

УДК 530.122

© Кашаргин П. Е., Лебедев А. А., Сушков С. В., 2024

**НЕЙТРОННЫЕ ЗВЕЗДЫ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ С НЕМИНИМАЛЬНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ СВЯЗЬЮ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ И КРИВИЗНЫ С РЕАЛИСТИЧНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА**Кашаргин П. Е.<sup>a,1</sup>, Лебедев А. А.<sup>a,2</sup>, Сушков С. В.<sup>a,3</sup><sup>a</sup> Казанский федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия.

Нейтронные звёзды исследовались в различных модифицированных теориях гравитации. Цель данной работы – исследование конфигураций нейтронных звёзд в рамках теории гравитации с неминимальной кинетической связью скалярного поля и кривизны. В качестве уравнения состояния вещества было использовано не только модельное политропное уравнение, но и реалистичные уравнения состояния, относящиеся к подклассу BSk. Были изучены параметры звезд, в том числе получены диаграммы «масса-радиус» для различных значений параметра неминимальной связи  $\ell$ .

*Ключевые слова:* нейтронные звезды, теория гравитации с неминимальной кинетической связью скалярного поля и кривизны.

**NEUTRON STARS IN THE THEORY OF GRAVITY WITH NONMINIMAL DERIVATIVE COUPLING WITH REALISTIC EQUATION OF STATE**Kashargin P. E.<sup>a,1</sup>, Lebedev A. A.<sup>a,2</sup>, Sushkov S. V.<sup>a,3</sup><sup>a</sup> Kazan Federal University, Kazan, 420008, Russia.

Neutron stars have been studied in various modified theories of gravity. The purpose of this work is to study the internal configurations of neutron stars in the theory of gravity with nonminimal derivative coupling of the scalar field and the curvature, with a cosmological constant and with realistic equation of state. In this paper we use realistic equations of state for the stellar matter belonging to the BSk family of equations of state. We construct neutron star configurations in this model. Mass-radius diagrams were obtained for various values of the non-minimal coupling parameter  $\ell$ .

*Keywords:* neutron stars, theory of gravity with nonminimal derivative coupling.

PACS: 04.40

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2024.1.72-77

**Введение**

Теория гравитации Хорндески – скалярно-тензорная теория гравитации наиболее общего вида, уравнения движения которой являются дифференциальными уравнениями второго порядка [1]. Одним из подклассов этой теории является так называемая теория гравитации с неминимальной кинетической связью скалярного поля и кривизны. Изначально эта модель рассматривалась в связи с различными космологическими сценариями [2]. Следующим шагом в изучении этой модели является рассмотрение звезд и черных дыр, обзор работ по этой теме можно найти в статье [3]. Например, решения, описывающие черные дыры в данной модели, имеют асимптотику анти-де

---

<sup>1</sup>E-mail: pkashargin@mail.ru<sup>2</sup>E-mail: lebedev.aleks2012konnor@yandex.ru<sup>3</sup>E-mail: sergey\_sushkov@mail.ru

Ситтера, так как неминимальная кинетическая связь скалярного поля и тензора Эйнштейна проявляет себя в качестве отрицательной космологической постоянной [4].

Другим классом компактных объектов являются нейтронные звезды. Из наблюдений установлено, что большинство нейтронных звезд имеет массы  $1.2 - 2$  масс Солнца  $M_{sun}$  и радиусы  $9.9 - 11.2$  км, однако имеются данные о более массивных звездах с массами достигающими  $2.7 M_{sun}$ . Плотность в центре такой звезды в несколько раз превышает ядерную  $\rho_n \approx 2.5 \times 10^{14}$  г см $^{-3}$ . Сферически симметричные нейтронные звезды рассматривались в теории гравитации с неминимальной кинетической связью скалярного поля и кривизны в случае, когда действие не содержит кинетический член скалярного поля  $\varepsilon_1 = 0$ , а «голая» космологическая постоянная равна нулю  $\Lambda_0 = 0$  [5]. В дальнейшем этот результат был расширен. В работе [6] были рассмотрены медленно вращающиеся нейтронные звезды с реалистичными уравнениями состояния нейтронного вещества. В работе [7] были рассмотрены сферически симметричные нейтронные звезды в случае ненулевых параметров  $\varepsilon_1$  и  $\Lambda_0$ , а в качестве уравнения состояния было взято простейшее уравнение политропы.

В данной работе мы рассматриваем нейтронные звезды в теории гравитации с неминимальной кинетической связью скалярного поля и кривизны, описываемой действием (1) в случае ненулевых значений параметров  $\varepsilon_{1,2}$ ,  $\ell$  и космологической постоянной  $\Lambda_0$ , материя которых описывается реалистичными уравнениями состояния вещества. В качестве уравнений состояния были использованы аналитические представления унифицированных уравнений состояния холодного ядерного вещества BSk19, BSk20, BSk21 (функционалы Брюссель – Монреаль – Скерми) [8]. В §1 мы кратко рассмотрим теорию гравитации с неминимальной кинетической связью и базовые уравнения. В §2 будут представлены численные результаты. В заключительном разделе будут сделаны выводы.

## 1. Компактные звезды в теории гравитации с неминимальной кинетической связью скалярного поля и кривизны

Теория гравитации с неминимальной кинетической связью скалярного поля и кривизны и космологической постоянной  $\Lambda_0$  описывается действием вида:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2\kappa} (R - 2\Lambda_0) - \frac{1}{2} (\varepsilon_1 g_{\mu\nu} + \varepsilon_2 \ell^2 G_{\mu\nu}) \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \right] + S^{(m)}, \quad (1)$$

где  $R$  и  $G_{\mu\nu}$  – скаляр Риччи и тензор Эйнштейна,  $\kappa = 8\pi G/c^4$  – постоянная Эйнштейна,  $c$  – скорость света,  $\varepsilon_{1,2} = \pm 1$ , параметр  $\ell$  имеет размерность длины,  $\Lambda_0$  так называемая «голая» космологическая постоянная<sup>1</sup>.  $S^{(m)}$  – действие для материи, которое описывает идеальную жидкость с тензором энергии-импульса вида

$$T_{\mu\nu}^{(m)} = (\rho c^2 + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (2)$$

где  $u_\mu$  – 4-вектор скорости, а плотность материи  $\rho$  и давление  $p$  связаны некоторым уравнением состояния. В предыдущей работе [7] в качестве уравнения состояния было рассмотрено простейшее уравнение политропы. В данной работе в качестве уравнений состояния рассмотрены аналитические представления унифицированных уравнений состояния холодного ядерного вещества BSk19, BSk20, BSk21 (функционалы Брюссель – Монреаль – Скерми) [8]:

$$\zeta = \frac{a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^3}{1 + a_4 \xi} f_0(a_5(\xi - a_6)) + (a_7 + a_8 \xi) f_0(a_9(a_6 - \xi)) + (a_{10} + a_{11} \xi) f_0(a_{12}(a_{13} - \xi)) + (a_{14} + a_{15} \xi) f_0(a_{16}(a_{17} - \xi)) + \frac{a_{18}}{1 + a_{19}^2(\xi - a_{20})^2} + \frac{a_{21}}{1 + a_{22}^2(\xi - a_{23})^2}, \quad (3)$$

где  $\xi = \lg(\rho/\text{г см}^{-3})$ ,  $\zeta = \lg(p/\text{дин см}^{-2})$ ,  $f_0(x) = 1/(1+e^x)$ ,  $a_i$  – известные постоянные. Статическая сферически симметричная метрика имеет вид

$$ds^2 = -A(r)c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{B(r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4)$$

<sup>1</sup> Наблюдаемая космологическая постоянная  $\Lambda_{AdS}$  является комбинацией параметра  $\Lambda_0$  и параметра неминимальной кинетической связи  $\ell$  [7].

Скалярное поле  $\phi$ , плотность материи  $\rho$  и давление  $p$  являются функциями радиальной координаты  $r$ . Независимые уравнения гравитационного поля и закон сохранения тензора энергии-импульса имеют вид:

$$\frac{1}{\kappa} \left( -\frac{B'}{r} + \frac{1-B}{r^2} \right) = \rho c^2 + \frac{1}{\kappa} \Lambda_0 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 B \psi^2 - \varepsilon_2 \ell^2 \frac{B \psi^2}{2r^2} \left( 1 + B + 3rB' + 4rB \frac{\psi'}{\psi} \right), \quad (5)$$

$$\frac{1}{\kappa} \left( \frac{BA'}{rA} - \frac{1-B}{r^2} \right) = p - \frac{1}{\kappa} \Lambda_0 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 B \psi^2 - \varepsilon_2 \ell^2 \frac{B \psi^2}{2r^2} \left( 1 - 3B - 3rB \frac{A'}{A} \right), \quad (6)$$

$$\frac{A'}{A} = -\frac{2p'}{\rho c^2 + p}, \quad (7)$$

где штрих означает производную по  $r$  и  $\psi = \phi'$ . Уравнение скалярного поля может быть проинтегрировано и записано в виде

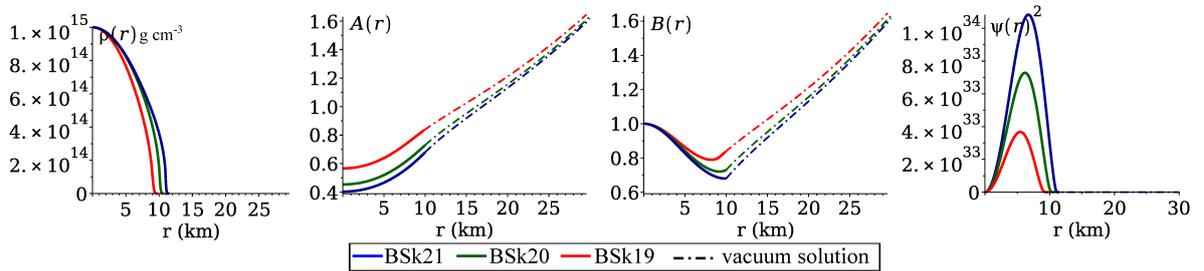
$$\left[ \varepsilon_1 r^2 - \varepsilon_2 \ell^2 \left( 1 - B - rB \frac{A'}{A} \right) \right] \psi \sqrt{AB} = Q, \quad (8)$$

где  $Q$  – постоянная интегрирования. Как было показано [7], для того чтобы избежать сингулярности необходимо потребовать выполнения условий:  $Q = 0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_1/\varepsilon_2 = -1$ , а параметр безразмерной космологической постоянной  $\xi = \Lambda_0 \ell^2$  должен принимать значения в интервале  $-3 < \xi < 1$ . В данной работе представлены результаты для случая  $\xi = -1$ , поскольку в этом случае внешнее вакуумное ( $p = 0$ ,  $\rho = 0$ ) решение имеет простую форму, описываемую метрикой анти-де Ситтера-Шварцшильда:

$$A_{vac}(r) = B_{vac}(r) = 1 - \frac{2MG}{c^2 r} + \frac{|\Lambda_{AdS}|}{3} r^2, \quad \psi_{vac}^2(r) = 0, \quad (9)$$

где  $\Lambda_{AdS} = -1/\ell^2$ , а постоянная интегрирования  $M$  имеет смысл асимптотической массы.

Система уравнений (5)-(8) была решена численно. Граничные условия для метрической функции  $B(r)$  и плотности  $\rho(r)$  имеют вид:  $B(0) = 1$ ,  $\rho(0) = \rho_c$ , где  $\rho_c$  – задаваемое значение плотности материи в центре звезды. Радиус нейтронной звезды  $r = R$  определялся как ноль функции давления, т.е.  $p(R) = 0$ . На границе нейтронной звезды внутреннее решение, полученное численно, должно совпадать с внешним вакуумным решением (9), откуда, из требования непрерывности  $A(R) = A_{vac}(R)$ , определялась асимптотическая масса звезды  $M$ . В результате численного интегрирования получены метрические функции, функция скалярного поля, давление и плотность, а также построены диаграммы «масса-радиус» для различных значений параметра неминимальной связи  $\ell$ .

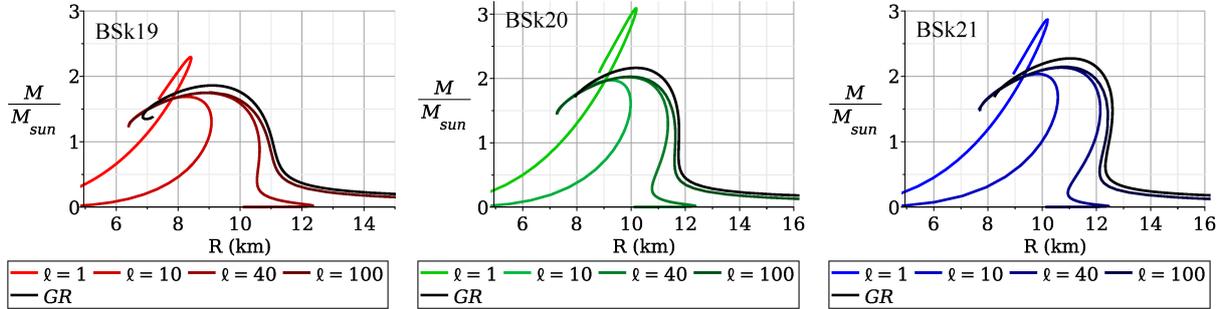


**Рис. 1.** Графики функций  $\rho(r)$ ,  $A(r)$ ,  $B(r)$  и  $\psi^2(r)$  (слева направо) в случае  $\ell = 20$  км, центральной плотности  $\rho_{oc} = 10^{15}$  г/см<sup>3</sup> для трех уравнений состояния вещества BSk19, BSk20 и BSk21.

## 2. Численные результаты

В данном разделе представлены численные результаты. На рис. 1 изображены графики плотности  $\rho(r)$ , метрических функций  $A(r)$ ,  $B(r)$  и скалярного поля  $\psi^2(r)$  для случая  $\ell = 20$  км и центральной плотности  $\rho_c = 10^{15}$  г/см<sup>3</sup> для трех уравнений состояния вещества BSk19, BSk20 и

BSk21. При других значениях параметра  $\ell$  и центральной плотности  $\rho_c$  графики имеют схожий вид. На границе нейтронной звезды  $r = R$  плотность уменьшается до нуля, а графики метрических функций  $A(r)$ ,  $B(r)$  сшиваются с внешним вакуумным решением. Сплошная кривая соответствует внутреннему решению, штрихпунктирная кривая соответствует внешнему вакуумному решению (9). Производная скалярного поля  $\psi(r) = \phi'(r)$  на границе нейтронной звезды обращается в ноль.



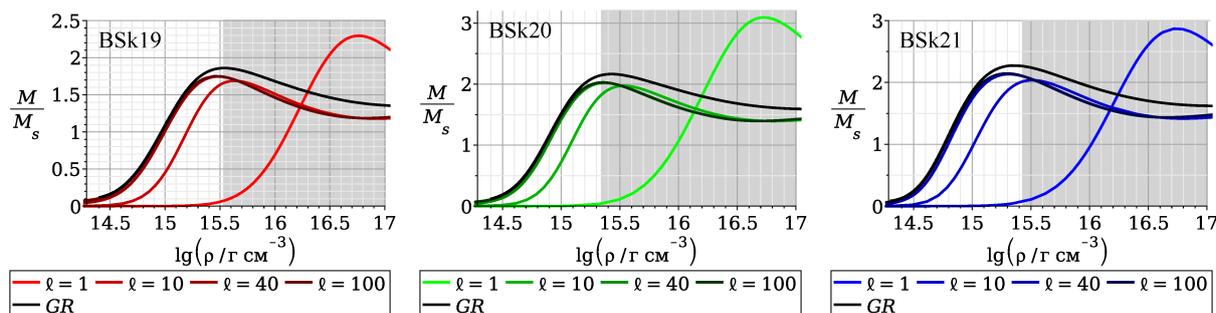
**Рис. 2.** Диаграммы «масса-радиус» в случае  $\ell = 1, 10, 40, 100$  км показаны для трех уравнений состояния вещества BSk19, BSk20 and BSk21 (слева направо). Кривая черного цвета соответствует немодифицированной теории гравитации. По оси ординат отложена асимптотическая масса звезды в единицах масс солнца  $M_{sun}$ .

Более детальное представление о параметрах звезд дает диаграмма «масса-радиус». На рис. 2 представлены диаграммы в случае  $\ell = 1, 10, 40$  и  $100$  км для трех уравнений состояния вещества BSk19, BSk20 и BSk21. Кривая черного цвета соответствует немодифицированной теории гравитации. При увеличении параметра  $\ell$  значения масс и радиусов приближаются к данным, полученным при решении классических уравнений Толмена – Оппенгеймера – Волкова (кривая черного цвета). В отличие от немодифицированной теории гравитации, диаграммы смещены в сторону меньших радиусов и меньших масс. В диапазоне  $20 \text{ км} < \ell < 40 \text{ км}$  меняется наклон кривых диаграммы: при значениях  $\ell < 20 \text{ км}$  масса уменьшается с уменьшением радиуса, что характерно для так называемых странных звезд, а при  $\ell > 40 \text{ км}$ , наоборот, растет. Отметим, что при  $\ell < 5 \text{ км}$  диаграммы меняют характер поведения, и при уменьшении параметра  $\ell$  смещаются в сторону меньших радиусов, но больших масс. Однако, как это будет показано на рис. 3, такие конфигурации соответствуют центральным плотностям в сотни раз превосходящих ядерную плотность, а скорость звука при таких плотностях превышает скорость света для использованных уравнений состояния. Более детально случай малых  $\ell$  будет рассмотрен нами в следующей работе.

Зависимость массы от центральной плотности представлена на рис. 3. Область, отмеченная серым цветом, соответствует значениям центральной плотности  $\rho_c$ , при которых скорость звука  $v^2 = c^2 \left( \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right) \Big|_S$  ( $\epsilon$  – плотность энергии) в центре звезды будет превосходить скорость света, т.е.  $v^2 > c^2$ . В случае  $\ell > 10 \text{ км}$  максимальные значения масс достигаются при плотностях порядка 1-10 ядерных плотностей. При уменьшении параметра  $\ell < 5 \text{ км}$  массы порядка 1-3  $M_{sun}$  соответствуют центральным плотностям в сотни раз превосходящих ядерную, а скорость звука при таких плотностях превышает скорость света.

## Заключение

В данной работе исследованы конфигурации нейтронных звезд в скалярно-тензорной теории гравитации вида (1), относящейся к классу Хорндески. В данной модели нейтронные звезды рассматривались ранее. Однако в работе [5] был рассмотрен частный случай модели  $\epsilon_1 = \Lambda_0 = 0$ . В работе [7] в качестве уравнения состояния нейтронного вещества было взято лишь простейшее уравнение политропы. В настоящей работе построены конфигурации компактных звезд в теории, описываемой действием (1) при  $\epsilon_{1,2} \neq 0$ ,  $\Lambda_0 \neq 0$  с реалистичными уравнениями состояния вещества, относящимися к подклассу BSk.



**Рис. 3.** Зависимость массы звезды от центральной плотности для уравнений состояния BSk19, BSk20 и BSk21 при различных значениях параметра  $\ell = 1, 10, 40$  и  $100$  км. По оси абсцисс отложен десятичный логарифм центральной плотности  $\lg \rho(0)$ . Сплошная кривая черного цвета соответствует немодифицированной теории гравитации. Область, закрашенная серым цветом, соответствует значениям центральной плотности, при которых скорость звука в среде превосходит скорость света для данного уравнения состояния.

В работе изучены параметры звезд, в том числе получены диаграммы «масса-радиус» для различных значений параметра неминимальной связи  $\ell$ . Было показано, что они кардинальным образом отличаются не только от частного случая  $\alpha = \Lambda = 0$  [5] или немодифицированной теории гравитации [8], но и сильно зависят от выбора конкретного уравнения состояния. Уравнения BSk дают большие массы по сравнению с политропным уравнением, рассмотренным в работе [7]. При увеличении параметра  $\ell$  значения масс и радиусов приближаются к данным, полученным при решении классических уравнений Толмена – Оппенгеймера – Волкова. В отличие от немодифицированной теории гравитации, диаграммы смещены в сторону меньших радиусов и меньших масс. В диапазоне  $20 \text{ км} < \ell < 40 \text{ км}$  для уравнений класса BSk меняется наклон кривых диаграммы: при значениях  $\ell < 20 \text{ км}$  масса уменьшается с уменьшением радиуса, а при  $\ell > 40 \text{ км}$ , наоборот, растет.

### Список литературы/References

1. Horndeski G.W. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *Int. J. Theor. Phys.*, 1974, 10, pp. 363–384.
2. Sushkov S.V. Exact cosmological solutions with nonminimal derivative coupling. *Phys. Rev. D*, 2009, 80, 103505; arXiv:0910.0980.
3. Babichev E., Charmousis C., Lehebel A. Black holes and stars in Horndeski theory. *Class. Quant. Grav.*, 2016, 33, no. 15, 154002; arXiv:1604.06402.
4. Minamitsuji M. Solutions in the scalar-tensor theory with nonminimal derivative coupling. *Phys. Rev. D*, 2014, 89, 064017; arXiv:1312.3759.
5. Cisterna A., Delsate T., Rinaldi M. Neutron stars in general second order scalar-tensor theory: the case of non-minimal derivative coupling. *Phys. Rev. D*, 2015, 92, 044050; arXiv:1504.05189.
6. Cisterna A., Delsate T., Ducobu L., Rinaldi M. Slowly rotating neutron stars in the nonminimal derivative coupling sector of Horndeski gravity. *Phys. Rev. D*, 2016, 93, 084046; arXiv:1602.06939.
7. Kashargin P.E., Sushkov S.V. Anti-de Sitter neutron stars in the theory of gravity with nonminimal derivative coupling. *JCAP*, 2023, 01, 005; arXiv:2205.08949v1.
8. Potekhin A.Y., Fantina A.F., Chamel N., Pearson J.M., Goriely S. Analytical representations of unified equations of state for neutron – star matter. *Astronomy and Astrophysics*, 2013, 560, AA48; arxiv:1310.0049.

### Авторы

**Кашаргин Павел Евгеньевич**, к.ф.-м.н., преподаватель, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, д.18, г. Казань, 420008, Россия.

E-mail: pkashargin@mail.ru

**Лебедев Александр Анатольевич**, аспирант, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, д.18, г. Казань, 420008, Россия.

E-mail: lebedev.aleks2012konnor@yandex.ru

**Сушков Сергей Владимирович**, д.ф.-м.н., доцент, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, д.18, г. Казань, 420008, Россия.

E-mail: sergey\_sushkov@mail.ru

**Просьба сослаться на эту статью следующим образом:**

Кашаргин П. Е., Лебедев А. А., Сушков С. В. Нейтронные звезды в теории гравитации с неминимальной кинетической связью скалярного поля и кривизны с реалистичными уравнениями состояния вещества. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2024. № 1. С. 72–77.

**Authors**

**Kashargin Pavel Evgenievich**, candidate of sciences, lecturer, Kazan Federal University, 18 Kremlyovskaya street, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: pkashargin@mail.ru

**Lebedev Aleksandr Anatolievich**, graduate student, Kazan Federal University, 18 Kremlyovskaya street, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: lebedev.aleks2012konnor@yandex.ru

**Sushkov Sergey Vladimirovich**, doctor of sciences, docent, Kazan Federal University, 18 Kremlyovskaya street, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: sergey\_sushkov@mail.ru

**Please cite this article in English as:**

Kashargin P. E., Lebedev A. A., Sushkov S. V. Neutron stars in the theory of gravity with nonminimal derivative coupling with realistic equation of state. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2024, no. 1, pp. 72–77.