УДК 530.12, 531.51

ВЕРИФИЦИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ИНФЛЯЦИИ НА ОСНОВЕ СКАЛЯРНО-ТЕНЗОРНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Денцель Е. С.[a,1], Фомин И. В.[a,2]

[a] МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, 105005, Россия.

Рассмотрены инфляционные модели на основе скалярно-тензорной гравитации со степенной параметризацией влияния неминимальной связи между скалярным полем и кривизной на космологическую динамику и параметры космологических возмущений. В отличие от ранее рассмотренных моделей инфляции с квадратичной зависимостью функции неминимальной связи от параметра Хаббла, в данном случае рассматривается обобщенный анализ для произвольной степенной зависимости данных параметров космологических моделей. В качестве примера предложенного подхода рассматриваются космологические модели, основанные на физических потенциалах скалярного поля для различных типов неминимальной связи скалярного поля и кривизны. Также, на примере инфляции Старобинского, дана оценка отклонений предложенных моделей от случая гравитации Эйнштейна.

Ключевые слова: Космологическая инфляция, скалярно-тензорная гравитация, модифицированная гравитация, скалярное поле, параметры космологических возмущений.

VERIFIED MODELS OF COSMOLOGICAL INFLATION BASED ON SCALAR-TENSOR THEORY OF GRAVITY

Dentsel E. S.[a,1], Fomin I. V.[a,2]

[a] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia.

We consider inflationary models based on scalar-tensor gravity with power-law parametrisation influence of the non-minimal coupling between the scalar field and curvature on the cosmological dynamics and parameters of cosmological perturbations. In contrast to the previously considered inflation models with a quadratic dependence of the non-minimal coupling function on the Hubble parameter, here we consider a generalised analysis for arbitrary power-law dependence of these parameters of cosmological models. As an example of the proposed approach, cosmological models based on physical scalar field potentials for different types of non-minimal coupling of the scalar field and curvature are considered. Also, using the example of Starobinsky inflation, an assessment of the deviations of the proposed models from the case of Einstein gravity is given.

Keywords: Cosmological inflation, scalar-tensor gravity, modified gravity, scalar field, cosmological perturbations parameters.

PACS: 04.50.-h
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2024.1.44-49

Введение

Модели космологической инфляции позволяют как разрешить проблемы теории Большого Взрыва [1–3], так и дать объяснение наблюдаемой повторной стадии ускоренного расширения вселенной в настоящую эпоху ее эволюции [4]. В настоящее время, рассматриваются различные инфялционные модели, основанные как на гравитации Эйнштейна [5,6], так и на ее различных модификациях [7]. Отметим, что одним из основных критериев корректности построенных моделей

[1] E-mail: edentsel@yandex.ru
[2] E-mail: ingvor@inbox.ru

ранней Вселенной на основе инфляционной парадигмы является соответствие спектральных параметров космологических возмущений наблюдательным ограничениям, полученным из измерений анизотропии и поляризации реликтового излучения [4].

Одной из первых и наиболее известных модификаций является скалярно-тензорная гравитация (СТГ), в которой учитывается неминимальная связь между скалярным полем и кривизной [8]. Основными параметрами, характеризующими тип космологической модели ранней Вселенной, являются потенциал скалярного поля $V(\varphi)$, функция неминимальной связи $F(\varphi)$, определяющая физические процессы, происходящие на инфляционной стадии, и параметр Хаббла $H(t)$, соответствующий динамике ускоренного расширения ранней вселенной. Следовательно, можно определить соотношения между этими параметрами, что дает модели, соответствующие наблюдательным данным для некоторого класса космологических моделей.

В работах [9, 10] рассматривались модели космологической инфляции, основанная на квадратичной связи вида $F \sim H^2$. Также в работе [10] проведён расчёт спектра реликтовых гравитационных волн для рассматриваемой зависимости и было показано, что космологические модели с квадратичной связью между параметром Хаббла и функцией связи соответствуют наблюдательным ограничениям на параметры космологических возмущений для произвольного инфляционного сценария с определенной динамикой ускоренного расширения ранней Вселенной.

В данной работе рассматривается обобщение данного подхода при построении моделей космологической инфляции на основе связи вида $F \sim H^n$. Рассматривается влияние данной связи на фоновые параметры инфляционных моделей и параметры космологических возмущений, также приводится оценка постоянного параметра n.

1. Инфляционные модели на основе СТГ с соотношением $F \sim H^n$

Модели космологической инфляции на основе скалярно-тензорной гравитации в системе единиц в системе единиц $8\pi G = c = 1$ определяются действием следующего вида [8–10]

$$S_{(GST)} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}F(\varphi)R - \frac{\omega(\varphi)}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi)\right], \tag{1}$$

где g-определитель метрического тензора $g_{\mu\nu}$, $V(\varphi)$ - потенциал скалярного поля, R-скаляр Риччи, $F(\varphi)$ - функция неминимальной связи скалярного поля и кривидны и $\omega(\varphi)$ - кинетическая функция.

Геометрия однородной изотропной Вселенной определяется пространственно плоской метрикой Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ) [6]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2\right)\right], \tag{2}$$

где $a(t)$ -масштабный фактор.

Вариация действия (1) по метрике и полю позволяет получить уравнения фоновой космологической динамики

$$\frac{\omega(\varphi)}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) = 3FH^2 + 3H\dot{F}, \tag{3}$$

$$\dot{\varphi}^2 = H\dot{F} - 2F\dot{H} - \ddot{F}, \tag{4}$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V' - 3F'(\dot{H} + H^2) = 0, \tag{5}$$

где $V' = dV/d\varphi$.

Так как только два уравнения из (3)-(5) являются независимыми, то можно записать их в следующем виде

$$\frac{\omega(\varphi)}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) = 3FH^2 + 3H\dot{F}, \tag{6}$$

$$\omega(\varphi)\dot{\varphi}^2 = H\dot{F} - 2F\dot{H} - \ddot{F}. \tag{7}$$

Рассмотрим степенное соотношение между функцией неминимальной связи и параметром Хаббла

$$F = \left(\frac{H}{\lambda}\right)^n, \tag{8}$$

где $n \geq 0$ и случай $n = 0$ соответствует минимальной связи, то есть случаю гравитации Эйнштейна.

Для данной степенной параметризации уравнения космологической динамики (6)-(7) имеют следующий вид

$$\omega(\varphi)\dot{\varphi}^2 = \lambda^{-n}H^{n-2}\left(H^2\dot{H}(n-2) - n(n-1)\dot{H}^2 - nH\ddot{H}\right), \tag{9}$$

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\lambda^{-n}H^{n-2}\left(6H^4 + (2+5n)H^2\dot{H} + n(n-1)(\dot{H})^2 + nH\ddot{H}\right). \tag{10}$$

С учетом квази-экспоненциального (квази-деситтеровского) ускоренного ресширения ранней вселенной $H^2 \gg \dot{H}$ для случая $\omega = 1$, и учитывая соотношение $\dot{H} = \left(\frac{dH}{d\varphi}\right)\dot{\varphi}$, уравнения (9)–(10) можно записать следующим образом

$$V(\varphi) \simeq \frac{3}{\lambda^n}H^{n+2}(\varphi), \tag{11}$$

$$\dot{\varphi} \simeq -\frac{1}{\lambda^n}\left(\frac{2-n}{1+n}\right)\frac{d}{d\varphi}\left(H^{n+1}\right), \tag{12}$$

которые сводятся к уравнениям космологической динамики на основе приближения медленного скатывания для случая гравитации Эйнштейна для $n = 0$ [6].

Также, на основе методов расчета параметров космологических возмущений для инфляционных моделей на основе скалярно-тензорной гравитации [11], с учетом соотношения (8), получим следующие выражения для параметров космологических возмущений на пересечении радиуса Хаббла

$$\mathcal{P}_S \simeq \frac{\lambda^n}{4\pi^2\epsilon(2-n)}H^{2-n}, \tag{13}$$

$$n_S - 1 \simeq -4\epsilon + 2\delta, \tag{14}$$

$$r \simeq 8\epsilon(2-n), \tag{15}$$

где параметры медленного скатывания $\epsilon \ll 1$ и $\delta \ll 1$ определяются следующим образом

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \tag{16}$$

$$\delta = -\frac{\ddot{H}}{2H\dot{H}}, \tag{17}$$

также $\mathcal{P}_S$ – спектр мощности скалярных возмущений, n_S – спектральный индекс скалярных возмущений и r – тензорно-скалярное отношение.

Отметим, что измерения анизотропии и поляризации реликтового излучения дают следующие ограничения на значения данных параметров [4, 12]

$$\mathcal{P}_S = 2.1 \cdot 10^{-9}, \tag{18}$$

$$n_S = 0.9663 \pm 0.0004, \qquad r < 0.032. \tag{19}$$

Также отметим, что условие (18) всегда можно выполнить за счет выбора параметров рассматриваемой космологической модели, и принципиальное значение для верификации имеют условия (19).

Поскольку параметр Хаббла является убывающей функцией космического времени $\dot{H} < 0$, параметр медленного скатывания $\epsilon > 0$. Учитывая, что спектр мощности скалярных возмущений $\mathcal{P}_S > 0$ и тензорно-скалярное отношение $r > 0$, получим следующее ограничение на значения постоянного параметра $0 < n < 2$.

Также, учитывая выражения (13) и (15), отметим, что квадратичное соотношение между функцией неминимальной связи и параметром Хаббла (для $n = 2$), которое рассматривалось ранее в работах [9, 10], является специальным случаем в рамках степенной параметризации влияния неминимальной связи скалярного поля и кривизны вида (8).

2. Модифицированная модель инфляции Старобинского

Для иллюстрации влияния неминимальной связи скалярного поля и кривизны в случае степенной параметризации такого влияния (8) рассмотрим модификацию модели инфляции Старобинского [13, 14].

Для этого рассмотрим следующий параметр Хаббла

$$H(\varphi) = \lambda \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi}\right)^{\frac{1}{n+1}}. \tag{20}$$

Решения уравнений (11)-(12) для параметра Хаббла (24) записываются следующим образом

$$V(\varphi) \simeq 3\lambda^{1-n} \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi}\right)^{\frac{n+2}{n+1}}, \tag{21}$$

$$\varphi(t) \simeq \sqrt{\frac{3}{2}} \ln\left[\frac{2}{3}\left(\frac{2-n}{1+n}\right)\lambda^{1-n}\, t\right]. \tag{22}$$

После подстановки (22) в (24) получим параметр Хаббла как функцию космического времени

$$H(t) \simeq \lambda \left(1 + \frac{3\lambda^{n-1}(1+n)}{2(2-n)t}\right)^{\frac{1}{n+1}}. \tag{23}$$

Также, из (8) и (24) получим функцию неминимальной связи для данной модели в явном виде

$$F(\varphi) = \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi}\right)^{\frac{n}{n+1}}, \quad F(t) = \left(1 + \frac{3\lambda^{n-1}(1+n)}{2(2-n)t}\right)^{\frac{n}{n+1}}. \tag{24}$$

Отметим, что данные решения соответствуют модели инфляции Старобинского для случая минимальной связи скалярного поля и кривизны при $n = 0$.

Обозначая $k = 1/(1+n)$, из выражений (16)–(17) и (23), получим

$$\delta = \frac{(2\sqrt{3\epsilon}k^2 + 3\epsilon k \pm 4k^2 - 3\epsilon)(2\sqrt{3\epsilon}k + 3\epsilon)}{3k(\sqrt{3\epsilon} + 2k)^2}, \tag{25}$$

что, при условии $k \gg \epsilon$, учитывая условие медленного скатывания $\epsilon \ll 1$, соответствует следующему соотношению между параметрами медленного скатывания

$$\delta \simeq \pm 2\sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \quad \epsilon = \frac{3}{4}\delta^2, \tag{26}$$

что, после подстановки данного соотношения в выражения (14)–(15), приводит к следующей зависимости тензорно-скалярного отношения от спектрального индекса скалярных возмущений

$$r = \frac{3}{2}(2-n)(1-n_S)^2. \tag{27}$$

На основе наблюдательного ограничения на значение спектрального индекса скалярных возмущений $n_S \simeq 0.97$, из выражения (27) получим

$$r \simeq 1.35 \times (2-n) \times 10^{-3}, \tag{28}$$

то есть данная космологическая модель удовлетворяет наблюдательным ограничениям на значения тензорно-скалярного отношения (19) для всех значений $0 \leq n < 2$.

Для инфляционных моделей на основе гравитации Эйнштейна, которые не соответствуют данным наблюдательным ограничениям, с учетом неминимальной связи скалярного поля и кривизны, модели можно верифицировать для ненулевого параметра n, конкретное ограничение снизу на значение которого зависит от типа модели космологической инфляции.

Таким образом, предложенный метод анализа влияния неминимальной связи скалярного поля и кривизны на основе степенной параметризации дает возможность рассматривать произвольные инфляционные модели как принципиально верифицированные по наблюдательным данным, поскольку в данном случае, процедура верификации по наблюдательным ограничениям на значения параметров космологических возмущений сводится к определению ограничения снизу на значение параметра n.

Заключение

В данной работе мы рассмотрели космологические модели на основе скалярно-тензорной гравитации и степенной параметризации влияния неминимальной связи скалярного поля и кривизны вида $F \sim H^n$ на значения параметров модели. Влияния неминимальной связи скалярного поля и кривизны вида на значения параметров модели было проиллюстрировано на примере инфляции Старобинского.

Была сделана следующая оценка параметра $0 \leq n \leq 2$, причем значению $n = 0$ соответствуют модели с минимальной связью поля и кривизны (то есть на основе гравитации Эйнштейна), а значению $n = 2$ соответствует специальному случаю моделей на основе скалярно-тензорной гравитации, рассмотренному ранее в работах [9, 10].

Также было показано, что в рамках предложенной степенной параметризации влияния неминимальной связи скалярного поля и кривизны $F \sim H^n$ произвольные модели космологической инфляции можно рассматривать как принципиально верифицируемые по наблюдательным ограничениям на значения параметров космологических возмущений.

Список литературы/References

1. Guth A.H. The inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev. D*, 1981, no. 23, pp. 347–356.

2. Linde A.D. Chaotic Inflation. *Phys. Lett. B*, 1983, **129**, pp. 177–181. https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)90837-7.

3. Kofman L., Linde A.D., Starobinsky A.A. Towards the theory of reheating after inflation. *Phys. Rev. D*, 1997, **56**, pp. 3258–3295 https://doi.org/10.1103/PhysRevD.56.3258 [arXiv:hep-ph/9704452 [hep-ph]].

4. Aghanim N. *et al.* [Planck], Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters, *Astron. Astrophys.*, 2020, vol. 641, A6.

5. Jerome Martin, Christophe Ringeval, and Vincent Vennin. Encyclopdia inflationaris. *Physics of the Dark Universe*, 2014, 5-6, 05.

6. Chervon S., Fomin I., Yurov V., Yurov A. *Scalar Field Cosmology.* Series on the Foundations of Natural Science and Technology, Volume 13 (WSP, Singapur, 2019), https://doi.org/10.1142/11405

7. Odintsov S.D., Oikonomou V.K., Giannakoudi I., Fronimos F.P., Lymperiadou E.C. Recent Advances in Inflation. *Symmetry*, 2023, 15, no. 9, 1701.

8. Faraoni V. Cosmology in scalar tensor gravity. *Fundam. Theor. Phys.*, 2004, 139.

9. Fomin I.V., Chervon S.V., Tsyganov A.V. Generalized scalar-tensor theory of gravity reconstruction from physical potentials of a scalar field. *Eur. Phys. J. C*, 2020, **80**, no. 4, 350. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-7893-y [arXiv:2004.08544 [gr-qc]].

10. Fomin I.V., Chervon S.V., Morozov A.N., Golyak I.S. Relic gravitational waves in verified inflationary models based on the generalized scalar–tensor gravity. *Eur. Phys. J. C*, 2022, **82**, no.7, 642. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-022-10601-9.

11. De Felice A., Tsujikawa S. Primordial non-Gaussianities in general modified gravitational models of inflation. *JCAP*, 2011, **04**, 029. https://doi.org/10.1088/1475-7516/2011/04/029 [arXiv:1103.1172 [astro-ph.CO]].

12. Tristram M. *et al.* Improved limits on the tensor-to-scalar ratio using BICEP and Planck data. *Phys. Rev. D*, 2022, **105**, no. 8, 083524. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.105.083524 [arXiv:2112.07961 [astro-ph.CO]].

13. Starobinsky A.A. A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity. *Phys. Lett. B*, 1980, **91**, pp. 99–102. https://doi.org/10.1016/0370-2693(80)90670-X.

14. Aldabergenov Y., Ishikawa R., Ketov S.V., Kruglov S.I. Beyond Starobinsky inflation. *Phys. Rev. D*, 2018, 98, no. 8, 083511.

Авторы

Денцель Евгений Станиславович, старший преподаватель кафедры «Физика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, ул. 2-я Бауманская, д. 5, стр. 1, г. Москва, 105005, Россия.
E-mail: edentsel@yandex.ru

Фомин Игорь Владимирович, д. ф.-м. н., профессор кафедры физики, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, 2-я Бауманская ул., д. 5, г. Москва, 105005, Россия.
E-mail: ingvor@inbox.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Денцель Е. С., Фомин И. В. Верифицированные модели космологической инфляции на основе скалярно-тензорной теории гравитации. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2024. № 1. С. 44–49.

Authors

Dentsel Evgenii Stanislavovich, assistant professor of Physics department, Bauman Moscow State Technical University, 2-nd Baumanskaya st., 5/1, Moscow, 105005, Russia.
E-mail: edentsel@yandex.ru

Fomin Igor Vladimirovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Physics Department of Bauman Moscow State Technical University, 2-nd Baumanskaya street, 5, Moscow, 105005, Russia.
E-mail: ingvor@inbox.ru

Please cite this article in English as:

Dentsel E. S., Fomin I. V. Verified models of cosmological inflation based on scalar-tensor theory of gravity. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2024, no. 1, pp. 44–49.