

УДК 512.7 , 512.64

© Цыплова И. Е., Глухова Н. В., Голубков А. В., 2023

МОДИФИКАЦИЯ КВАТЕРНИОННОГО МЕТОДА ОПИСАНИЯ ПОВОРОТОВ С ПОМОЩЬЮ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙЦыплова И. Е.^{a,1}, Глухова Н. В.^{a,2}, Голубков А. В.^{a,3}^a Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова, г. Ульяновск, 432071, Россия.

Кватернионы являются достаточно новым инструментом физических исследований, которые позволяют решить ряд новых задач (например, в описании спиноров в квантовой механике). В работе рассматривается важная для физики задача – задача описания поворотов векторов в трехмерном пространстве вокруг заданной оси. Известный метод описания поворотов с помощью кватернионов модифицируется путем разложения поворачиваемого вектора на его проекцию на ось вращения и ортогональную составляющую. Такой подход значительно упрощает вычисления, позволяет избежать двойного умножения на кватернион, вычисления обратного кватерниона и не требует использования половинного угла вращения. Преимущества метода демонстрируются с помощью параллельного решения одной и той же задачи двумя методами.

Ключевые слова: Вращения в пространстве, вектор, ортогональная проекция, ортогональная составляющая, кватернионы.

MODIFICATION OF QUATERNION METHOD OF 3D-ROTATION DESCRIPTION BY MEANS OF ORTHOGONAL PROJECTIONSTsyplova I. E.^{a,1}, Glukhova N. V.^{a,2}, Golubkov A. V.^{a,3}^a Ulyanovsk State University of Education, Ulyanovsk, 432071, Russian.

Quaternions are very important as a tool of scientific research in physics (quantum mechanics, physics of solid bodies, theory of relativity). In particular they help to describe rotations in spaces. The report is concerned with the problem of description of 3D space rotation of vectors around given axis. The known method of description of the rotations by means of quaternions is based on left-multiplication of the rotated vector by special quaternion q and right-multiplication of the result by its inverse (q^{-1}). We modified the method with the help of decomposition of rotated vector into its orthogonal projection and orthogonal component. As operator of rotation is linear, each part can be rotated separately, but the projection should not be modified, and orthogonal component can be rotated with the help of only left-multiplication and without division of the angle of rotation by 2. The only things one should do to find the quaternion-multiple for the rotation is to normalize any vector lying on the axis of rotation (p) and use the formula $q = \cos \varphi + p \sin \varphi$ (φ – is the angle of rotation). This approach simplifies calculations, which is evident from certain example solved by both methods. The result can be useful to researchers aimed to find the results of some 3D rotations even without special digital devices.

Keywords: 3D space rotation, vectors, orthogonal projection, orthogonal component, quaternions.

PACS: 02.10

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2023.2.47-53

¹E-mail: irina_cyplova@mail.ru²E-mail: gluhovanatalya2305@yandex.ru³E-mail: kr8589@yandex.ru

Введение

Кватернионы являются сравнительно новым, но уже зарекомендовавшим себя математическим инструментом современной физики. С помощью кватернионов удалось достигнуть прогресса в описании такого понятия квантовой механики, как спинор [1–3]. Понятие кватернионных пространств оказывается плодотворным в применении к описанию целого ряда физических объектов – от систем отсчета до полей и собственно пространств [4]. Одним из простейших, но весьма иллюстративных примеров применения кватернионов является описание ньютоновской механики в системе отсчета наблюдателя, представленной кватернионным репером. В частности, для произвольно вращающейся системы отсчета, неинерциальное движение которой складывается из ускоренных трансляций тела отсчета и любых вращений координатных осей, удобным оказывается рассмотрение кватернионных базисов (Q-триад) направляющих оси координат, и их поворотов. Более глубокий кватернионный анализ позволяет описывать и ситуацию с ускоренным движением тела отсчета наблюдателя [4]. Именно на языке кватернионов Дж. Максвелл впервые записал свои уравнения электродинамики, и оказалось, что записанные в кватернионной форме вакуумные уравнения Максвелла являются аналогом условий Коши-Римана, то есть записав уравнение типа Коши-Римана, обобщающее условия аналитичности функции комплексного переменного на функцию гиперкомплексного переменного, можно получить в точности систему уравнений электродинамики Максвелла [4]. В работе [5] показано, что преобразование Хопфа можно удобно представить в терминологии кватернионов. Очень удобным оказывается описание понятий дифференциальной геометрии в физике с применением кватернионов, таких как кручение [4] и сравнительно простого вывода соотношений сферической геометрии [4, 6].

Широкое распространение получили кватернионы при описании поворотов в решении физических задач (кинематических задач ориентации твердого тела [6]. Квантово-механические результаты, основанные на теории кватернионов нашли и практическое применение в астрономии [7].

Решение задачи описания поворотов вектора вокруг оси в пространстве аналитическими методами весьма сложна. Одним из возможных подходов к решению таких задач является операторный метод [8] (когда вектор умножается на матрицу некоторого унитарного оператора, но для нахождения матрицы оператора необходимо найти результаты поворота трех базисных векторов, что тоже требует немалых усилий). И.Л. Кантором, А.С. Солодовниковым [9] был предложен метод описания поворотов при помощи кватернионов.

В этой работе показано, что если p – это некоторый нормированный вектор (т.е. вектор, длина которого равна 1), а v – это произвольный вектор, который перпендикулярен вектору p , то умножением v слева на кватернион $q = \cos \varphi + p \sin \varphi$ осуществляется поворот вектора v вокруг оси p на угол φ .

Действительно, если $q = a + bi + cj + dk$ – это произвольный кватернион, модуль которого равен 1, то $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

Запишем, что $q = a + q'$, где q' – это вектор $bi + cj + dk$. Из того, что $|a|^2 + |q'|^2 = 1$ следует существование такого угла φ , что $a = \cos \varphi$, $|q'| = \sin \varphi$.

Очевидно, что $q' = |q'|p$, где p есть вектор длины 1. Значит, $q = \cos \varphi + p \sin \varphi$.

Теперь умножим кватернион q на некоторый векторный кватернион v , причём рассмотрим тот случай, когда вектор v перпендикулярен вектору p . Получаем:

$$qv = (\cos \varphi + p \sin \varphi)v = v \cos \varphi + pv \sin \varphi.$$

Так как p перпендикулярен v , то произведение pv имеет действительную часть, равную нулю, а векторная часть равна вектору длины $|p||v| \sin \frac{\pi}{2} = |v|$, который перпендикулярен p и v и ориентирован относительно p и v тем же образом, что ориентирован и вектор k относительно i и j . Обозначим этот вектор через u . Можно сказать, что вектор u получается из v поворотом вокруг вектора p на $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, получаем следующее равенство: $qv = v \cos \varphi + u \sin \varphi$. Договоримся,

что поворот вокруг p – это поворот в том направлении, в котором осуществляется кратчайший поворот от i к j (вокруг k) – это правило обычно известно как «правило правой руки».

Таким образом, приходим к выводу, что вектор qv получается поворотом вектора v на угол φ вокруг оси вектора p . Однако, такое правило работает не для произвольного вектора, а лишь для вектора v , который перпендикулярен p .

Для того, чтобы представить в кватернионной форме поворот вокруг оси p вообще любого вектора v , необходимо усложнить действия над вектором v . Нужно заменить обычное умножение на q слева более сложным выражением qvq^{-1} , где q^{-1} является кватернионом, обратным q , то есть таким, что $qq^{-1} = 1$.

$$q^{-1} = \cos \varphi - p \sin \varphi, \text{ так как}$$

$$(\cos \varphi + p \sin \varphi)(\cos \varphi - p \sin \varphi) = \cos^2 \varphi - p^2 \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

$$qvq^{-1} = qv \cos \varphi + qu \sin \varphi.$$

Правая часть равенства – это вектор, который получен из qv поворотом на угол φ вокруг оси p . А так как вектор qv получается из v тем же поворотом, что и qvq^{-1} из вектора qv , то вектор qvq^{-1} получается из v поворотом на угол 2φ вокруг оси p .

Итак, произвольный вектор v при повороте на угол 2φ вокруг оси p переходит в вектор qvq^{-1} , где $q = \cos \varphi + p \sin \varphi$ [9]. При этом необходимо не забыть поделить реальный угол поворота на 2, что достаточно часто существенно усложняет вычисления (например, вместо поворота на табличный угол 45° приходится выполнять вычисления с углом $22,5^\circ$ и т.п.).

Но этот способ является весьма громоздким. В ходе решения задачи этим методом приходится осуществлять сложные вычисления, в результате которых можно допустить много арифметических ошибок.

1. Результаты и обсуждение

В настоящей работе мы предлагаем другой, более рациональный с нашей точки зрения, способ решения задач данного типа. Идея метода состоит в нахождении проекции вращаемого вектора на ось вращения и разложении его на сумму ортогональной проекции и ортогональной составляющей. В силу линейности операции вращения [10] можно осуществить поворот каждого слагаемого отдельно. Но очевидно, что результатом вращения ортогональной проекции (как вектора лежащего на оси вращения) будет сам этот вектор. Поэтому проекция при повороте не изменится. Ортогональная же составляющая как раз будет являться вектором, ортогональным к оси вращения, поэтому для описания поворота ортогональной составляющей достаточно будет применить умножение на кватернион слева, как это описано выше. Нахождение ортогональной проекции и ортогональной составляющей осуществляется при помощи алгоритма, описанного в работах Проскурякова И.В. [11], Шевцова Г.С. [12]. Сравним оба способа решения на примере нахождения результата поворота вектора $x(1, 3, 5)$ вокруг вектора $y(-1, 0, 1)$ на угол $\frac{\pi}{2}$.

Задача. Дан вектор $x(1, 3, 5)$. Найти координаты вектора t , который получится при повороте вектора x на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг вектора $y(-1, 0, 1)$.

Предварительно проверим, не являются ли векторы x и y ортогональными. Очевидно, что их скалярное произведение (вычисленное стандартным образом: $(x, y) = 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 1 = -1 + 5 = 4$ не равно 0, следовательно, векторы не ортогональны.

Далее нужно нормировать вектор $y(-1, 0, 1)$. Для этого разделим его на его норму, которая равна $\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$$y = \sqrt{2} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}i + \frac{0}{\sqrt{2}}j + \frac{1}{\sqrt{2}}k \right)$$

$$\text{Примем за ось вращения вектор } q = \frac{-1}{\sqrt{2}}i + \frac{0}{\sqrt{2}}j + \frac{1}{\sqrt{2}}k.$$

Так как векторы x и y не ортогональны, искомый вектор $t = qxq^{-1}$. Здесь q^{-1} – кватернион, обратный q .

$$\begin{aligned} q &= \cos \varphi + p \sin \varphi = \cos \frac{\pi}{4} + \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}i + \frac{0}{\sqrt{2}}j + \frac{1}{\sqrt{2}}k \right) \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}i + 0j + \frac{1}{\sqrt{2}}k \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q^{-1} &= \cos \varphi - p \sin \varphi = \cos \frac{\pi}{4} - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}i + \frac{0}{\sqrt{2}}j + \frac{1}{\sqrt{2}}k \right) \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}i + 0j + \frac{1}{\sqrt{2}}k \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}k. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся правилом умножения кватернионов и таблицей умножения мнимых единиц и получим следующее:

$$\begin{aligned} qxq^{-1} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}k \right) \cdot (i + 3j + 5k) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}k \right) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{1}{2}i^2 + \frac{1}{2}ki + \frac{3\sqrt{2}}{2}j - \frac{3}{2}ij + \frac{3}{2}kj + \frac{5\sqrt{2}}{2}k - \frac{5}{2}ik + \frac{5}{2}k^2 \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}k \right) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}j + \frac{3\sqrt{2}}{2}j - \frac{3}{2}k - \frac{3}{2}i + \frac{5\sqrt{2}}{2}k + \frac{5}{2}j - \frac{5}{2} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}k \right) = \\ &= \left(-2 + \frac{\sqrt{2}-3}{2}i + \frac{3\sqrt{2}+6}{2}j + \frac{5\sqrt{2}-3}{2}k \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}k \right) = \\ &= -\sqrt{2} + \frac{2-3\sqrt{2}}{4}i + \frac{6+6\sqrt{2}}{4}j + \frac{10-3\sqrt{2}}{4}k - i + \frac{\sqrt{2}-3}{4}i^2 + \frac{3\sqrt{2}+6}{4}ji + \\ &+ \frac{5\sqrt{2}-3}{4}ki + k - \frac{\sqrt{2}-3}{4}ik - \frac{3\sqrt{2}+6}{4}jk - \frac{5\sqrt{2}-3}{4}k^2 = \\ &= -\sqrt{2} + \frac{2-3\sqrt{2}}{4}i + \frac{6+6\sqrt{2}}{4}j + \frac{10-3\sqrt{2}}{4}k - i - \frac{\sqrt{2}-3}{4} - \frac{3\sqrt{2}+6}{4}k + \\ &+ \frac{5\sqrt{2}-3}{4}j + k + \frac{\sqrt{2}-3}{4}j - \frac{3\sqrt{2}+6}{4}i + \frac{5\sqrt{2}-3}{4} = \\ &= \frac{-4\sqrt{2}-\sqrt{2}+3+5\sqrt{2}-3}{4} + \frac{2-3\sqrt{2}-4-3\sqrt{2}-6}{4}i + \\ &+ \frac{6+6\sqrt{2}+5\sqrt{2}-3+\sqrt{2}-3}{4}j + \frac{10-3\sqrt{2}-3\sqrt{2}-6+4}{4}k = \\ &= \frac{-8-6\sqrt{2}}{4}i + \frac{12\sqrt{2}}{4}j + \frac{8-6\sqrt{2}}{4}k = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2 \right) i + 3\sqrt{2}j + \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2 \right) k. \end{aligned}$$

Значит, вектор t имеет координаты $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2, 3\sqrt{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2 \right)$.

Второй способ: Разложим наш вектор x на два слагаемых: $x = w + z$, где вектор w коллинеарен оси вращения $y(w = cy)$, а z – ортогонален ей (вектор z – ортогональная составляющая, а вектор w – ортогональная проекция).

$$x = cy + z$$

Подставим полученные выражения в формулу нахождения скалярного произведения двух векторов и преобразуем:

$$(x, y) = (cy + z, y) = c(y, y) + (z, y).$$

Так как z и y — ортогональны, последнее слагаемое равно 0. Следовательно, $(x, y) = c(y, y)$.

Т.к. скалярное произведение $(x, y) = 4$, а $(y, y) = 2$, получим $4 = 2c$. Значит, $c = 2$.

Тогда $w = 2(-1, 0, 1) = (-2, 0, 2)$, $z = x - w = (1, 3, 5) - (-2, 0, 2) = (3, 3, 3)$.

При вращении суммы векторов слагаемое z поворачивается вокруг оси $q = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i + 0j + k)$ на угол равный $\frac{\pi}{2}$, а слагаемое w не изменяется (как лежащее на оси вращения).

В таком случае результат поворота можно найти как

$$\begin{aligned} qz + w &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-i + k)(3i + 3j + 3k) + (-2i + 2k) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-3i^2 - 3ij - 3ik + 3ki + 3kj + 3k^2) + (-2i + 2k) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(3 - 3k + 3j + 3j - 3i - 3) + (-2i + 2k) = \\ &= -\frac{3}{\sqrt{2}}i + \frac{6}{\sqrt{2}}j - \frac{3}{\sqrt{2}}k - 2i + 2k = \frac{-3 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}i + \frac{6}{\sqrt{2}}j + \frac{-3 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}k = \\ &= \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\right)i + 3\sqrt{2}j + \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2\right)k \end{aligned}$$

Значит, искомым вектор t имеет координаты $(-\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2, 3\sqrt{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2)$.

Очевидно, что второй способ требует существенно меньше вычислений. Однако, нельзя исключать и первый способ, например, для автоматических систем. Если умножение на кватернион осуществлять при помощи матриц на ЭВМ (матричный метод умножения можно найти в работе Мальцева [8, С. 93]), то алгоритмическая реализация первого способа может оказаться более простой, чем у второго. Так ли это на самом деле, является вопросом для дальнейшего исследования.

Заключение

Кватернионы являются полезным и эффективным инструментом для математического описания пространственных поворотов, что необходимо для решения ряда физических задач. Каждому повороту можно сопоставить кватернион единичной длины в своего рода "тригонометрической форме" — аргументом служит угол поворота, а в качестве "мнимой единицы" выступает единичный вектор, лежащий на оси вращения. В таком случае, результат поворота удобно вычисляется путем разложения вращаемого вектора на ортогональную проекцию на ось вращения (которая при вращении остается неизменной) и ортогональную составляющую (результат поворота которой можно вычислить, умножив ее на соответствующий повороту кватернион).

Список литературы

1. Ефремов А.П. О физико-математической аналитике и реальности фрактального пространства. *Метафизика*, 2018. № 1 (27). С. 107–115.
2. Ефремов А.П., Глухова Н.В. Некоторые обобщения сведений о кватернионах как инструменте физических исследований // Электронный сборник трудов научно-методического семинара по теоретической и математической физике. Ульяновск, УлГПУ, 2014. С. 26–42.
3. Yefremov A.P. Orthogonal representation of complex numbers. *Gravitation and Cosmology*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 137–139.
4. Ефремов А.П. *Кватернионные пространства, системы отсчета и поля*. М.: Издательство РУДН, 2005. 373 с.
5. Каминский А.В. О скрытой природе спина. *Квантовая Магия*. 2005. Т. 2. Вып. 2. С. 2114–2131.

6. Баранец В.Н., Шмыглевский И.П. *Применение кватернионов в задачах ориентации твёрдого тела*. М.: Наука, 1973. 322 с.
7. Yefremov A.P. Quaternion frames and fractal surface as tools to control orientation of a spacecraft. *Acta Astronautica*, 2016, vol. 129, pp. 174–178. (in Russ.)
8. Мальцев А.И. *Основы линейной алгебры*. СПб.: Лань, 2009. 480 с.
9. Кантор И.Л., Солодовников А.С. *Гиперкомплексные числа*. М.: Наука, 1973. 144 с.
10. Глухова Н.В. *Линейные операторы*. Ульяновск: УлГПУ им. И.Н. Ульянова, 2016. 18 с.
11. Проскуряков И.В. *Сборник задач по линейной алгебре. Учебное пособие*. 13-е изд., стер. СПб.: Издательство «Лань», 2010. 480 с.
12. Шевцов Г.С. *Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты*. М.: Финансы и статистика, 2003. 576 с.

References

1. Yefremov A.P. Physical and mathematical analytic and reality of the fractal space. *Metaphysics*, 2018, no. 1 (27), pp. 107–115. (in Russ.)
2. Yefremov A.P., Glukhova N.V. Some generalization of information about quaternions as a tool in physics research. *Digital collection of proceedings of scientific seminar on theoretic and mathematical physics*. Ulyanovsk, UIGPU named after I.N. Ulyanov Publ., 2014. pp. 26–42.
3. Yefremov A.P. Orthogonal representation of complex numbers. *Gravitation and Cosmology*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 137–139.
4. Yefremov A.P. *Quaternion spaces, frames of references and fields*. Moscow, RUDN Publ., 2005. 373 p.
5. Kaminsky A.V. On secret nature of spin. *Quantum magic*, 2005 (2), vol. 2, pp. 2114–2131. (in Russ.)
6. Baranec V.N., Shmygelevskiy I.P. The usage of quaternions in problem of orientation of solid body. Moscow, Nayka Publ., 1973. 322 p. (in Russ.)
7. Yefremov A.P. Quaternion frames and fractal surface as tools to control orientation of a spacecraft. *Acta Astronautica*, 2016, vol. 129, pp. 174–178.
8. Mal'tsev A.I. Basics of linear algebra. St-Petersburg., Lan' Publ., 2009. 480 p. (in Russ.)
9. Kantor I.L., Solodovnikov A.S. *Hypercomplex numbers*. Moscow, Nauka Publ., 1973. 144 p. (in Russ.)
10. Glukhova N.V. Linear operators. Ulyanovsk, UIGPU named after I.N. Ulyanov, 2016. 18 p. (in Russ.)
11. Proskuryakov I.V. Collection of problems on linear algebra. St-Petersburg., Lan' Publ., 2010. 480 p.
12. Shevtsov G.S. Linear algebra: theory and applied aspects. Moscow, Finances and statistics Publ., 2003. 576 p. (in Russ.)

Авторы

Цыплова Ирина Евгеньевна, магистрант факультета физико-математического и технологического образования, Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова, площадь Ленина, дом 4/5, г. Ульяновск, 432071, Россия.

E-mail: irina_cyplova@mail.ru

Глухова Наталья Владимировна, канд. биол. наук., доцент кафедры высшей математики, Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова, площадь Ленина, дом 4/5, г. Ульяновск, 432071, Россия.

E-mail: gluhovanatalya2305@yandex.ru

Голубков Алексей Владимирович, старший преподаватель кафедры высшей математики, Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова, площадь Ленина, дом 4/5, г. Ульяновск, 432071, Россия.

E-mail: kr8589@yandex.ru

Просьба сослаться на эту статью следующим образом:

Цыплова И. Е., Глухова Н. В., Голубков А. В. Модификация кватернионного метода описания поворотов с помощью ортогональных проекций. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2023. № 2. С. 47–53.

Authors

Tsyplova Irina Evgenyevna, student of faculty of physics, mathematics and technology education, Ulyanovsk State University of Education, V.I. Lenin 100 Anniversary Square, 4, Ulyanovsk, 432071, Russian.

E-mail: irina_cyplova@mail.ru

Glukhova Natalya Vladimirovna, Candidate of Biological Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State University of Education, V.I. Lenin 100 Anniversary Square, 4, Ulyanovsk, 432071, Russian.

E-mail: gluhovanatalya2305@yandex.ru

Golubkov Aleksey Vladimirovich, Senior Lecturer, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State University of Education, V.I. Lenin 100 Anniversary Square, 4, Ulyanovsk, 432071, Russian.

E-mail: kr8589@yandex.ru

Please cite this article in English as:

Tsyplova I. E., Glukhova N. V., Golubkov A. V. Modification of quaternion method of 3D-rotation discription by means of orthogonal projections. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2023, no. 2, pp. 47–53.