УДК 537.1, 537.8

ДВУХЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ*

Кинзибаев Р. И.[a,1], Грошев Д. Е.[a,2]

[a] Казанский Федеральный Университет, г. Казань, 420008, Россия.

Предложена и исследована новая модель нелинейной электродинамики с тремя параметрами. Показано, что при наличии внешнего постоянного магнитного поля имеет место явление вакуумного двулучепреломления. Рассчитаны показатели преломления для двух поляризаций электромагнитных волн, параллельной и перпендикулярной индукции магнитного поля. Рассчитан тензор энергии-импульса. Получены связи между параметрами модели, гарантирующие выполнение условий причинности и унитарности. Показано, что в предложенной модели нарушена дуальная симметрия.

Ключевые слова: Нелинейная электродинамика, Двойное лучепреломление в вакууме, Условия причинности и унитарности.

DOUBLE-EXPONENTIAL MODEL OF NONLINEAR ELECTRODYNAMICS

Kinzibaev R. I.[a,1], Groshev D. E.[a,2]

[a] Kazan Federal University, Kazan, 420008, Russia.

A new model of nonlinear electrodynamics with three parameters is suggested and investigated. It is shown what if the external constant magnetic field is present the phenomenon of vacuum birefringence takes place. The indices of refraction for two polarizations of electromagnetic waves, parallel and perpendicular to the magnetic induction field are calculated. The energy-momentum tensor is calculated. The relations between model parameters which guarantee fulfilment of causality and unitarity conditions are obtained. We demonstrate that dual symmetry is broken in the model suggested.

Keywords: Nonlinear electrodynamics, Vacuum birefringence, causality and unitarity conditions.

PACS: 03.50.Kk, 41.20.Cv
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2024.1.136-141

Введение

Существует несколько способов модификации стандартной, максвеловской электродинамической теории. К примеру, аксионные [1] и дилатоные [2] ее расширения.

Нелинейная электродинамика (НЛЭД) является одним из таких способов. Она находит множество практических применений в различных областях физики: космологии и астрофизике [3], квантовой электродинамике [4], физике плазмы [5], физике конденсированного состояния [6], ядерной физике [7] и других.

Наиболее популярными моделями нелинейной электродинамики является модель Борна-Инфельда [8], основанная на симметрии лагранжиана, и модель Гейзенберга-Эйлера [9], которая вытекает из расчета однопетлевых поправок в квантовой электродинамике.

*Работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (Грант № 20-52-05009).

[1]E-mail: travelerintime2@gmail.com
[2]E-mail: groshevdmitri@mail.ru

На сегодняшний день «зоопарк» нелинейных электродинамических теорий весьма обширен, в него входят арксинус-электродинамика [10], «ModMax» электродинамика [11], кубическая [12], дробно-линейная [13] и многие другие.

В представленной работе исследуется новая модель нелинейной электродинамики, а именно двухэкспоненциальная. В рамках этой теории рассмотрены вопросы, касающиеся уравнений Максвелла, вакуумного двойного лучепреломления, условий причинности и унитарности. В работе используется метрика Минковского с сигнатурой $(+)$. Латинские и греческие индексы пробегают значения от 0 до 3.

1. Рассматриваемая модель

В данной работе мы вводим новую модель нелинейной электродинамики, названную нами «двухэкспоненциальной». Она задается лагранжианом следующего вида:

$$\Lambda = -\mathcal{F} e^{\lambda_1 \mathcal{F}} + \gamma \left(e^{\lambda_2 \mathcal{G}^2} - 1 \right) . \tag{1}$$

Здесь $\mathcal{F} = \frac{1}{4} F_{ik} F^{ik} = \frac{1}{2} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)$, $\quad \mathcal{G} = \frac{1}{4} F_{ik} F^{*ik} = -\mathbf{EB}$ – инварианты электромагнитного поля, γ – безразмерный параметр, λ_1 – параметр размерности Дж$^{-1}$ λ_2 – параметр размерности Дж$^{-2}$. (Величины $\lambda_1 \mathcal{F}$ и $\lambda_2 \mathcal{G}^2$ должны быть безразмерными). Вторая пара уравнений Максвелла в общем случае лагранжиана $\Lambda = \Lambda(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ задается следующим образом (свободные заряды и токи в системе отсутствуют):

$$\partial_j \left(\Lambda_{\mathcal{F}} F^{kj} + \Lambda_{\mathcal{G}} F^{*kj} \right) = 0 \, . \tag{2}$$

Подставляя в это выражение лагранжиан (1), мы получаем

$$\partial_j \left(- \left(1 + \lambda_1 \mathcal{F} \right) e^{\lambda_1 \mathcal{F}} F^{kj} + 2\gamma \lambda_2 \mathcal{G} e^{\lambda_2 \mathcal{G}^2} F^{*kj} \right) = 0 \, . \tag{3}$$

Очевидно, что первая пара уравнений Максвелла не претерпевает изменений:

$$\partial_j F^{*kj} = 0 \, . \tag{4}$$

Выражение для вектора электрической индукции в случае лагранжиана общего вида легко может быть найдено из формулы $\mathbf{D} = \partial \mathcal{L} / \partial \mathbf{E}$:

$$\mathbf{D} = \Lambda_{\mathcal{F}} \left(-\mathbf{E} \right) + \Lambda_{\mathcal{G}} \left(-\mathbf{B} \right) = \Lambda_{\mathcal{F}} \left(-\mathbf{E} \right) + 2 \, \Lambda_{\mathcal{G}^2} \left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \right) \mathbf{B} \, . \tag{5}$$

В частном же случае рассматриваемого лагранжиана мы приходим к выражению

$$\mathbf{D} = \left(1 + \lambda_1 \mathcal{F} \right) e^{\lambda_1 \mathcal{F}} \mathbf{E} + 2\gamma \lambda_2 e^{\lambda_2 \mathcal{G}^2} \left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \right) \, \mathbf{B} \, . \tag{6}$$

Вектор напряженности магнитного поля задается выражением $\mathbf{H} = -\partial \mathcal{L} / \partial \mathbf{B}$:

$$\mathbf{H} = \Lambda_{\mathcal{F}} \left(-\mathbf{B} \right) + \Lambda_{\mathcal{G}} \left(\mathbf{E} \right) = \Lambda_{\mathcal{F}} \left(-\mathbf{B} \right) - 2 \, \Lambda_{\mathcal{G}^2} \left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \right) \mathbf{E} \, ; \tag{7}$$

или, в частном случае,

$$\mathbf{H} = \left(1 + \lambda_1 \mathcal{F} \right) e^{\lambda_1 \mathcal{F}} \mathbf{B} - \gamma \lambda_2 e^{\lambda_2 \mathcal{G}^2} \left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \right) \mathbf{E} \, . \tag{8}$$

Уравнения (6) и (8) могут быть представлены в тензорной форме:

$$D^j = \varepsilon^j{}_i E^i, \quad B^j = \mu^j{}_i H^i \quad H^j = \left(\mu^{-1} \right)^j{}_i B^i \, . \tag{9}$$

где ϵ_{ij} и μ_{ij} – тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости соответственно. Компоненты этих тензоров выглядят следующим образом:

$$\varepsilon^j{}_i = \left(1 + \lambda_1 \mathcal{F} \right) e^{\lambda_1 \mathcal{F}} \delta^j{}_i + 2 \lambda_2 e^{\lambda_2 \mathcal{G}^2} B^j B_i \, , \tag{10}$$

$$\left(\mu^{-1} \right)^j{}_i = \left(1 + \lambda_1 \mathcal{F} \right) e^{\lambda_1 \mathcal{F}} \delta^j{}_i - 2\gamma \lambda_2 e^{\lambda_2 \mathcal{G}^2} E^j E_i \, . \tag{11}$$

1.1. Дуальная симметрия

Подставляя (6) и (8) в условие дуальной симметрии теории **DH** = **EB** [14], мы получаем следующие соотношения:

$$\left(\Lambda_{\mathcal{G}}^2 - \Lambda_{\mathcal{F}}^2 + 1\right)\mathcal{G} + 2\Lambda_{\mathcal{F}}\Lambda_{\mathcal{G}}\mathcal{F} = 0\,, \tag{12}$$

$$\left(\left(2\gamma\lambda_2\mathcal{G}e^{\lambda_2\mathcal{G}^2}\right)^2 - \left(-\left(1+\lambda_1\mathcal{F}\right)e^{\lambda_1\mathcal{F}}\right)^2 + 1\right)\mathcal{G} + \,-4\gamma\lambda_2\mathcal{F}\mathcal{G}\left(1+\lambda_1\mathcal{F}\right)e^{\lambda_1\mathcal{F}+\lambda_2\mathcal{G}^2} = 0\,. \tag{13}$$

Очевидно, что данное условие выполняется только при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, т.е. оно невыполнимо для рассматриваемой нами теории.

2. Вакуумное двойное лучепреломление

Явление двойного лучепреломления в вакууме является почти гарантированным индикатором того, что электродинамические процессы в рассматриваемой системе являются нелинейными. Поэтому рассмотрение возможности этого феномена в рамках нашей теории вызывает повышенный интерес.

Пусть имеется внешнее постоянное магнитное поле, направленное вдоль оси OX

$$B_0{}^j = B_0\delta_1^j, \qquad B_0 = const \tag{14}$$

и плоская электромагнитная волна

$$\mathrm{e}^j = \mathrm{e}_0 e^{-i(\omega t - kz)}\delta_p^j, \quad \mathrm{b}^j = \mathrm{b}_0 e^{-i(\omega t - kz)}\delta_q^j, \quad \left|\frac{\mathrm{e}_0}{B_0}\right| \ll 1, \quad \left|\frac{\mathrm{b}_0}{B_0}\right| \ll 1\,, \tag{15}$$

Которая распространяется вдоль оси OZ. Здесь $p+q=3$, $p\in\{1,2\}$; p,q – координатные индексы в плоскости OXY. Таким образом, электрическое и магнитное поля в системе задаются выражениями

$$E^j = \mathrm{e}^j, \quad B^j = B_0{}^j + \mathrm{b}^j\,, \tag{16}$$

$$\mathcal{F} = \frac{B_0^2}{2} + \frac{b_0^2 - e_0^2}{2}e^{-2i(\omega t - kz)} + \delta_q^1 B_0 b_0 e^{-i(\omega t - kz)} \approx \frac{B_0^2}{2}\,, \tag{17}$$

$$\mathcal{G} = \delta_p^1 B_0 e_0 e^{-i(\omega t - kz)} \approx 0, \quad |\mathcal{G}| \ll |\mathcal{F}|\,. \tag{18}$$

В общем случае тензоры диэлектрической проницаемости и обратный тензор магнитной проницаемости имеют следующий вид:

$$\varepsilon^j{}_i = -\Lambda_{\mathcal{F}}\delta^j{}_i + 2\Lambda_{\mathcal{G}^2}B^jB_i \approx -\widetilde{\Lambda}_{\mathcal{F}}\delta^j{}_i + 2\widetilde{\Lambda}_{\mathcal{G}^2}B_0^2\delta_1^j\delta_i^1\,, \tag{19}$$

$$\left(\mu^{-1}\right)^j{}_i = -\Lambda_{\mathcal{F}}\delta^j{}_i - 2\Lambda_{\mathcal{G}^2}E^jE_i \approx -\widetilde{\Lambda}_{\mathcal{F}}\delta^j{}_i, \quad \left|\widetilde{\Lambda}_{\mathcal{F}}\right| \gg \left|\widetilde{\Lambda}_{\mathcal{G}^2}\right| e_0^2\,. \tag{20}$$

Тогда мы можем полагать что $\mu^j{}_i \approx -\left(\widetilde{\Lambda}_{\mathcal{F}}\right)^{-1}\delta^j{}_i$. (Здесь и далее применяются обозначения $\widetilde{\Lambda}_{\mathcal{F}} = \Lambda_{\mathcal{F}}\Big|_{\mathcal{F}=\frac{1}{2}B_0^2,\ \mathcal{G}=0}$ and $\widetilde{\Lambda}_{\mathcal{G}^2} = \Lambda_{\mathcal{G}^2}\Big|_{\mathcal{F}=\frac{1}{2}B_0^2,\ \mathcal{G}=0}$). Из уравнений Максвелла (3) легко можно получить линеаризованное волновое уравнение:

$$\varepsilon_{j\alpha}\mu_{ik}\frac{1}{c^2}\partial_t^2 E^\alpha + e_{\gamma kj}e_{\beta\alpha i}\partial^\gamma\partial^\beta E^\alpha = 0\,. \tag{21}$$

После подстановки в него выражения для E^j из (21) получаем (координата «z» соответствует индексу «3»):

$$\varepsilon_{j\alpha}\,\mu_{ik}\,\frac{\omega^2}{c^2}\,\delta_p^\alpha \,+\, e_{\gamma kj}\,e_{\beta\alpha i}\,k^2\,\delta_3^\gamma\,\delta_3^\beta\delta_p^\alpha = 0\,. \tag{22}$$

После суммирования, умножения уравнения на c^2/k^2 и подстановки $v^2 = \omega^2/k^2$ уравнение приводится к следующему виду:

$$\varepsilon_{j\alpha}\,\mu_{ik}\,v^2 \,+\, e_{\gamma kj}\,e_{\beta\alpha i}\,c^2 = 0\,. \tag{23}$$

Подставляя в это уравнение $p = 1$ ($i = 2$, $k = 2$, $j = 1$) и (19),(20), мы получаем следующее выражение для показателя преломления $n_{\|}$:

$$n_{\|}^2 v^2 = c^2, \quad n_{\|} = \sqrt{1 - \frac{2\widetilde{\Lambda}_{\mathcal{G}^2} B_0^2}{\widetilde{\Lambda}_{\mathcal{F}}}} = \sqrt{1 - \frac{2\gamma_2 \lambda_2 B_0^2}{\gamma_1 (1 + \lambda_1 \mathcal{F})} e^{\lambda_2 \mathcal{G}^2 - \lambda_1 \mathcal{F}}}\,. \tag{24}$$

Аналогичным образом, при $p = 2$ мы получим:

$$n_{\perp}^2 v^2 = c^2, \quad n_{\perp} = 1\,. \tag{25}$$

Таким образом, мы доказали, что фазовая скорость волны зависит от её поляризации, т.е. в этой модели нелинейной электродинамики существует эффект вакуумного двойного лучепреломления при наличии внешнего магнитного поля.

3. Тензор энергии-импульса

Для того чтобы вычислить компоненты тензора энергии-импульса, воспользуемся стандартным выражением:

$$T_{pq} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial g^{pq}} \sqrt{-g} \Lambda\,. \tag{26}$$

В общем виде, лагранжиан есть функция от $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, ТЭИ определяется как

$$T_{pq} = \Lambda_{\mathcal{F}} F_{pk} F_q{}^k + \Lambda_{\mathcal{G}} F_{pk} \overset{*}{F}_q{}^k - \Lambda g_{pq}\,. \tag{27}$$

В случае двухэкспотенциальной электродинамики это уравнение принимает следующий вид:

$$T_{pq} = -(1 + \lambda_1 \mathcal{F})\, e^{\lambda_1 \mathcal{F}} F_{pk} F_q{}^k + 2\gamma \lambda_2 \mathcal{G} e^{\lambda_2 \mathcal{G}^2} F_{pk} \overset{*}{F}_q{}^k - g^{pq} \left(\gamma_1 \mathcal{F} e^{\lambda_1 \mathcal{F}} + \gamma_2 \left(e^{\lambda_2 \mathcal{G}^2} - 1 \right) \right)\,. \tag{28}$$

След тензора энергии-импульса (27) задается формулой:

$$T = T_q^q = 4\,(\Lambda_{\mathcal{F}} \mathcal{F} + \Lambda_{\mathcal{G}} \mathcal{G} - \Lambda) \tag{29}$$

или, в нашем случае,

$$T = 4 \left(-\lambda_1 \mathcal{F}^2 e^{\lambda_1 \mathcal{F}} + \gamma \left(\lambda_2 \mathcal{G}^2 - 1 \right) e^{\lambda_2 \mathcal{G}^2} + \gamma \right)\,. \tag{30}$$

Итак след T может равняться нулю только в случае $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Другими словами, двухэкспоненциальная модель нелинейной электродинамики не относится к классу бесследовых или конформных теорий нелинейной электродинамики.

4. Условия причинности и унитарности

Удовлетворение условиям причинности и унитарности является существенным фактором в пользу физической обоснованности данной теории электродинамики. Следуя [15], можно найти соотношения между параметрами рассматриваемой нами модели, при которых она удовлетворяет условиям причинности и унитарности:

$$\Lambda_{\mathcal{F}} \leqslant 0, \quad \Lambda_{\mathcal{F}\mathcal{F}} \geqslant 0, \quad \Lambda_{\mathcal{F}} + 2\mathcal{F}\Lambda_{\mathcal{F}\mathcal{F}} \leqslant 0 \quad \Lambda_{\mathcal{G}\mathcal{G}} \geqslant 0, \quad 2\mathcal{F}\Lambda_{\mathcal{G}\mathcal{G}} - \Lambda_{\mathcal{F}} \geqslant 0\,. \tag{31}$$

Из первых трех уравнений мы можем получить

$$\Lambda_{\mathcal{F}} \leqslant 0\,, \quad 1 + \lambda_1 \mathcal{F} \geqslant 0\,, \quad \Lambda_{\mathcal{F}\mathcal{F}} \geqslant 0\,, \quad \lambda_1 (2 + \lambda_1 \mathcal{F}) \leqslant 0\,, \quad \Lambda_{\mathcal{F}} + 2\mathcal{F}\Lambda_{\mathcal{F}\mathcal{F}} \leqslant 0\,, \quad 1 + 5\lambda_1 \mathcal{F} + 2\,(\lambda_1 \mathcal{F})^2 \geqslant 0 \tag{32}$$

Если $\lambda_1 \geqslant 0$ то первые два условия в (32) не выполняются одновременно. Если $\lambda_1 \leqslant 0$, то можно вывести следующее условие:

$$\mathcal{F} \leqslant \frac{5 - \sqrt{17}}{4\,|\lambda_1|} \approx \frac{0.219}{|\lambda_1|}\,. \tag{33}$$

Четвертое и пятое условие в (31) приводят к следующим соотношениям:

$$\gamma\lambda_2\left(1+2\lambda_2\mathcal{G}^2\right)\geqslant 0\,,\quad 4\gamma\lambda_2\mathcal{F}\left(1+2\lambda_2\mathcal{G}^2\right)e^{\lambda_2\mathcal{G}^2}+\left(1+\lambda_1\mathcal{F}\right)e^{\lambda_1\mathcal{F}}\geqslant 0\,. \tag{34}$$

При этом, первое неравенство в (34) позволяет получить два альтернативных набора условий:

$$\gamma\geqslant 0\,,\lambda_2\geqslant 0\,,\mathcal{G}\text{ – неограниченно} \tag{35}$$

или

$$\gamma\leqslant 0\,,\quad \lambda_2\leqslant 0\,,\quad \mathcal{G}^2\leqslant\frac{1}{2\left|\lambda_2\right|}\,. \tag{36}$$

Следовательно, мы нашли соотношения между модельными параметрами и значениями инвариантов поля, которые гарантируют выполнение условий причинности и унитарности.

Заключение

Нами была введена новая, *«двухэкспоненциальная»* модель нелинейной электродинамики, которая обладает тремя параметрами: размерными λ_1, λ_2 и безразмерным γ. В этой работе были найдены полевые уравнения, а также выражения для тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей. Нами показано, что дуальная симметрия в данной теории не выполняется при ненулевых значениях ее параметров. К тому же, нами исследована возможность наличия явления вакуумного двойного лучепреломления, вычислено выражение для компонент тензора энергии-импульса и найден набор соотношений между модельными параметрами, гарантирующий выполнения условий причинности и унитарности.

Список литературы/References

1. Weinberg S. A new light boson? *Phys. Rev. Lett.*, 1978, 40, pp. 223–226.

2. Balakin A.B., Galimova A.A. Towards nonlinear axion-dilaton electrodynamics: How can axionic dark matter mimic dilaton-photon interactions? *Phys. Rev. D.*, 2021, 104, 044059.

3. Corda C., Mosquera Cuesta H.J. Inflation from R2 gravity: A new approach using nonlinear electrodynamics. *Astropart. Phys.*, 2011, 34, pp. 587–590.

4. Agarwal G.S., Ke Di, Liyong Wang and Yifu Zhu. Perfect photon absorption in the nonlinear regime of cavity quantum electrodynamics. *Phys.Rev. A*, 2016, 93, 063805.

5. Lundin J., Brodin G. and Marklund M. Short wavelength quantum electrodynamical correction to cold plasma-wave propagation. *Phys. Plasmas*, 2006, 13, 102102.

6. Mikhailov S.A. Quantum theory of the third-order nonlinear electrodynamic effects of graphene. *Phys.Rev. B*, 2016, 93, 085403.

7. Akamatsu Y., Yamamoto N. Chiral Plasma Instabilities. *Phys. Rev. Lett.*, 2013, 111, 052002.

8. Born M., Infeld L. Foundations of the new field theory. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 1934, 144, pp. 425–451.

9. Heisenber W., Euler H. Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons. *Z. Physik*, 1936, 98, pp. 714–732.

10. Kruglov S.I. Nonlinear arcsin-electrodynamics *Ann. Phys. (Berlin)*, 2015, 527, pp. 397–401.

11. Kruglov S.I. On generalized ModMax model of nonlinear electrodynamics. *Phys.Lett. B*, 2021, 822, 136633.

12. Kruglov S.I. Effective Lagrangian at cubic order in electromagnetic fields and vacuum birefringence. *Phys.Lett.B.*, 2007, 652, pp. 146–149.

13. Kruglov S.I. A model of nonlinear electrodynamics. *Ann. of Phys.*, 2015, 353, pp. 299–306.

14. Gibbons G.W., Rasheed D. Electric-magnetic duality rotations in non-linear electrodynamics. *Nucl.Phys. B*, 1995, 454, pp. 185–206.

15. Shabad A.E., Usov V.V. Effective Lagrangian in nonlinear electrodynamics and its properties of causality and unitarity. *Phys.Rev. D*, 2011, 83, 105006.

Авторы

Кинзибаев Руслан Ильвирович, студент, Казанский Федеральный Университет, ул. Кремлевская, д. 16 а, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: travelerintime2@gmail.com

Грошев Дмитрий Евгеньевич, к.ф.-м.н., доцент, Казанский Федеральный Университет, ул. Кремлевская, д. 16а, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: groshevdmitri@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Кинзибаев Р. И., Грошев Д. Е. Двухэкспоненциальная модель нелинейной электродинамики. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2024. № 1. С. 136–141.

Authors

Kinzibaev Ruslan Ilvirovitch, student, Kazan Federal University, Kremlevskaya str., 16a, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: travelerintime2@gmail.com

Groshev Dmitry Evgenevich, Ph.D, Associate Professor, Kazan Federal University, Kremlevskaya str., 16a, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: groshevdmitri@mail.ru

Please cite this article in English as:
Kinzibaev R. I., Groshev D. E. Double-exponential model of nonlinear electrodynamics. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2024, no. 1, pp. 136–141.