УДК 53.01

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ В ТЕОРИИ СТРУН И М-ТЕОРИИ*

Губарев К. А.[a,b,1]

[a] Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, 141701, Россия.
[b] Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Москва, 123182, Россия.

В данной работе мы продемонстрируем два факта, указывающих на существование аналога интегрируемости для трехмерных систем, в частности М2-браны в М-теории. Для этого мы рассмотрим естественную формулировку трехмерных систем в терминах скобки Намбу и ее связь с обобщенным уравнением Янга–Бакстера. Мы обсудим деформации Янга–Бакстера, которые сохраняют интегрируемость сигма моделей и в которых естественным образом возникает классическое уравнение Янга–Бакстера. Затем мы предъявим обобщение деформаций Янга–Бакстера на случай М-теории, в которых аналогичным образом возникает обобщенное уравнение Янга–Бакстера.

Ключевые слова: теория струн, М-теория, супергравитация, интегрируемость, деформации.

INTEGRABILITY IN STRING THEORY AND M-THEORY

Gubarev K. A.[a,b,1]

[a] Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, 141701, Russia
[b] National Research Centre "Kurchatov Institute", Moscow, 123182, Russia.

In this paper we will demonstrate two facts indicating the existence of an analogue of integrability for three-dimensional systems, in particular the M2-brane in M-theory. To do this, we will consider the natural formulation of three-dimensional systems in terms of the Nambu bracket and its connection with the generalized Yang-Baxter equation. We will discuss Yang–Baxter deformations that preserve the integrability of sigma models and in which the classical Yang–Baxter equation naturally arises. We will then present a generalization of the Yang–Baxter deformations to the M-theory case, in which a generalized Yang–Baxter equation arises in a similar way.

Keywords: string theory, M-theory, supergravity, integrability, deformations.

PACS: 11.25.-w, 04.65.+e
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2024.1.40-43

Введение

Свойство интегрируемости в физических системах является важным, так как на классическом уровне позволяет точно решить уравнения движения системы, а на квантовом уровне найти её полный спектр. Для механических систем известно несколько подходов к исследованию их классической интегрируемости. Одним из них является формализм Лакса—Захарова–Шабата, имеющий естественное обобщение на двумерные теории поля, в частности двумерные сигма модели. Этот подход тесно связан с возможностью сформулировать динамику этих систем при помощи скобки Пуассона, которую можно определять при помощи бивекторного параметра решающего классическое уравнение Янга–Бакстера (CYBE). Однако прямое обобщение этих методов на случай трехмерных систем, естественно описываемых в терминах скобки Намбу, неизвестно. Тем не

*Работа выполнена при поддержке грантом РНФ № 20-72-10144
[1] E-mail: kirill.gubarev@phystech.edu

менее есть несколько указаний на то, что некоторый вид интегрируемости в трехмерных системах должен быть, а именно:

1. При попытке обобщения формализма Лакса—Захарова-–Шабата на системы Намбу возникает обобщенное уравнение Янга–Бакстера (gCYBE), аналогично тому как возникает CYBE для двумерных Пуассоновых систем.

2. Для двумерных сигма моделей существуют деформации Янга–Бакстера сохраняющие их интегрируемость. Такие деформации определяются 2-векторным параметром, решающим CYBE. Мы предлагаем естественное обобщение деформаций Янга–Бакстера на случай М-теории. В таких деформациях параметром являются 3- и 6-векторы, решающие gCYBE.

1. Формализм Лакса–Захарова–Шабата и механика Пуассона

Формализм Лакса–Захарова–Шабата предполагает, что уравнения движения динамической системы записаны в виде пары Лакса

$$\dot{L} = [L, M], \tag{1}$$

где L, M — некоторые матрицы, которые могут дополнительно зависеть от некоторого (спектрального) параметра(ов) u. Из (1) можно показать что в такой системе присутствует бесконечное число интегралов движения $F_k := TrL^k$. Динамику такой системы можно сформулировать в терминах скобки Пуассона определяемой следующим выражением

$$\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2], \tag{2}$$

где $[\,,]$ — обычный коммутатор в алгебре $\mathfrak{g}$, матрицы L_1, и L_2 принадлежат $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$, и первая матрица действует на первое пространство, а вторая на второе. r — матрица Янга–Бакстера на $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$. Выполнение тождества Якобки для так определенной скобки Пуассона накладывает ограничения на матрицу r, которые выполняются для случая постоянной и антисимметричной матрицы $r_{ij} = -r_{ji}$ если выполняется CYBE

$$[r_{23}, r_{12}] + [r_{23}, r_{13}] + [r_{13}, r_{12}] = 0. \tag{3}$$

2. Механика Намбу

Динамика трехмерной системы Намбу определяется следующим уравнением движения [1]

$$\frac{df}{dt} = \{H_1, H_2, f\}, \tag{4}$$

где H_1, H_2 обозначают гамильтонианы системы, а $\{\dots\}$ обозначает 3-скобку, удовлетворяющую фундаментальным тождествам Намбу (аналогу тождества Якоби для скобки Пуассона). Естественная попытка обобщения формализма Лакса–Захарова–Шабата заключается в том, чтобы записать уравнения движения системы в терминах скобки Намбу и тройки Лакса

$$\dot{L} = [L, M, N], \tag{5}$$

Для некоторого заданного тензора $\rho_{123} \in \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ определим 3-скобку

$$\{L_1, L_2, L_3\} = [\rho_{123}, L_1] + [\rho_{123}, L_2] + [\rho_{123}, L_3], \tag{6}$$

где номер i у L_i указвает на каком $\mathfrak{g}$ из $\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ оно действует. Из требования выполнения фундаментального тождества для так определенной 3-скобки получаются ограничения на ρ_{123}, подобные CYBE. Пусть $\{T_a\}$ — базис алгебры, $f_{ab}{}^c$ — ее структурные константы, а $\rho_{123} = \rho^{abc}T_a\wedge T_b\wedge T_c$. Тогда условие запишется как обобщенное уравнение Янга–Бакстера

$$\rho^{a_1[a_2|a_6|}\rho^{a_3a_4|a_5|}f_{a_5a_6}{}^{a_7]} - \rho^{a_2[a_1|a_6|}\rho^{a_3a_4|a_5|}f_{a_5a_6}{}^{a_7]} = 0. \tag{7}$$

Такая 3-скобка определяет систему Намбу, с интегралами движения в обычной форме $F_k = TrL^k$. Они находятся в инволюции по отношению к выше определенной скобке Намбу $\{F_i, F_j, F_k\} = 0$. Однако к сожалению неизвестна процедура, которая позволяла бы ввести переменные действие-угол и полностью решить уравнения движения с помощью этих интегралов движения, как это было проделано для двумерных систем.

3. Бивекторные деформации сигма моделей

Отдельным большим ответвлением в истории исследования интегрируемости двумерных сигма моделей является изучение их деформаций, сохраняющих интегрируемость. Среди них наиболее известны следующие примеры: η-деформированная струна на $AdS_5 \times \mathbb{S}^5$ и σ-модель Янга–Бакстера (являющаяся деформацией Пуассона–Ли интегрируемой главной киральной модели). Важным достижением стало общее описание деформаций такого класса, получившего название деформаций Янга–Бакстера, как деформаций фона на котором живет сигма модель (теория струн). Такие деформации содержат 2-векторный антисимметричный параметр деформации β^{mn}, для которого обычно подразумевается 2-Киллинговый анзац $\beta^{mn} = r^{ab}k_a{}^m k_b{}^n$. Для теории струн естественным выбором переменных для описания действия деформации является явна Т-дуальная двойная теория поля. Нетривиальный факт для таких деформаций заключается в том, что они переводят решение 10-мерной супергравитации, которая определяет согласованные фоны для теории струн, снова в решение при выполненни [2]

$$\begin{cases} f_{ab}{}^c r^{ab} = 0, & \text{(унимодулярность)}, \\ f_{de}{}^{[a} r^{b|d|} r^{c]e} = 0, & \text{(CYBE)}, \end{cases} \tag{8}$$

на параметр деформации r^{ab}. Выше $f_{ab}{}^c$ структурные константы алгебры векторов Киллинга.

4. Поливекторные деформации в М-теории

Описанные выше деформации имеют естественное обобщение в М-теории, которое получило название обобщенных деформаций Янга–Бакстера. Вместо двойной теории поля для их построения используется формализм явно ковариантный относительно групп U-дуальности, называемый исключительной теорией поля. Параметрами деформации становятся антисимметричные 3- и 6-векторы $\Omega^{m_1m_2m_3}$ и $\Omega^{m_1\dots m_6}$, для которых также предполагается поли-Киллинговый анзац $\Omega^{m_1m_2m_3} = \rho^{a_1a_2a_3}k_{a_1}{}^{m_1}k_{a_2}{}^{m_2}k_{a_3}{}^{m_3}$ и $\Omega^{m_1\dots m_6} = \rho^{a_1\dots a_6}k_{a_1}{}^{m_1}\dots k_{a_6}{}^{m_6}$. Замечательным фактом является то, что требование выполнения уравнений 11-мерной супергравитации, которая определяет согласованные фоны для М2-браны в М-теории, до и после деформации приводит к следующим условиям на параметры деформаций [3]

$$\begin{cases} \rho^{i_1i_2i_3} f_{i_2i_3}{}^{i_4} = 0, \\ \rho^{[i_1i_2i_3i_4|i_5i_6} f_{i_5i_6}{}^{|i_7]} = 0, \\ \rho^{i_1[i_2|i_6|}\rho^{i_3i_4|i_5|} f_{i_5i_6}{}^{i_7]} - \rho^{i_2[i_1|i_6|}\rho^{i_3i_4|i_5|} f_{i_5i_6}{}^{i_7]} - 3 f_{i_5i_6}{}^{[i_1}\rho^{i_2]i_3i_4i_5i_6i_7} = 0, \\ \rho^{i_1i_2[i_8}\rho^{i_3i_4i_9}\rho^{i_5i_6i_7]} f_{i_8i_9}{}^{i_{10}} - 18\rho^{i_1i_2[i_8}\rho^{i_3i_4i_5i_6i_7i_9]} f_{i_8i_9}{}^{i_{10}} = 0, \end{cases} \tag{9}$$

$f_{ab}{}^c$ структурные константы алгебры векторов Киллинга. Первое и второе из которых аналог условия унимодулярности (8), а третье и четвертое некоторое обобщение классического уравнения Янга–Бакстера.

Заключение

Для трехмерных Намбу систем, в частности М2-браны в М-теории, возникают структуры, похожие на аналогичные интегируемые структуры в двумерных сигма моделях и в частности теории струн. Главным объектом для трехмерных систем становится gCYBE. Можно предположить что оно связано с некоторым квантовым уравнением интегрируемости, также как CYBE связан с квантовым уравнением Янга–Бакстера. Наиболее очевидный кандидат — уравнение тетраэдра, однако в нем неизвестно как взять классический предел. Поэтому ответ на вопрос какое квантовое уравнение отвечает классическому пределу (9) до сих пор открыт. Ответа на него интересен тем, что такое уравнение будет говорить о свойствах рассеяния мембран, аналогично тому как квантовое уравнение Янга–бакстера говорит о свойствах рассеяния струн.

Я выражаю свои искреннюю благодарность моему научному руководителю Эдварду Таваккуловичу Мусаеву за всестороннюю помощь в науке и в жизни, в частности при подготовке этой работы, а также организационному комитету “Петровских чтений” — 2023 за теплый прием, и фонду РНФ при поддержке которого выполнена данная работа (грант РНФ № 20-72-10144).

Список литературы/References

1. Nambu Y. Generalized Hamiltonian dynamics. *Phys. Rev. D*, 1973, 7, pp. 2405–2412.
2. Bakhmatov I., Musaev E.T. Classical Yang-Baxter equation from β-supergravity. *JHEP*, 2019, 01:140.
3. Gubarev K.A., Musaev E.T. Polyvector deformations in eleven-dimensional supergravity. *Phys. Rev. D*, 2021, 103, no. 6, 06602.

Авторы

Губарев Кирилл Алексеевич, м.н.с, Московский физико–технический институт, Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, 141701, Россия.
E-mail: kirill.gubarev@phystech.edu

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Губарев К. А. Интегрируемость в теории струн и М-теории. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2024. № 1. С. 40–43.

Authors

Gubarev Kirill Alekseevich, Moscow Institute of Physics and Technology, Institutsky per., 9, Dolgoprudny, 141701, Russia.
E-mail: kirill.gubarev@phystech.edu

Please cite this article in English as:
Gubarev K. A. Integrability in string theory and M-theory. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2024, no. 1, pp. 40–43.