

УДК 524.8, 53.1

© Большакова К. А., Червон С. В., Фомин И. В., 2024

**РЕШЕНИЯ В СКАЛЯРНО-ТОРСИОННОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ ДЛЯ СТЕПЕННОЙ ЭВОЛЮЦИИ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ\***Большакова К. А.<sup>a,1</sup>, Червон С. В.<sup>a,b,c,2</sup>, Фомин И. В.<sup>b,3</sup><sup>a</sup> Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова, Ульяновск, 432071, Россия.<sup>b</sup> Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия.<sup>c</sup> Казанский Федеральный Университет, г. Казань, 420008, Россия.

В данной работе мы рассматриваем степенную эволюцию скалярного поля в космологической модели, основанной на скалярно-торсионной гравитации вида  $F(T, \phi) = F(\phi)T$ . Выбор неминимальной связи скалярного поля с кручением вида  $F \sim T^{n/2}$  позволяет найти точное решение модели, которое успешно проходит согласование с наблюдательными ограничениями.

*Ключевые слова:* Телепараллельная теория гравитации, космологические параметры.

**SOLUTIONS IN THE SCALAR-TORSION THEORY OF GRAVITY FOR THE POWER EVOLUTION OF THE SCALAR FIELD**Bolshakova K. A.<sup>a,1</sup>, Chervon S. V.<sup>a,b,c,2</sup>, Fomin I. V.<sup>b,3</sup><sup>a</sup> Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk, 432071, Russia.<sup>b</sup> Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia.<sup>c</sup> Kazan Federal University, Kazan, 420008, Russia.

In this paper, we consider power law evolution of a scalar field in the cosmological model based on scalar-torsion gravity of the kind  $F(T, \phi) = F(\phi)T$ . The choice of a non-minimal coupling of the scalar field with torsion of the form  $F \sim T^{n/2}$  allows us to find an exact solution to the model that is successfully consistent with observational constraints.

*Keywords:* Teleparallel theory of gravity, cosmological parameters.

PACS: 04.20.Kd, 04.50.Kd

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2024.1.27-32

**Введение**

В настоящей работе рассматривается обобщенная скалярно-торсионная теория  $F(T, \phi) = F(\phi)T$  гравитации, где  $F(\phi)$  представляет произвольную функцию,  $T$  – скаляр кручения. Ключем к нахождению верифицируемых по наблюдательным данным решений является выбор неминимальной связи между функцией скалярного поля  $F(\phi)$  и скаляром кручения вида  $F \sim T^{n/2}$ , где  $n$

\* Настоящая работа выполнена в рамках Дополнительного соглашения №073-03-2024-060/1 от 13.02.2024 к Соглашению о предоставлении субсидии из федерального бюджета на финансовое обеспечение выполнения государственного задания на оказание государственных услуг (выполнения работ) № 073-03-2024-060 от 18.01.2024, заключенным между ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова» и Министерством просвещения Российской Федерации.

<sup>1</sup> E-mail: bolshakova.ktrn@gmail.com<sup>2</sup> E-mail: chervon.sergey@gmail.com<sup>3</sup> E-mail: ingvor@inbox.ru

произвольная постоянная. Записанные уравнения космологической динамики допускают возможность вычисления параметра Хаббла в случае степенной зависимости скалярного поля от времени и провести согласование параметров модели с ограничениями по наблюдательным данным.

## 1. Общие уравнения

Мы рассматриваем обобщенную скалярно-торсионную гравитацию [1] с действием вида:

$$S = \int d^4 x e \left[ -\frac{1}{2} F(\phi) T - \frac{\omega(\phi)}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right]. \quad (1)$$

Здесь  $F$ ,  $\omega$ ,  $V$  произвольные функции скалярного поля  $\phi$ , точка над функцией означает производную по времени,  $T$  – скаляр кручения,  $e = \det[e_\mu^A] = \sqrt{-g}$ .

Выбираем тетраду для однородной и изотропной фоновой геометрии:

$$e_\mu^A = \text{diag} \{1, a(t), a(t), a(t)\}, \quad (2)$$

которая соответствует метрике Фридмана-Робертсона-Уокера:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (3)$$

Здесь  $a(t)$  – масштабный фактор, зависящий от космического времени  $t$ . Поскольку диагональная тетрада в декартовых координатах (2) является собственной тетрадой, спиновая связность обращается в ноль:  $\omega_{B\mu}^A = 0$ .

Уравнения космологической динамики выводятся при варьировании действия (1) по тетраде [1]. В полученные уравнения мы подставляем функцию неминимального взаимодействия, следуя [2], вида:  $F(\phi(t)) = \left(\frac{H(t)}{\lambda}\right)^n$ , где  $\lambda > 0$ ,  $n = \text{const}$ . Таким образом, мы имеем следующие уравнения космологической динамики:

$$V = \frac{H^n}{\lambda^n} \left( 3H^2 + \dot{H}(1+n) \right), \quad (4)$$

$$\omega \dot{\phi}^2 = -2 \left( \frac{H}{\lambda} \right)^n \dot{H}(n+1), \quad (5)$$

где  $\omega(\phi)$  – произвольная функция. Отметим, что данные уравнения получены в работах [2, 3], где  $\omega \neq \text{const}$ . В настоящей работе мы полагаем  $\omega(\phi) = \pm 1 = \omega_*$ , что отличает наш подход от предыдущего.

## 2. Формулы для расчета космологических параметров данной модели

Космологические возмущения влияют на анизотропию и поляризацию реликтового излучения. Благодаря этому, есть возможность произвести оценку инфляционных моделей по наблюдательным данным. По последним данным, полученным в работе [4] ограничения на параметры космологических возмущений имеют следующие значения:

$$\mathcal{P}_S = 2,1 \times 10^{-9}, \quad r < 0,032, \quad n_s - 1 = 0,9663 \pm 0,0041. \quad (6)$$

Для нашей модели космологические параметры будут рассчитываться по формулам [2] с учетом заданной неминимальной связи  $F = \left(\frac{H(t)}{\lambda}\right)^n$ . Формула для расчета спектра мощности скалярных возмущений:

$$\mathcal{P}_S = \frac{\lambda^n}{2(n+1)\epsilon} \left( \frac{H}{2\pi} \right)^2. \quad (7)$$

Спектральный индекс скалярных возмущений:

$$n_S - 1 = (n-4)\epsilon + 2\delta. \quad (8)$$

Отношение тензорного спектра мощности к скалярному (тензорно-скалярное отношение):

$$r = \frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_S} = 16(n+1)\epsilon. \quad (9)$$

Формулы для расчета параметров медленного скатывания:

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1, \quad (10)$$

$$\delta = -\frac{\ddot{H}}{2H\dot{H}} \ll 1. \quad (11)$$

### 2.1. Инфляционные решения для степенного скалярного поля.

Рассмотрим степенную эволюцию скалярного поля вида  $\phi = Dt^k$ , где  $D, k = const$ .

Из уравнения (5) находим параметр Хаббла:

$$H = \left( C - \frac{\omega_* \lambda^n D^2 k^2}{2(2k-1)} t^{2k-1} \right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad (12)$$

здесь  $C$  – константа интегрирования. Масштабный фактор находим в предположении  $C = 0$ :

$$a = a_0 \exp\left( B t^{\frac{2k+n}{n+1}} \right), \quad B = \left[ \frac{-\omega_* \lambda^n D^2 k^2}{2(2k-1)} \right]^{\frac{1}{n+1}} \frac{(n+1)}{(2k+n)}. \quad (13)$$

Так как подкоренное выражение в  $H$  должно быть больше нуля, при  $C = 0$  имеем две возможности i)  $\omega_* = 1$ ,  $k < 1/2$  и ii)  $\omega_* = -1$ ,  $k > 1/2$ . Выбираем второй вариант, так как в первом случае не возможно согласование по наблюдательным данным.

Потенциал  $V(\phi)$  (4) с учетом параметра Хаббла (12) при  $C = 0$  принимает вид:

$$V(\phi) = \frac{3}{\lambda^n} \left[ -\frac{\omega_* \lambda^n D^2 k^2}{2(2k-1)} \left( \frac{\phi}{D} \right)^{\frac{2k-1}{k}} \right]^{\frac{n+2}{n+1}} - \frac{1}{2} \omega_* D^2 k^2 \left( \frac{\phi}{D} \right)^{\frac{2(k-1)}{k}}. \quad (14)$$

Запишем значения параметра Хаббла и его производных для дальнейших вычислений при  $k = 3/4$ :

$$A_n = k^2 \lambda^n D^2 = \frac{9}{16} \lambda^n D^2, \quad H(t) = A_n^{\frac{1}{n+1}} t^{\frac{1}{2(n+1)}}, \quad (15)$$

$$\dot{H} = \frac{1}{2(n+1)} A_n^{\frac{1}{n+1}} t^{-\frac{2n+1}{2(n+1)}}, \quad \ddot{H} = -\frac{2n+1}{4(n+1)^2} A_n^{\frac{1}{n+1}} t^{-\frac{4n+3}{2(n+1)}}. \quad (16)$$

Параметры медленного скатывания (10) и (11) для данной модели при  $k = 3/4$  таковы:

$$\epsilon = -\frac{1}{2(n+1)} A_n^{-\frac{1}{n+1}} t^{-\frac{2n+3}{2(n+1)}}, \quad (17)$$

$$\delta = \frac{(1+2n)}{4(n+1)} A_n^{-\frac{1}{n+1}} t^{-\frac{2n+3}{2(n+1)}}. \quad (18)$$

Учитывая (12) при  $C = 0$ , находим число е-фолдов:

$$N = \frac{2(n+1)}{2n+3} t^{\frac{3+2n}{2(n+1)}} A_n^{\frac{1}{n+1}}. \quad (19)$$

Полагая  $N = 60$ , находим время пересечения горизонта  $t_*$ :

$$t_* = \left[ \frac{30(2n+3)}{(n+1)} A_n^{-\frac{1}{n+1}} \right]^{\frac{2(n+1)}{2n+3}}. \quad (20)$$

Тогда параметры медленного скатывания:

$$\epsilon_* = -\frac{1}{60(2n+3)}, \quad (21)$$

$$\delta_* = \frac{1+2n}{120(2n+3)}. \quad (22)$$

Отметим здесь, что в нашем случае, при  $\omega_* = -1$ , условие  $\dot{H} > 0$ , что соответствует суперинфляции [5, 6], выполняется при  $n < -1$ .

Для расчета спектра мощности скалярных возмущений мы находим значение параметра Хаббла при пересечении горизонта:

$$H_* = A_n^{\frac{2}{(2n+3)}} \left[ \frac{30(2n+3)}{(n+1)} \right]^{\frac{1}{2n+3}}. \quad (23)$$

Расчет космологических параметров при пересечении горизонта для данной модели по формулам (7), (8) и (9) дает:

$$\mathcal{P}_S(t=t_*) = -\frac{\lambda^n}{4\pi^2} A_n^{\frac{4}{(2n+3)}} \left( \frac{30(2n+1)}{(n+1)} \right)^{\frac{2n+5}{(2n+3)}}, \quad (24)$$

$$n_s - 1 = \frac{(n+5)}{60(2n+3)}, \quad (25)$$

$$r = -\frac{4(n+1)}{15(2n+3)}. \quad (26)$$

Исходя из полученных формул (25) и (26) зависимость  $r = r(n_s)$  такова:

$$r = \frac{16(n_s - 1)(n + 1)}{n + 5}. \quad (27)$$

Проводя анализ данной формулы находим следующие ограничения на значения для  $n$  и для показателя степени скалярного поля  $k = 3/4$ :  $-1.087 < n \leq -1.010$ . Проводя анализ (24) при  $\omega_* = -1$  получаем ограничение на амплитуду скалярного поля  $D$  и  $\lambda$ :  $D^{9.685} \lambda^{4.177} \approx 1.616 \times 10^{-15}$ .

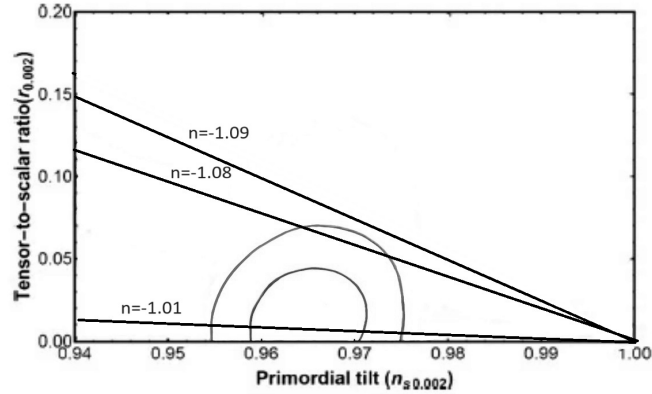


Рис. 1. Зависимость  $r = r(n_s)$  при  $k = 3/4$  для разных значений параметра  $n = -1.09, -1.08, -1.01$ .

## Заключение

Используя функционально-параметрическую связь между функцией неминимального взаимодействия и кручения вида  $F \sim T^{n/2}$ , предложенного в работе [2], найдено семейство решений для

скалярного поля, эволюционирующего по степенному закону. Среди полученных решений найдены те, которые согласованы по наблюдательным ограничениям. Выбранные параметры модели приводят к необходимости фантомизации скалярного поля. Показано, что для всех моделей со степенью эволюции скалярного поля  $k$  при  $k > 1/2$  наличие неминимальной связи позволяет верифицировать модели космологической инфляции, используя наблюдательные ограничения на параметры космологических возмущений.

### Список литературы

1. Gonzalez-Espinoza M., Otalora G., Videla N., Saavedra J. Slow-roll inflation in generalized scalar-torsion gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2019, 029 p.
2. Chervon S.V., Fomin I.V. Reconstruction of Scalar-Torsion Gravity Theories from the Physical Potential of a Scalar Field. *Symmetry*, 2023, vol. 15, 291 p.
3. Фомин И.В. Методы построения и верификации инфляционных моделей ранней вселенной. Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2022. № 40. С. 50–63.
4. Tristram M., et al. Improved limits on the tensor-to-scalar ratio using BICEP and Planck data. *Phys. Rev. D*, 2022. 105 p.
5. Biswas T., Mazumdar A. Super-Inflation, Non-Singular Bounce, and Low Multipoles. *Class. Quant. Grav.*, 2014, vol. 31, 7 p.
6. Basak A., Shankaranarayanan S. Super-inflation and generation of first order vector perturbations in ELKO. *JCAP*, 2015, vol. 2015, 034 p.

### References

1. Gonzalez-Espinoza M., Otalora G., Videla N., Saavedra J. Slow-roll inflation in generalized scalar-torsion gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2019, 029 p.
2. Chervon S.V., Fomin I.V. Reconstruction of Scalar-Torsion Gravity Theories from the Physical Potential of a Scalar Field. *Symmetry*, 2023, vol. 15, 291 p.
3. Fomin I.V. Methods for constructing and verifying inflationary models of the early Universe. *Space, time and fundamental interactions*, 2022, no. 40, pp. 50–63. (in Russ.)
4. Tristram M., et al. Improved limits on the tensor-to-scalar ratio using BICEP and Planck data. *Phys. Rev. D*, 2022, 105 p.
5. Biswas T., Mazumdar A. Super-Inflation, Non-Singular Bounce, and Low Multipoles. *Class. Quant. Grav.*, 2014, vol. 31, 7 p.
6. Basak A., Shankaranarayanan S. Super-inflation and generation of first order vector perturbations in ELKO. *JCAP*, 2015, vol. 2015, 034 p.

### Авторы

**Большакова Катерина Александровна**, научный сотрудник, лаборатория гравитации, космологии, астрофизики, Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова, пл. Ленина, д. 4/5, Ульяновск, 432071, Россия.

E-mail: bolshakova.ktrn@gmail.com

**Червон Сергей Викторович**, д.ф.-м.н., профессор, кафедра физики и технических дисциплин, УлГПУ им. И.Н. Ульянова, г. Ульяновск, 432071, Россия; профессор кафедры физики МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, 105005, Россия; ведущий научный сотрудник, Институт физики, КФУ, г. Казань, 420008, Россия.

E-mail: chervon.sergey@gmail.com

**Фомин Игорь Владимирович**, д.ф.-м.н., профессор, Кафедра физики, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), ул. 2-я Бауманская, д. 5, Москва, 105005, Россия.

E-mail: ingvor@inbox.ru

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Большакова К. А., Червон С. В., Фомин И. В. Решения в скалярно-торсионной теории гравитации для степенной эволюции скалярного поля. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2024. № 1. С. 27–32.

**Authors**

**Bolshakova Katerina Alexandrovna**, researcher, laboratory of gravitation, cosmology, astrophysics, Ulyanovsk State Pedagogical University, Lenin's square, 4/5, Ulyanovsk, 432071, Russia.

E-mail: bolshakova.ktrn@gmail.com

**Chervon Sergey Viktorovich**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of physics and technical disciplines, USPU, Ulyanovsk, 432071, Russia; Professor of Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia; Leading Researcher, Institute of Physics, KFU, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: chervon.sergey@gmail.com

**Fomin Igor Vladimirovich**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Physics Department, Bauman Moscow State Technical University, 2-nd Baumanskaya street 5, Moscow, 105005, Russia.

E-mail: ingvor@inbox.ru

**Please cite this article in English as:**

Bolshakova K. A., Chervon S. V., Fomin I. V. Solutions in the scalar-torsion theory of gravity for the power evolution of the scalar field. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2024, no. 1, pp. 27–32.