical Sciences, professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, st. Nevsky, 14, 236041, Russia.
E-mail: aiurov@kantiana.ru

Obnoskina Angelina Vasil'evna, postgraduate, Immanuel Kant Baltic Federal University,Kaliningrad, st. Nevsky, 14, 236041, Russia.
E-mail: angelinalina15@mail.ru

Trunin Artyom Sergeevich, postgraduate, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, st. Nevsky, 14, 236041, Russia.
E-mail: deletednyas@live.ru

Please cite this article in English as:
Yurov A. V., Obnoskina A. V., Trunin A. S. Isospectral symmetries in two-dimensional models with Moyal product. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2024, no. 3-4, pp. 87–93.