УДК 530.12, 514.822

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ ДЛЯ ПРОСТЕЙШЕЙ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ БРАННОЙ МОДЕЛИ*

Юров А. В.[a,1], Максютов А. Р.[a,2], Трунин А. С.[a,3]

[a] Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Калининград, ул. Невского, 14, 236041, Россия.

Метод изоспектральных симметрий используется для интегрирования уравнений Эйнштейна при наличии семейства параллельных 3-бран, погруженных в объемлющее пятимерное пространство, заполненное гравитацией и скалярным полем. При наличии симметрии орбифолда, для заданной стационарной браны часть получаемых уравнений может быть сведена к уравнению Шредингера, дискретный неотрицательный спектр которого определяет набор частиц на бране. Уравнение Шредингера допускает преобразование Дарбу, которое, при использовании регулярной опорной функции меняет спектр на конечное число уровней, не меняя остальных. Таким образом, описанная техника позволяет строить конечные наборы частиц с заданным распределением масс. В приближении тонкой настройки между натяжением на бране и величиной плотности вакуумной энергии построены точные решения для браны с нулевой кривизной. Дан точный вывод обобщенных формул Крама.

Ключевые слова: Браны, суперпотенциал, преобразование Дарбу, формулы Крама, несингулярные решения.

DARBOUX TRANSFORMATION FOR THE SIMPLEST PHENOMENOLOGICAL BRANE MODEL

Yurov A. V.[a,1], Maksyutov A. R.[a,2], Trunin A. S.[a,3]

[a] Immanuel Kant Baltic Federal University,Kaliningrad, st. Nevsky, 14, 236041, Russia.

The method of isospectral symmetries is used to integrate the Einstein equations in the presence of a family of parallel 3-branes immersed in an ambient five-dimensional space filled with gravity and a scalar field. In the presence of orbifold symmetry, for a given stationary brane, part of the resulting equations can be reduced to the Schrodinger equation, the discrete non-negative spectrum of which determines a set of particles on the brane. The Schrodinger equation admits a Darboux transformation, which, when using a regular support function, changes the spectrum to a finite number of levels without changing the others. Thus, the described technique allows one to construct finite sets of particles with a given mass distribution. In the approximation of fine-tuning between the brane tension and the value of the vacuum energy density, exact solutions are constructed for a brane with zero curvature. An exact derivation of the generalized Crum formulas is given.

Keywords: Branes, superpotential, Darboux transformations, Crum formula, nonsingular solutions.

PACS: 04.60.-m, 11.25.-w
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2024.3-4.80-86

---

*Работа поддержана министерством науки и образования РФ (грант №075-02-2024-1430).

[1]E-mail: aiurov@kantiana.ru
[2]E-mail: maksartur@icloud.com
[3]E-mail: deletednyas@live.ru

Введение

В работе [1], авторы рассмотрели модель описывающую семейство параллельных 3-бран, погруженных в объемлющее пятимерное пространство, заполненное гравитацией и скалярным полем. Действие системы имеет вид:

$$S=\int d^4xdy\sqrt{g^{(5)}}\left(\frac{1}{16piG_{(5)}}R^{(5)}-\frac{(\nabla\phi)^2}{2}-V(\phi)\right)-\sum_b\int_{y_b}d^4x\sqrt{|\tilde{g}^b|}\sigma_b(\phi), \tag{1}$$

где пятимерные координаты (x^μ, y), $\mu=0,1,2,3$; b-я брана расположена в точке $y=y_b$, $g^{(5)}=|g_{ab}|$, где g_{ab} - пятимерная метрика, $\tilde{g}^b_{\mu\nu}$ - метрика заданная на b-ой бране, натяжение на которой обозначается σ_b, а потенциал $V(\phi)$ считается функцией от внешнего (bulk) скалярного поля $\phi=\phi(y)$. Решение полевых уравнений, получающихся варьированием действия ищется в виде ([1]):

$$ds^2=dy^2+A(y)\left(-dt^2+e^{2Ht}\delta_{ik}dx^idx^k\right), \tag{2}$$

где $A(y)$ - "масштабный фактор" подлежащий определению, а H=const - эффективный параметр Хаббла на бране. Если $H=0$, то брана стационарна, а если $H>0$, то имеем брану расширяющуюся в режиме де Ситтера.

Получаемая система уравнений может быть записана в суперсимметричном виде, если ввести суперпотенциал $W(\phi)$ определенный соотношением $\dot{\phi}=W'(\phi)/2$, где точка обозначает производную по y, а штрих производную по ϕ. Если $H=0$, то справедлива формула

$$V(\phi)=W'^2/8-W^2/6. \tag{3}$$

Используя это соотношение, авторы [1] развили простой способ построения точных решений полевых уравнений (см. также, [2], [3]), суть которого заключается в подборе $W(\phi)$ и последующем нахождении несингулярных (как на бране, так и в объемлющем пространстве) решений. Авторы [1] изучили модели с четным, нечетным и показательным потенциалами (четные суперпотенциалы ранее рассматривались в [4], а нечетные впервые введены в [5]). Там же описано обобщение описанной техники на нестационарные браны ($H\neq 0$) и кратко рассмотрено применение этого метода для возможного решения проблемы малости космологической постоянной и проблемы иерархий. Очевидным недостатком описанного метода является его феноменологический характер. В работе [6] описана регулярная процедура построения точных, несингулярных решений для уравнений изученных в цитируемых работах. Основная идея нашего подхода может быть сформулирована следующим образом: суперсимметричная связь между $V(\phi)$ и $W(\phi)$ типична для формулировки суперсимметричной квантовой механики (ССКМ). В свою очередь, ССКМ может быть реализована с помощью преобразований Дарбу (ПД) для уравнения Шредингера [7], [8], [9], [10], использование которых позволяет строить интегрируемые, несингулярные потенциалы, если опорные функции, входящие в крамовские определители, имеют перемежающиеся нули [7], [11]. Поэтому, совершенно естественной выглядит попытка написать непосредственно ПД для полевых уравнений и использовать их для генерации точных решений. Наличие простых алгебраических связей между скалярной кривизной и суперпотенциалом показывает, что правильное применение ПД для построения несингулярных потенциалов в ССКМ, позволит развить и систематическую процедуру для построения несингулярных решений ($R\neq\infty$) в теории бран, которая, тем самым, будет носить регулярный характер в отличие от "феноменологического подхода" изложенного в [1]. В частности, для построения бесконечного семейства точных несингулярных решений методом ПД требуется знание лишь одного точного решения такого вида, которое служит "затравкой" для построения всего семейства. Другой способ использования ПД - построение цепочек дискретных симметрий и изучение их замыканий. Применение такой техники позволяет строить новые точные решения, которые выражаются через трансценденты Пенлеве и их высшие обобщения.

Эти замечательные свойства, а также обобщение на динамическую брану были описаны в [6], однако при изложении оказалась пропущена простая феноменологическая модель описанная в [15]. Несмотря на ее простоту, оказалось, что эта модель допускает ПД и возможность построения богатых наборов точных решений. Целью этой работы является описание дискретных симметрий и вывод обобщенных формул Крама для данной модели.

1. Феноменологическая модель

Рассмотрим действие для вещественного скалярного поля ϕ при наличии браны:

$$S_\phi = \int d^4xdy\sqrt{g}\left(\frac{1}{2}g^{AB}\partial_A\phi\partial_B\phi - \frac{1}{2}V(y)\phi^2\right), \tag{4}$$

где $x^A = (x^\mu, y)$ - координаты в пятимерном пространстве-времени. Предполагается наличие симметрии орбифолда, а влияние браны учитывается в потенциале $V(y)$, для которого часто используется асимптотическое приближение $V(y \to \infty) \to c^2 > 0$, где c - некоторая вещественная константа. При отсутствии гравитации, варьирование (4) приводит к уравнению движения

$$-\partial_\mu\partial^\mu\phi + \partial_y^2\phi - V(y)\phi = 0, \tag{5}$$

т.е. спектр 4-масс определяется соотношением:

$$m^2\phi = p^\mu p_\mu\phi = \left(-\partial_y^2\phi + V(y)\right)\phi. \tag{6}$$

(6) является одномерным стационарным уравнением Шредингера с собственными значениями m^2. Очевидно, дискретный, неотрицательный спектр будет определять набор частиц на бране.

Уравнение (6) допускает известную изоспектральную симметрию - преобразование Дарбу (ПД) [12], [13]. Если опорная функция ПД не обращается в нуль в области определения потенциала $V(y)$, то последовательность этих преобразований (допускающая компактное представление с помощью определителей Крама) меняет (уменьшает или увеличивает) дискретный спектр на конечное число уровней или не меняет вообще. Какая из трех указанных ситуаций реализуется, определяется асимптотическим поведением опорной функции [14] (см. также [16]). Таким образом, уже в этой простейшей задаче, можно находить явный вид потенциала $V(y)$, который будет приводить к заданному спектру масс. Нас будет интересовать возможность использования формализма ПД при учете гравитации. В этом случае действие примет вид

$$S_g = -\frac{1}{16\pi G_{(5)}}\int d^4xdy\sqrt{g^{(5)}}R^{(5)} - \Lambda\int d^4xdy\sqrt{g^{(5)}} - \sigma\int d^4x\sqrt{g^{(4)}}. \tag{7}$$

В последнем слагаемом интегрирование проводится по бране с индуцированной метрикой $g_{\mu\nu}^{(4)}$, а Λ - пятимерная космологическая постоянная.

Известно ([15]), что при наличии тонкой подстройки

$$\Lambda = -\frac{4\pi}{3}G_{(5)}\sigma^2, \tag{8}$$

существуют 4-плоские решение, в противном случае геометрия на бране будет (анти) де Ситтеровской. Если (8) выполнено, то можно найти решение, отвечающее нефакторизуемой метрике

$$ds^2 = a^2(y)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2, \tag{9}$$

где $\eta_{\mu\nu}$ - обычная матрица Минковского, $a(y)$ - масштабный фактор:

$$a(y) = e^{-k|y|}, \quad k = \frac{4\pi}{3}G_{(5)}\sigma,$$

причем последнее соотношение непосредственно выводится из условия сшивки Израэля.

Нефакторизуемая метрика (9) соответствует двум частям пространства де Ситтера с радиусом $1/k$, склеенным вдоль вдоль плоской браны, расположенной при $y = 0$. На фоне метрики (9) аналог уравнения (6) имеет вид

$$-D\left(a^4 D\Psi_m\right) + a^4 V(y)\Psi_m = m^2 a^2 \Psi_m, \tag{10}$$

где произведено переобозначение $\phi \to \Psi$, индекс у Ψ введен для удобства (см. ниже), а $Df = df/dy = \dot{f}$. Если нас интересует дискретный спектр, то вещественные решения уравнения (10) должны удовлетворять условию нормировки и ортогональности:

$$\int dy a^2(y)\Psi_m(y)\Psi_n(y) = \delta_{mn}. \tag{11}$$

На этом этапе задача сводится к поиску аналога ПД для уравнения (10).

Определим опорную функцию искомого преобразования, как решение (10) отвечающее собственному значению n^2 (Ψ_n) , а преобразуемое решение будем считать отвечающим собственному значению m^2. Для того чтобы не загромождать нижеприведенные формулы, условимся использовать следующие обозначения: $\Psi_m = \Psi$, $\Psi_n = \Psi_1$. Отметим, что вронскиан $W = W(\Psi, \Psi_1) = \Psi_1\dot{\Psi} - \dot{\Psi}_1\Psi$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\dot{W} = -\frac{4\dot{a}}{a}W - \frac{m^2 - n^2}{a^2}\Psi\Psi_1. \tag{12}$$

В частности при $m = n$, $W = const/a^4$, тогда как при отсутствии гравитации и совпадении собственных значений, вронскиан был бы равен произвольной постоянной.

Искомое ПД для уравнения (10) определяется формулами

$$\Psi \to \Psi[1] = a(\dot{\Psi} - \tau\Psi) = \frac{aW(\Psi, \Psi_1)}{\Psi_1}, \tag{13}$$

$$V \to V[1] = V - 2\dot{\tau} - \frac{2\tau\dot{a} + 3\ddot{a}}{a}, \tag{14}$$

$$a \to a[1] = a, \tag{15}$$

где $\tau = D\ln\Psi_1$. В справедливости приведенных соотношений можно убедиться прямой подстановкой соответствующих выражений из формул (13)-(15) в уравнение

$$-D\left(a^4 D\Psi[1]\right) + a^4 V[1]\Psi[1] = m^2 a^2 \Psi[1]. \tag{16}$$

Для получения итерационных формул, обобщающих формулы Крама для уравнения Шредингера удобно записать (10) в виде

$$\ddot{\Psi} = -4\theta\dot{\Psi} + u\Psi, \tag{17}$$

где $\theta = D\ln a$, $u = V - m^2/a^2$. N -кратно преобразованное решение $\Psi[N]$ запишется в виде полинома по степеням производной от изначальной функции Ψ:

$$\Psi[N] = \xi\Psi^{(N)} + \sum_{k=1}^{N} f_k \Psi^{(N-k)}, \tag{18}$$

где $\xi = a^N$, $\Psi^{(k)} = D^k\Psi$. Таким образом имеется $N+1$ неизвестных величин (f_1, f_2, ..., f_N, $V[N]$), которые можно определить выписав $N+1$ уравнений связывающих их друг с другом. Эти уравнения получаются следующим образом: вначале подставляем (18) в преобразованное уравнение (17), т.е. в

$$\ddot{\Psi}[N] = -4\theta\dot{\Psi}[N] + u[N]\Psi[N], \tag{19}$$

где $u[N] = V[N] - m^2/a^2$, а величина θ не меняется в соответствии с (15). На следующем этапе, используя (17) следует понизить порядок у производных $\Psi^{(k)}$ вплоть до величины N, используя соотношения:

$$\Psi^{(N+1)} = -4\theta\Psi^{(N)} + ..., \quad \Psi^{(N+2)} = (16\theta^2 - 4N\dot{\theta} + u)\psi^{(N)}...,$$

где многоточием обозначены члены содержащие $\Psi^{(k)}$ с $k < N$. В результате (19) принимает вид:

$$\sum_{k=0}^{N} C_k \Psi^{(k)} = 0. \tag{20}$$

Считая производные Ψ независимыми переменными, находим решение (20):

$$C_0 = C_1 = C_2 = ... = C_N = 0. \tag{21}$$

Величина $V[N]$ извлекается из уравнения $C_N = 0$. После вычисления, находим

$$V[N] = V + a^{-N}\left(2\dot{f}_1 + f_2\right) + \frac{N}{a^2}\left[(N-1)\dot{a}^2 - 3a\ddot{a}\right]. \tag{22}$$

Величины f_k определяются из системы линейных уравнений

$$\xi\Psi_i^{(N)} + \sum_{k=1}^{N} f_k \Psi_i^{(N-k)}, \tag{23}$$

где Ψ_i с $i = 1...N$ - решения (10) отвечающие своим значениям спектрального параметра. Отсюда

$$f_1 = -a^{-N}\frac{\Delta_{N,1}}{\Delta_N}, \quad f_2 = a^N \frac{\Delta_{N,2}}{\Delta_N}, \tag{24}$$

где $\Delta_{N,1}$, $\Delta_{N,2}$, Δ_N - обычные определители Крама. Формулы (22), (24) полностью решают задачу, вынесенную в заголовок этого параграфа.

Заключение

Таким образом, модель описанная в [15] обладает достаточно нетривиальной структурой для того, чтобы допускать ПД. Разумеется, в общем случае, когда мы не можем явно восстановить форму потенциала $V(\phi)$ как функцию от ϕ, однако решения будут иметь заданную асимптотику. Как отмечалось в нашей работе [6], ПД позволяют построить большинство если не все точно решаемые потенциалы. Физический смысл большинства таких потенциалов в теории бран не ясен, однако нашей целью было продемонстрировать эффективность ПД для построения точных решений уравнений пятимерной гравитации с "bulk"-скалярным полем.

Подводя итог, мы хотим выразить уверенность, что в случае с $D = 5$ ПД является наиболее эффективным и регулярным способом построения несингулярных решений в теории бран.

Список литературы

1. Flanagan E.E., Tye S.-H.H., Wasserman I. Brane world models with bulk scalar fields. [hep-th/0110070 v2].
2. Randall L., Sundrum R. An Alternative to Compactification. *Phys.Rev.Lett.* 1999; 83 (4690).
3. Tye S.-H.H., Wasserman I. Brane World Solution to the Cosmological Constant Problem. *Phys. Rev. Lett.* 2001; 86 (1682).
4. DeWolf O., Freedman D.Z., Gubser S.S., Karch A. Modeling the fifth dimension with scalars and gravity. *Phys.Rev.* 2000; D62, 046008.
5. Kakushadze Z. Localized (super)gravity and cosmological constant. *Nucl.Phys.* 2000; B589 (75).
6. Yurov A.V., Yurov V. A. Nonsingular brane solutions via the Darboux transformation. *Phys.Rev.* 2005; D72,026003.

7. Matveev V.B., Salle M.A. *Darboux Transformation and Solitons.* Springer Verlag, Berlin 1991.

8. Andrianov A.A., Borisov N.V., Ioffe M.V. Factorization method and Darboux transformation for multidimensional Hamiltonians. *Phys.Lett.* 1984; A105 (19).

9. Андрианов А.А., Борисов Н.В., Иоффе М.В. Метод факторизации и преобразование Дарбу для многомерных гамильтонианов. *ТМФ.* 1984; 61 (2) 183.

10. Андрианов А.А., Борисов Н.В., Иоффе М.В., Эйдес М.И. Суперсимметричная механика: новый взгляд на эквивалентность квантовых систем. *ТМФ* 1984; 61 (1) 17.

11. Адлер В.Э. О модификации метода Крама. *ТМФ.* 1994; 101 (3) 323.

12. Darboux G.C.R. Sur une Proposition Relative aux ?quations Lin?aires. *Acad.Sci.,Paris.* 1882; 94: S. 1456-1459.

13. Crum M.M. Associated Sturm-Liouville systems. *Quart. J. Math.Oxford*, 1955; 6 (2) 121.

14. Березовой В.П., Пашнев А.И. Суперсимметричная квантовая механика и перестройка спектров гамильтонианов. *ТМФ.* 1987; 70 (1) 146.

15. Рубаков В.А. Большие и бесконечные дополнительные измерения. *УФН.* 2001; 171 (9) 913.

16. Верещагин С.Д., Юров А.В. Преобразование Дарбу и точно решаемые космологические модели. *ТМФ.* 2004; 139, 405.

References

1. Flanagan E.E., Tye S.-H.H., Wasserman I. Brane world models with bulk scalar fields. [hep-th/0110070 v2].

2. Randall L., Sundrum R. An Alternative to Compactification. *Phys.Rev.Lett.* 1999; 83 (4690).

3. Tye S.-H.H., Wasserman I. Brane World Solution to the Cosmological Constant Problem. *Phys. Rev. Lett.* 2001; 86 (1682).

4. DeWolf O., Freedman D.Z., Gubser S.S., Karch A. Modeling the fifth dimension with scalars and gravity. *Phys.Rev.* 2000; D62, 046008.

5. Kakushadze Z. Localized (super)gravity and cosmological constant. *Nucl.Phys.* 2000; B589 (75).

6. Yurov A.V., Yurov V. A. Nonsingular brane solutions via the Darboux transformation. *Phys.Rev.* 2005; D72,026003.

7. Matveev V.B., Salle M.A. *Darboux Transformation and Solitons.* Springer Verlag, Berlin 1991.

8. Andrianov A.A., Borisov N.V., Ioffe M.V. Factorization method and Darboux transformation for multidimensional Hamiltonians. *Phys.Lett.* 1984; A105 (19).

9. Andrianov A.A., Borisov N.V., Ioffe M.V. The factorization method and the Darboux transform for multidimensional Hamiltonians. *Theoret. and Math. Phys.*, 1984; 61 (2) 183. (in Russ.)

10. Andrianov A.A., Borisov N.V., Ioffe M.V., Eides M.I. Supersymmetric mechanics: a new look at the equivalence of quantum systems. *Theoret. and Math. Phys.* 1984; 61 (1) 17. (in Russ.)

11. Adler V.E. About the modification of the Cram method. *Theoret. and Math. Phys.* 1994; 101 (3) 323. (in Russ.)

12. Darboux G.C.R. Sur une Proposition Relative aux ?quations Lin?aires. *Acad.Sci.,Paris.* 1882; 94: S. 1456-1459.

13. Crum M.M. Associated Sturm-Liouville systems. *Quart. J. Math.Oxford*, 1955; 6 (2) 121.

14. Berezovoy V.P., Pashnev A.I. Supersymmetric quantum mechanics and the rearrangement of the spectra of Hamiltonians. *Theoret. and Math. Phys.* 1987; 70 (1) 146. (in Russ.)

15. Rubakov V.A. Large and endless extra dimensions. *Achievements of physical sciences.* 2001; 171 (9) 913. (in Russ.)

16. Vereshchagin S.D., Yurov A.V. Darboux transformation and precisely solvable cosmological models. *Theoret. and Math. Phys.* 2004; 139, 405. (in Russ.)

Авторы

Юров Артём Валерианович, д.ф.-м.н., профессор, Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Калининград, ул. Невского, 14, 236041, Россия.
E-mail: aiurov@kantiana.ru

Максютов Артур Русланович, аспирант, Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Калининград, ул. Невского, 14, 236041, Россия.
E-mail: maksartur@icloud.com

Трунин Артем Сергеевич, аспирант, Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Калининград, ул. Невского, 14, 236041, Россия.
E-mail: deletednyas@live.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Юров А. В., Максютов А. Р., Трунин А. С. Преобразование Дарбу для простейшей феноменологической бранной модели. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2024. № 3-4. С. 80—86.

Authors

Yurov Artyom Valerianovich, Doctor of Physico-mathematical Sciences, professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, st. Nevsky, 14, 236041, Russia.
E-mail: aiurov@kantiana.ru

Maksyutov Artur Ruslanovich, postgraduate, Immanuel Kant Baltic Federal University,Kaliningrad, st. Nevsky, 14, 236041, Russia.
E-mail: maksartur@icloud.com

Trunin Artyom Sergeevich, postgraduate, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, st. Nevsky, 14, 236041, Russia.
E-mail: deletednyas@live.ru

Please cite this article in English as:
Yurov A. V., Maksyutov A. R., Trunin A. S. Darboux transformation for the simplest phenomenological brane model. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2024, no. 3-4, pp. 80–86.