УДК 524.834, 530.225

ГОЛОГРАФИЧЕСКАЯ ДУАЛЬНОСТЬ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ*

Юрова А. А.[a,b,1], Юров А. В.[a,2]

[a] ФГАОУ ВО "БФУ им. И. Канта г. Калининград, 236041, Россия.

[b] КГТУ, г. Калининград, 236000, Россия.

Ландшафт метастабильных вакуумов де Ситтера (dS) вместе с механизмом вечной инфляции и генерации пузырей с новым вакуумом могут заселить весь Пейзаж «карманными вселенными». Сасскинд предположил, что существует голографическое дуальное описание мультиверса закодированное в форме двумерной конформной теории поля. С другой стороны, существует связь между интегрируемыми иерархиями и двумерными конформными теориями, а именно: из компонент тензора энергии-импульса конформных теорий можно построить величины, удовлетворяющие интегрируемым уравнениям, записанному в виде условия нулевой кривизны, связанного с группой SL (2, $\mathbf{R}$) или SL(3, $\mathbf{R}$). Условие нулевой кривизны для размерности (2+1) можно получить из условия самодуальности в (3+3)-мерном пространстве, тогда как (1+1)-мерные интегрируемые модели можно получить из условия самодуальности, связанному с напряженностью поля Янга-Миллса SL(2,R) в (2 + 2) измерениях. Используя обобщенный метод размерной редукции Филановского, можно "скрыть" две дополнительные временные переменные и получить новую форму дуальности между dS и теорией Янга-Миллса. Наконец, мы показываем, что вся иерархия АКНС содержит уравнения Кадомцева-Петвиашвили, поэтому КП играют фундаментальную роль в этой теории.

Ключевые слова: dS/CFT, ложный вакуум, конформная группа, нулевая кривизна, самодуальность, поля Янга-Миллса.

HOLOGRAPHIC DUALITY AND INTEGRABILITY

Yurova A. A.[a,b,1], Yurov A. V.[a,2]

[a] IKBFU, Kaliningrad, 236041, Russia.

[b] KSTU, Kaliningrad, 236000, Russia.

A Landscape of metastable de Sitter vacua and that the mechanisms of eternal inflation and bubble nucleation can populate the entire Landscape with“pocket universes”. It may exist (Susskind) a holographic dual description of the multiverse in the form of a two dimensional conformal field theory. On the other hand, there is a connection between integrable hierarchies and two-dimensional conformal theories: from the components of the energy-momentum tensor of conformal theories one can construct quantities that satisfy the integrable equations - the zero curvature condition associated with the group SL(2, $\mathbf{R}$) or SL(3, $\mathbf{R}$). (2+1) dimensional zero curvature condition can be obtained from the self-duality condition in 3+3 dimensions, whereas (1 + 1) dimensional integrable models can be obtained from a self-duality condition associated with Yang-Mills field strengths belonging to SL(2,R) in (2 + 2) dimensions. Using the generalised dimensional reduction method of Filanovsky) one can hide two extra time variables and obtain a new form of duality between dS and the Yang-Mills theory. At last, we show that All AKNS hierarchy contain Kadomtsev-Petviashvili equations therefore KP play the fundamental role in this theory.

Keywords: dS/CFT, false vacuum, conformal group, zero curvature, self-duality, Yang-Mills fields.

PACS: 98.80.-k, 98.80.Qc

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2024.1.126-131

*Работа поддержана Министерством науки и высшего образования РФ (договор № 075-02-2024-1430 от 28.02.2024).

[1]E-mail: AIUrova@kantiana.ru

[2]E-mail: AIUrov@kantiana.ru

Введение

AdS/CFT дуальность устанавливает эквивалентность теории в балке с гравитацией и суперсимметричной калибровочной теории Янга-Миллса на границе [1], [2]. Существует ли некий голографический аналог дуальности для dS вселенной? Эта задача оказалась весьма сложной и до сих пор общепринятое решение отсутствует. Например, известно, что попытка наивно использовать голографический принцип и принцип дополнительности для космологического горизонта событий, приводит к серьезным противоречиям и парадоксальным выводам [3]. Кроме того в [4] доказана теорема no-go, из которой следует, что полный набор симметрий геометрии де Ситтера не совместим с конечной энтропией области ограниченной горизонтом событий. Отсюда обычно делается вывод, о том что время жизни вселенной в dS фазе не должно превосходить время возврата Пуанкаре для этой области [5].

Попытка решить проблему предпринята в [6]. Известен факт метастабильности всех вакуумов с положительной плотностью в ландшафте, что вкупе с инфляцией приводит к заселению инфлюирующего вакуума пузырями заполненными более низкоэнергетичными вакуумами. Это происходит благодаря квантовому туннелированию, в амплитуду которого наибольший вклад дают инстантоны [7], [8]. В свою очередь, инстантоны обладают симметрией двумерной конформной группы (изоморфной SO(3,1)), что и позволило авторам [6] предположить следующее: весь ландшафт закодирован в C_2 (двумерная конформная группа — бесконечномерна). Так возникает нетривиальная реализация dS/CFT соответствия. Оказывается, эта конструкция может допустить дальнейшее развитие, основную идею которого мы представим в следующем разделе.

1. dS/CFT и интегрируемые иерархии

Мы используем два важных свойства. Во-первых, двумерная конформная группа тесно связана с интегрируемыми иерархиями, допускающими представление нулевой кривизны. Например, используя калибровочные потенциалы из SL(2,R), можно построить нелинейное уравнение Шрёдингера (NLS), уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ) и синус-Гордон, а также уравнения Дэви-Стюартсона (DS) и Кадомцева-Петвиашвили (KP) (см. например [9], [10]), в то время как из SL(3,R) выводится уравнение Буссинеска [11].

Более конкретно: используя представление нулевой кривизны (ПНК), можно построить тензор энергии-импульса конформной двумерной теории поля и наоборот — стартуя с бесшпурового тензора энергии-импульса можно сформулировать представление нулевой кривизны. ПНК играет роль пары Лакса и все известные нелинейные интегрируемые уравнения (включая немногочисленные известные примеры в (1+2)) могут быть записаны в форме таких представлений. Таким образом, оказывается, что существует нетривиальная формулировка двумерной конформной теории в виде системы интегрируемых иерархий записанных в форме представления нулевой кривизны. Это обстоятельство может рассматриваться, как забавный математический артефакт, но в действительности такая формулировка позволяет увидеть не очевидные, в рамках обычного подхода, связи.

Во-вторых, в процитированных выше работах показано, что представления нулевой кривизны можно получить из самодуального уравнения Янга-Миллса (СУЯМ). В частности, КП (и DS) можно получить из СУЯМ с группой SL(2,R) в пространстве с размерностью (3+3). Следует подчеркнуть, что в высших измерениях, задача построения самодуальных согласованных уравнений становится весьма нетривиальной. В четырех измерениях самодуальность определяется через соответствующий символ Леви-Чивиты, однако при $D > 4$ это очевидно не так. Поиск соответствующего тензора - аналога являлся предметом интенсивных математических исследований. Скажем, в случае размерности (3+3) известны два способа определить самодуальность. Первый:

$$F_{\mu\nu} = \frac{3}{2} J_{[\mu\nu} J_{\rho\sigma]} F^{\rho\sigma},$$

где антисимметричный тензор $J_{\mu\nu}$ определяется соотношением $J_{\mu\nu} = J_{\mu}{}^{\rho} g_{\rho\nu}$, а процедура антисимметризации

$$J_{[\mu\nu}J_{\rho\sigma]} = 1/3(J_{\mu\nu}J_{\rho\sigma} - J_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + J_{\mu\sigma}J_{\nu\rho}).$$

Второй имеет вид

$$F_{\mu\nu} = -\big(J_{\mu}{}^{\rho}J_{\nu}{}^{\sigma} + 2J_{\mu}{}^{\rho}\delta_{\nu}^{\sigma}\big)F_{\rho\sigma}.$$

Можно показать, что последняя формула следует из условия интегрируемости линейного уравнения

$$(\delta_{\mu}^{\nu} + J_{\mu}{}^{\nu})D_{\nu}\psi = 0,$$

где ψ — произвольная функция в некотором представлении калибровочной группы Янга-Миллса, калибровочная ковариантная производная равна $D_{\mu} = \partial_{\mu} - A_{\mu}$, и мы работаем в пространстве сигнатуры (3, 3), используя спинор Майораны-Вейля и некоторые специальные для этого случая матричные тождества для γ-матриц которые не будем здесь приводить.

Возвращаясь к нашей задаче, можно ожидать, что если компактифицировать два "лишних времени", то получается фактически (1+3) ЯМ. Но разумеется, проблема компактификации в этом случае становится нетривиальной. В традиционном подходе, метод размерной редукции является обобщением теории Калузы-Клейна и означает следующую последовательность действий: вначале строится лагранжиан с размерностью $D > 4$. Вакуумное решение задается в виде прямого произведения $R_{3,1} \times K_{D-4}$, где K_{D-4} — компактное многообразие с локальной размерностью $D-4$. На третьем шаге, в виде разложения по гармоникам этого многообразия, с коэффициентами зависящими от координат $R_{3,1}$ строятся все полевые величины теории, после чего выполняется интегрирование по остальным координатам, что дает (эффективный) (3+1) лагранжиан. В нашем случае, многообразие зависит от двух дополнительных времен и финальный лагранжиан оказывается содержащим ''фантомы" – поля с отрицательными кинетическими членами, нарушающими унитарность. Это означает, что нам необходим другой вариант метода размерной редукции. Интересный пример такого метода предложен И.А. Филановским в 1983 году [12]. Он рассматривал задачу построения конформно- инвариантной полевой теории в (3+1) путем размерной редукции из теории в (4+2) с группой симметрии SO(4,2), изоморфной конформной группе в (3+1). Для решения проблемы "фантомов" (Филановский называл их "духами") автор предложил новый метод размерной редукции. Суть идеи: в пространстве с размерностью $D+2$ с координатами x^A вводятся новые координаты ξ^a, с $a = 0, 1 \ldots, D-1$, λ и λR. Поля полагаются независимыми от R, но однородными функциями от переменной λ со степенью однородностью n. Наконец, фиксируется величина n, а лагранжиан проектируется на конус $R = 0$ (можно показать, что эта процедура непротиворечива и не приводит к появлению сингулярных слагаемых). Главный итог заключается в том, что после проведения всех этих процедур, в четырехмерном лагранжиане вместо духов появляются нераспространяющиеся поля, с нулевыми кинетическими членами. Разумеется, это верно только на массовой оболочке: первые квантовые поправки восстанавливают ''фантомы", но их вклад существенен лишь на малых расстояниях, например, на планковских, если речь идет о лагранжиане содержащем гравитацию, т.е. в области гипотетической пены Уилера, где нарушение унитарности интерпретируется, как нарушение причинности. В качестве простейшего примера можно рассмотреть уравнения Максвелла в пространстве $R_{D,2}$, с лагранжианом $-(1/4)F_{AB}F^{AB}$. Как показано в [12] в результате редукции остается одно векторное поле с максвелловским лагранжианом и два нераспространяющихся скалярных поля.

Таким образом, идея состоит в использовании не просто двумерной конформной теории поля, а теории интегрируемых иерархий для реализации соответствия dS/CFT, причем dS оказывается дуально СУЯМ (без гравитации), но только более высокой размерности, в отличие от AdS/CFT.

Заключение

Первое очевидное затруднение в применении этих идей, заключается в том, что метод размерной редукции Филановского уменьшает за шаг размерность на два, причем речь идет о пространственной и временной переменной, а нам необходимо, чтобы это были две временные переменные. Это означает, что описанный метод необходимо модифицировать. В частности, перед введением новых переменных и редукцией на конус следует выполнить виковский поворот по одной из временных переменных. Модифицированный таким образом метод Филановского будет описан в отдельной работе. Отметим только, что непосредственное применение метода Филановского к самодуальной модели в (3+3) по видимому приводит к моделям (2+2), что может оказаться интересным в теории интегрируемых иерархий, поскольку позволит установить (возможно) новые связи между (1+2) и (1+1) интегрируемыми иерархиями. Этот вопрос также будет изучен в отдельной работе.

Вторая проблема в реализации описанной выше идеи заключается в том, что число интегрируемых иерархий вообще говоря бесконечно, количество же dS вакуумов — наоборот, конечно. Это означает, что описанная кодировка ландшафта интегрируемыми иерархиями теоретически осуществима, если существуют нетривиальные связи, позволяющие унифицировать большую часть интегрируемых моделей. Вопрос об унификации интегрируемых иерархий уже ставился в ряде работ (см. например [13], [14]), где использовался формализм одевающих цепочек дискретных симметрий. В частности, на этом пути удается показать, что уравнения КдФ, мКдФ, гиперболическое и эллиптическое уравнения Каладжеро - Дегаспериса, по сути являются аналогом уравнений Максвелла записанных в различных калибровках [13]. Более того, если строить не высшие, а низшие иерархии КдФ, то в этом списке оказывается и уравнение синус-Гордон. Другим примером является нетривиальная связь между НУШ и уравнением цепочки Тоды, реализуемая через симметрию Шлезингера [14]. Заметим, что НУШ, является первым уравнением в иерархии Абловица-Каупа-Ньюелла-Сегюра (AKNS):

$$\begin{cases} i\psi_{t_1} + \psi_{xx} - 2\psi^2\phi = 0, \\ -i\phi_{t_1} + \phi_{xx} - 2\phi^2\psi = 0, \end{cases}$$

тогда как вторым уравнением оказывается модифицированное уравнение КдФ:

$$\begin{cases} \psi_{t_2} + \psi_{xxx} - 6\psi\phi\psi_x = 0, \\ \phi_{t_2} + \phi_{xxx} - 6\psi\phi\phi_x = 0, \end{cases}$$

а третьим – расщепленное уравнение Лакшманана - Фортескью - Даниела.

$$\begin{cases} i\psi_{t_3} - \psi_{xxxx} + 8\psi\phi\psi_{xx} + 2\psi^2\phi_{xx} + 6\psi_x^2\phi + 4\psi\psi_x\phi_x - 6\psi^3\phi^2 = 0, \\ -i\phi_{t_3} - \phi_{xxxx} + 8\psi\phi\phi_{xx} + 2\phi^2\psi_{xx} + 6\psi\phi_x^2 + 4\phi\psi_x\phi_x - 6\psi^2\phi^3 = 0. \end{cases}$$

Легко убедиться, что все эти уравнения инвариантны относительно преобразования Шлезингера, причем если, скажем в системе НУШ обозначить $2\psi\phi \equiv u$, то мы получаем два сопряженных линейных нестационарных уравнения Шредингера, которые генерят всю иерархию КП. Можно показать, что вся теория иерархии уравнений КП эквивалентна теории иерархии АКНС, что будет строго показано в отдельной публикации.

Список литературы

1. Maldacena J.M. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 1998, vol. 2, pp. 231–252; *Int. J. Theor. Phys.*, 1999, vol. 38, pp. 1113–1133 (reprint)

2. Aharony O., Gubser S.S., Maldacena J.M., Ooguri H., Oz Y. Large N field theories, string theory and gravity. *Phys. Rept.*, 2000, vol. 323, pp. 183–386.

3. Dyson L., Kleban M., Susskind L. Disturbing Implications of a Cosmological Constant. *JHEP10*, 2002, 011, pp. 1–20.

4. Goheer1 N., Kleban M., Susskind L. The trouble with de Sitter space. *JHEP07*, 2003, 056, pp. 1–13.

5. Kachru S., Kallosh R., Linde A., Trivedi S.P. de Sitter vacua in string theory. *Phys. Rev. D*, 2003, vol. 68, 046005, pp. 1–10.

6. Freivogel B., Sekino Y., Susskind L., Chen-Pin Yeh C.-P. A Holographic Framework for Eternal Inflation. *Phys. Rev. D*, 2006, vol. 74, 086003, pp. 1–24.

7. Coleman S. R., De Luccia F. Gravitational Effects On And Of Vacuum Decay. *Phys. Rev. D*, 1980, vol. 21, pp. 3305–3315.

8. Freivogel B., Susskind L. A Framework for the Landscape. *Phys. Rev. D*, 2004, vol. 70, 126007, pp. 1–22.

9. Brunelli J.C., Das A. Davey-Stewartson Equation from a Zero Curvature and a Self-Duality Condition. *Mod. Phys. Lett. A*, 1994, vol. 9, pp. 1267–1272.

10. Das A., Sezgin E., Khviengia Z. Self-Duality in 3+3 Dimensions and the KP Equation. *Phys. Lett. B*, 1992, vol. 289, pp. 347–353.

11. Das A., Huang W.-J., Roy S. The zero curvature formulation of the Boussinesq equation. *Physics Letters A*, 1991, vol. 153, pp. 186–190.

12. Филановский И.А. Обобщенная размерная редукция и конформная суперсимметрия. *Вестник Ленинградского университета*. 1983. № 10, С. 5–11.

13. Борисов А.Б., Зыков С.А. Одевающая цепочка дискретных симметрий и размножение нелинейных уравнений. *ТМФ*. 1998. Т.115. № 2. С. 199-214

14. Yurov A.V. Discrete symmetry's chains and links between integrable equations. *Journal of Mathematical Physics*, 2003, vol. 44, no. 3, pp. 1183–1201.

References

1. Maldacena J.M. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 1998, vol. 2, pp. 231–252; *Int. J. Theor. Phys.*, 1999, vol. 38, pp. 1113–1133 (reprint)

2. Aharony O., Gubser S.S., Maldacena J.M., Ooguri H., Oz Y. Large N field theories, string theory and gravity. *Phys. Rept.*, 2000, vol. 323, pp. 183–386.

3. Dyson L., Kleban M., Susskind L. Disturbing Implications of a Cosmological Constant. *JHEP10*, 2002, 011, pp. 1–20.

4. Goheer1 N., Kleban M., Susskind L. The trouble with de Sitter space. *JHEP07*, 2003, 056, pp. 1–13.

5. Kachru S., Kallosh R., Linde A., Trivedi S.P. de Sitter vacua in string theory. *Phys. Rev. D*, 2003, vol. 68, 046005, pp. 1–10.

6. Freivogel B., Sekino Y., Susskind L., Chen-Pin Yeh C.-P. A Holographic Framework for Eternal Inflation. *Phys. Rev. D*, 2006, vol. 74, 086003, pp. 1–24.

7. Coleman S. R., De Luccia F. Gravitational Effects On And Of Vacuum Decay. *Phys. Rev. D*, 1980, vol. 21, pp. 3305–3315.

8. Freivogel B., Susskind L. A Framework for the Landscape. *Phys. Rev. D*, 2004, vol. 70, 126007, pp. 1–22.

9. Brunelli J.C., Das A. Davey-Stewartson Equation from a Zero Curvature and a Self-Duality Condition. *Mod. Phys. Lett. A*, 1994, vol. 9, pp. 1267–1272.

10. Das A., Sezgin E., Khviengia Z. Self-Duality in 3+3 Dimensions and the KP Equation. *Phys. Lett. B*, 1992, vol. 289, pp. 347–353.

11. Das A., Huang W.-J., Roy S. The zero curvature formulation of the Boussinesq equation. *Physics Letters A*, 1991, vol. 153, pp. 186–190.

12. Filanovsky I.A. Generalized dimensional reduction and conformal supersymmetry. *Bulletin of Leningrad University*, 1983, no. 10, pp. 5–11. (in Russian)

13. Borisov A.B., Zykov S.A. The dressing chain of discrete symmetries and proliferation of nonlinear equations. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1998, vol. 115, pp. 530–541. (in Russian)

14. Yurov A.V. Discrete symmetry's chains and links between integrable equations. *Journal of Mathematical Physics*, 2003, vol. 44, no. 3, pp. 1183–1201.

Авторы

Юрова Алла Александровна, к.ф.-м.н., доцент, Калининградский государственный технический университет, Советский пр, д. 1, г. Калининград, 236000, Россия; доцент, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, ул. Ал. Невского, д. 14, г. Калининград, 236041, Россия.
E-mail: AIUrova@kantiana.ru

Юров Артем Валерианович, д.ф.-м.н., профессор, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, ул. Ал. Невского, д. 14, г. Калининград, 236041, Россия.
E-mail: AIUrov@kantiana.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Юрова А. А., Юров А. В. Голографическая дуальность и интегрируемость. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2024. № 1. С. 126–131.

Authors

Yurova Alla Aleksandrovna, Ph.D., Associate Professor, Kaliningrad State Technical University, Sovitsky prospekt, 1, Kaliningrad, 236000, Russia; Associate Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Nevskogo st., 14, Kaliningrad, 236041, Russia.
E-mail: AIUrova@kantiana.ru

Yurov Artyom Valerianovich, Ph.D., Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Nevskogo st., 14, Kaliningrad, 236041, Russia.
E-mail: AIUrov@kantiana.ru

Please cite this article in English as:

Yurova A. A., Yurov A. V. Holographic duality and integrability. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2024, no. 1, pp. 126–131.