ГРАВИТАЦИЯ, КОСМОЛОГИЯ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОЛЯ

***

УДК 514.763

ПРОЕКТИВНЫЕ СИММЕТРИИ ПЯТИМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Аминова А. В.[a,1], Хакимов Д. Р.[a,2]

[a] Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия.

Представлен обзор инвариантно-групповых методов в 5-мерных теориях электромагнитного, гравитационного и других физических полей. Обсуждаются симметрии пятимерных искривленных пространств в форме групп Ли бесконечно малых преобразований, в том числе в форме проективных движений, сохраняющих геодезические. Исследуются 5-мерные жесткие h-пространства H_{221}, H_{32}, H_{41} и H_5, т.е. псевдоримановы многообразия (M^5, g) произвольной сигнатуры с (невырожденной) характеристикой Сегре $\chi = \{r_1, ..., r_k\}$, $r_1, ..., r_k \in N$, $r_1 + ... + r_k = 5$, и вещественными собственными значениями производной Ли $L_X g$ метрики g в направлении инфинитезимального преобразования X, допускающие инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования. Для каждого из них определяются структуры соответствующих максимальных проективной и аффинной алгебр Ли, включая классификацию h-пространств H_{221} типа $\{221\}$ по максимальным алгебрам Ли проективных и аффинных преобразований, более широким, чем алгебры Ли гомотетий.

Ключевые слова: Калуца — Клейн, гравитация, электромагнитное поле, дифференциальная геометрия, пятимерное псевдориманово многообразие, h-пространства H_{221}, H_{32}, H_{41}, H_5, системы дифференциальных уравнений с частными производными, негомотетическое проективное движение, уравнения Киллинга, проективная алгебра Ли.

PROJECTIVE SYMMETRIES OF FIVE-DIMENSIONAL SPACES

Aminova A. V.[a,1], Khakimov D. R.[a,2]

[a] Kazan State University, Kazan, 420008, Russia.

A review of invariant-group methods in 5-dimensional theories of electromagnetic, gravitational and other physical fields is presented. The symmetries of the five-dimensional curved spaces in the form of Lie groups of infinitesimal transformations, in particular, in the form of projective motions which preserve geodesics are discussed. The 5-dimensional rigid h-spaces H_{221}, H_{32}, H_{41} and H_5, i.e. pseudo-Riemannian manifolds (M^5, g) of arbitrary signature with (non-degenerate) Segre characteristic $\chi = \{r_1, ..., r_k\}$, $r_1, ..., r_k \in N$, $r_1 + ... + r_k = 5$, and real eigenvalues of the Lie derivative $L_X g$ of the metric g in the direction of the infinitesimal transformation X are investigated, which admit (non-homothetic) infinitesimal projective and affine transformations, and for each of them the structure of the corresponding maximal projective and affine Lie algebras are determined; the classification of h-spaces H_{221} of type $\{221\}$ on maximal Lie algebras of projective and affine transformations, wider than the Lie algebras of homotheties, is obtained.

Keywords: Kaluza — Klein, gravity, electromagnetic field, differential geometry, five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, h-spaces H_{221}, H_{32}, H_{41}, H_5, systems of partial differential equations, non-homothetical projective motion, the Killing equations, projective Lie algebra.

[1] E-mail: asya.aminova@kpfu.ru
[2] E-mail: dzhamoliddink@mail.ru

PACS: 11.10.Kk, 04.50.+h, 04.50.-h, 02.40-k, 02.20.Sv
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2023.2.4-27

Введение

Работа посвящена обзору инвариантно-групповых методов в 5-мерных теориях электромагнитного, гравитационного и других физических полей. Обсуждается имеющая многочисленные геометрические и физические приложения проблема исследования многомерных псевдоримановх многообразий, допускающих алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований, более широкие, чем алгебры Ли инфинитезимальных гомотетий.

Проективное преобразование псевдориманова многообразия M^n с проективной структурой П сохраняет проективную структуру П и переводит геодезические линии снова в геодезические [1,56].

Векторное поле X на псевдоримановом многообразии (M, g) с проективной структурой П называется бесконечно малым проективным преобразованием, или проективным движением, если локальная однопараметрическая группа локальных преобразований, порожденная этим полем в окрестности каждой точки $x \in M$, состоит из (локальных) проективных преобразований, т. е. автоморфизмов проективной структуры П.

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы $X = \xi^i \partial_i$ было проективным движением на псевдоримановом многообразии (M, g), является равенство

$$(L_X g_{ij})_{,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}, \tag{I}$$

где φ – функция от x^i, называемая определяющей функцией проективного движения X [1].

Уравнение (I) можно записать в виде двух соотношений:

$$L_X g_{ij} \equiv \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = h_{ij} \tag{II}$$

(обобщенное уравнение Киллинга) и

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i} \tag{III}$$

(уравнение Эйзенхарта). Если $\varphi = \mathrm{const}$, то есть $\mathrm{div}X = \mathrm{const}$, то векторное поле X сохраняет аффинную связность и, следовательно, является бесконечно малым аффинным преобразованием, или аффинным движением.

Аффинное движение X является бесконечно малой гомотетией, или гомотетическим движением, если $h_{ij} = \mathrm{const} \cdot g_{ij}$, и бесконечно малой изометрией, или изометрическим движением, если $h_{ij} = 0$ [1].

1. Проективные преобразования многомерных пространств

Теория групп проективных преобразований псевдоримановых пространств является одним из активно развивающихся разделов дифференциальной геометрии, имеющих приложения в теоретической и математической физике, в теории дифференциальных уравнений и анализе.

Проективные преобразования систематически возникают при исследовании симметрий уравнений математической физики. Достаточно упомянуть, что алгебра Ли инфинитезимальных точечных симметрий уравнения Кортевега-де Фриза является подалгеброй проективной, точнее, аффинной алгебры Ли, а уравнение Риккати можно рассматривать как "своеобразную реализацию" группы проективных преобразований на прямой [2].

Концепция теории групп была предложена Э. Галуа во время его работы над алгебраическими проблемами. К. Джордан нашел дальнейшее применение теории групп. Теория непрерывных групп была основана Софусом Ли. Исследуя возможность использования расширенных методов Галуа для решения задач, связанных с интегрированием дифференциальных уравнений, Ли обнаружил новый тип групп, которые он назвал непрерывными группами преобразований (в наше время они называются группами Ли).

Впервые задача определения римановых пространств V^n, допускающих непрерывные группы проективных преобразований, рассматривалась С. Ли и затем учеником Г. Дарбу М. Кёнигсом для случая двумерных поверхностей. Дальнейшее развитие теории проективных преобразований и проективных движений (инфинитезимальных проективных преобразований) в пространствах с линейной связностью связано с именами многих известных математиков – Э. Картан, Л.П. Эйзенхарт, М.С. Кнебельман, И.А. Схоутен, К. Яно, И.П. Егоров, Г. Врэнчану, Ш. Кобаяси и др.

Проблема проективных преобразований в V^n тесно примыкает к проблеме геодезических отображений псевдориманывых пространств, которая в разное время рассматривалась Е. Бельтрами, У. Дини, Т. Леви-Чивита, Г. Фубини, Л.П. Эйзенхартом, П.А. Широковым. А.З. Петровым, Н.С. Синюковым, А.С. Солодовниковым, В.И. Голиковым, Г.И. Кручковичем, А.В. Аминовой и др. [1].

Как известно, в пространствах постоянной кривизны S^n проективная группа совпадает локально с проективной группой псевдоевклидова пространства, т.е. с группой дробно-линейных подстановок, и зависит от $n(n+2)$ параметров.

В пространствах V^n непостоянной кривизны порядок проективной группы не превосходит число $n(n-2)+5$ [8], причем в большинстве случаев эта группа состоит из преобразований подобия (гомотетий) или изометрий.

В 1903 г. в "Записках Туринской Академии наук" вышла работа Г. Фубини "О группах геодезических преобразований" [9], которая положила начало систематическому определению и изучению пространств с положительно определенными метриками, допускающих проективную группу более широкую, чем группа гомотетий. Позже А. С. Солодовников ([10], 1956 г.) продолжил исследования Г. Фубини; в трудах Фубини и Солодовникова содержится классификация собственно римановых пространств V^n, $n \geq 3$, по (локальным) группам проективных преобразований, более широким, чем группы гомотетий.

Выводы Фубини и Солодовникова опираются на предположение о положительной определенности рассматриваемых метрик. Снятие условия знакоопределенности значительно усложняет задачу и требует принципиально нового подхода к ее решению (см., например, [11–19, 33–36]).

В 1987 г. вышла работа А. В. Аминовой [37] (см. также [38]), где в рамках метода подвижного репера была развита техника косонормального репера, которая дала ключ к решению задачи в псевдоримановых пространствах общего вида. В работах А.В. Аминовой [11–19] были найдены все лоренцевы многообразия размерности $n \geq 4$, допускающие негомотетические инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования, и для каждого из них – максимальная проективная и аффинная алгебра Ли, включая гомотетическую и изометрическую подалгебры.

Подобная задача для псевдоримановых пространств произвольной сигнатуры ранее не рассматривалась.

Поэтому представленное в данной работе исследование проективно-групповых свойств пятимерных псевдоримановых пространств общей сигнатуры в случае невырожденной характеристики Сегре производной Ли метрического тензора (так называемых жестких h-пространств) является актуальной задачей, имеющей важное теоретическое и прикладное значение.

2. Инвариантно-групповые методы в 5-мерных теориях физических полей

В теоретической физике за последние годы значительно возрос интерес к использованию геометрических свойств многомерных, в частности, 5-мерных пространств.

В 1919 г. Т. Калуцей была предложена идея геометризации электромагнитного поля в духе эйнштейновской теории тяготения с помощью увеличения на единицу числа пространственных координат; сейчас в литературе 5-мерная теория называется теорией Калуцы–Клейна. Заслуга Клейна состоит в обобщении линеаризованного варианта теории Калуцы на общий случай.

В теории Калуцы–Клейна мир описывается 5-мерным псевдоримановым пространственно-временным многообразием с квадратичной дифференциальной формой

$$dI^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, ..., 5). \tag{2.1}$$

Пятнадцать компонент 5-мерного метрического тензора определяют десять компонент 4-мерного метрического тензора и четыре компоненты векторного электромагнитного потенциала. Оставшаяся пятнадцатая компонента метрического тензора описывает некоторое скалярное поле.

В качестве уравнений поля используются 5-мерные уравнения Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R + \tilde{\Lambda}g_{\alpha\beta} = \chi Q_{\alpha\beta}, \tag{2.2}$$

где $Q_{\alpha\beta}$ есть 5-мерный тензор энергии-импульса внешней материи. Из этих уравнений следуют аналоги 4-мерных уравнений Эйнштейна с тензором энергии-импульса электромагнитного поля и уравнения Максвелла. В качестве уравнений движения частиц берутся 5-мерные уравнения геодезических

$$\frac{d^2x^\alpha}{dI^2} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{dI}\frac{dx^\gamma}{dI}, \tag{2.3}$$

где $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ — 5-мерные символы Кристоффеля. Теории с размерностью пространства больше пяти и с полевыми уравнениями, аналогичными уравнениям Эйнштейна, называются теориями типа Калуцы — Клейна.

В 1921 году Калуца и Клейн показали, что при определенных условиях (таких как цилиндричность: $\partial g_{ij}/\partial x^5 = 0, i, j = 1, \ldots, 4$) добавление 5-го измерения может объяснить появление электромагнитного поля. Проблема заключается в том, что хотя сама модель является геометрической, условия типа цилиндричности не являются геометрическими. Эта проблема была частично решена Эйнштейном и Бергманом, которые в своей статье 1938 года предположили, что пятое измерение компактифицируется в небольшую окружность S^1, так что в полученном цилиндрическом 5D пространстве-времени $R^4 \times S^1$ зависимость от x^5 макроскопически незаметна.

В работе [39] было показано, что если во всех определениях векторов, тензоров и т.д. заменить R^4 на $R^4 \times S^1$, то условия типа цилиндричности станут полностью геометрическими.

В работе А.П. Трунева [40] была развита модель фундаментальных взаимодействий на основе теории Калуцы – Клейна в 5-мерном пространстве.

В работах [41] и [42] рассматривается (4+d)-мерное пространство–время с топологией $T \times V^3 \times V^d$, где V^3 и V^d – однородные и изотропные подпространства, причём V^d (внутреннее подпространство) компактно. Выбран упрощенный сценарий эволюции рассматриваемой модели: задается временная зависимость масштабных факторов подпространств V^3 и V^d, приближенно соответствующая полученным ранее решениям уравнений Эйнштейна. На этом фоне исследуются возмущения метрики с одним индексом 4-мерного подпространства $T \times V^3$ и одним индексом внутреннего подпространства V^d. Сжатие масштаба внутреннего пространства (что необходимо для согласования с наблюдениями в настоящее время) приводит к возникновению в 4-мерном физическом пространстве массивных полевых мод рассматриваемых возмущений, которые гипотетически связываются с наличием темной реликтовой материи во Вселенной.

Теорема о соответствии теории Калуцы–Клейна 4-мерной эйнштейновской теории гравитации, взаимодействующей с электромагнетизмом, доказана в [43]. Получено точное решение вакуумных уравнений Эйнштейна в 5-мерном пространстве, представляющее собой решение Боннора 4-мерной теории Эйнштейна–Максвелла. Найденное решение описывает массивный источник, обладающий магнитным и дипольным моментами.

Стабильность вакуумных решений многомерных уравнений Эйнштейна (а значит, сохранение планковских размеров внутреннего пространства) в механизме спонтанной компактификации за счет эффекта Казимира достигается путем чрезмерного увеличения числа полей внешней материи.

Для преодоления этого недостатка в [44] предложено использовать механизм нарушения калибровочных симметрий с помощью петель Вильсона, активно используемый в теории суперструн. Рассмотрена космологическая модель

$$ds^2 = dt^2 - a_{ij}^2(t)dx^i dx^j - b^2(t)(dx^5)^2 \qquad (i, j = 1, ..., 3),$$

содержащая внешние $SU(2)$-калибровочные поля и взаимодействующие с ними спиноры. В правой части 5-мерных уравнений Эйнштейна содержится тензор энергии–импульса, соответствующий однопетлевым вакуумным флуктуациям спинорных и калибровочных полей. Полученная из 5-мерных уравнений Эйнштейна система уравнений для параметров $a(t)$ и $b(t)$ допускает стабильное решение при сравнительно малом числе спинорных полей.

В статье [45] рассматривается 5-мерная космологическая модель с безмассовой 5-пылью в качестве источника. Зависимость от x^5 не учитывается, однако феноменологически вводится известный казимировский потенциал. Показано, что уравнения такой модели допускают решение, в котором три пространственных измерения расширяются во времени, а дополнительное измерение стягивается, причем скорость этих процессов определяется количеством 5-пыли во Вселенной. Строится обобщение на случай произвольного числа тороидальных дополнительных координат. Проводится обсуждение влияния потенциала Казимира на космологические сценарии и возможные его изменения, связанные с наличием во Вселенной тяжелых фермионов.

В статье [46] рассмотрено уравнение геодезических в 5-мерной космологии Калуцы–Клейна. В качестве основного результата декларируется установление на качественном уровне того факта, что 5-скорость и другие величины в рассматриваемом случае будут зависеть не только от времени, но и от массы частицы. При сопоставлении полученных космологических уравнений с 4-мерными уравнениями в случае материи в виде идеальной жидкости получен аналог метрики Фридмана–Робертсона–Уокера. Приводятся рассуждения о природе и динамике гравитационной постоянной.

В [47], [48] предложена новая интерпретация 5-мерной теории, согласно которой дополнительные слагаемые в 5-мерных вакуумных уравнениях Эйнштейна $G_{\alpha\beta} = 0$ для метрик вида

$$ds^2 = e^{\nu(t,\psi)}dt^2 - e^{\Omega(t,\psi)}(dx^2 + dy^2 + dz^2) - e^{\mu(t,\psi)}d\psi^2,$$

содержащих произвольные функции $\mu(t, \psi)$ и $\nu(t, \psi)$, отождествляются с правой частью соответствующего 4-мерного уравнения для идеальной жидкости:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G[(p - \rho)u_\mu u_\nu - pq_{\mu\nu}].$$

Показано, что подобное отождествление приводит к правильным зависимостям давления p и плотности ρ от времени для некоторой не зависящей от ψ метрики (5-мерная метрика де Леона), являющейся решением уравнений указанного вида, 4-мерный сектор которой соответствует фридмановской модели пространственно-плоской Вселенной, заполненной излучением. Для другой предложенной в этих работах метрики выбором свободного параметра удается добиться соответствия на гиперплоскостях $\psi = \text{const}$ с пространственно-плоскими моделями Фридмана как в случае излучения, так и в случае пылевидной материи.

В общей теории относительности четырехмерное пространство-время, наделенное симметриями в форме бесконечно малых преобразований, играет исключительно важную роль.

В своей книге «Пространства Эйнштейна» проф. А.З. Петров дал классификацию четырехмерных пространств-времен на основе их (локальных) групп изометрий, то есть их алгебр Ли векторных полей Киллинга. В работе [79] обсуждались алгебраические и геометрические свойства этих алгебр Ли, были вычислены базисы пятимерных алгебр Ли векторов Киллинга, найденных в книге А.З. Петрова, и рассмотрены приложения.

В пятимерной теории Калуцы-Клейна подробно обсуждается $4D$ проекция $5D$ уравнений геодезических. Предложена классификация 5-геодезических, представленных с помощью деформированного 5-конуса. При некоторых предположениях $5D$ уравнения геодезических дают уравнения движения Лоренца для заряженной частицы. Собственная масса и собственный заряд вводятся как новые параметры частиц; предложены формулы для массы и заряда [80].

Пятимерная общая теория относительности с источниками, которые являются пятимерными точечными частицами или струнами, была исследована в качестве поучительной модели для изучения классических теорий Калуцы-Клейна. В работе [81] получены уравнения поля и уравнения движения пробной частицы, при этом внимание было уделено только тем решениям, которые изометричны в дополнительном измерении. Получены выражения для гравитационной и инерционной масс, электрического заряда и скалярной массы. Пробные частицы и источники рассматривались как нити, намотанные на компактное дополнительное измерение; одиночная нить является источником поля, которое является изометрическим или приближенно изометрическим вдоль дополнительного измерения. Предложены некоторые подходы, могущие привести к реалистичной теории Калуцы-Клейна.

В статье [82] рассматриваются векторы Киллинга в пятимерном статическом пространстве. Общие проблемы, касающиеся, в частности, существования и максимального числа векторов Киллинга, изучались в работах по геометрии (см., например, К. Яно [83]).

В физических приложениях векторы Киллинга используются во многих задачах (см., например, А. Коли и Дж. Таппер [84]), включая задачи, связанные с гравитацией.

В [124] доказан факт жесткости для групп, действующих на псевдоримановых многообразиях с сохранением непараметризованных геодезических.

В работе К.М. Буданова и А.Я. Султанова [122] получено каноническое разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования расслоения Вейля второго порядка над дифференцируемым многообразием со связностью полного лифта. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых векторное поле является инфинитезимальным аффинным преобразованием.

В работе А. Фиаловски [125] изучалось пространство модулей всех комплексных 5-мерных алгебр Ли, реализуемое как стратификация по орбифолдам, связанным скачкообразными деформациями. Орбифолды задаются действием конечных групп на простых комплексных многообразиях. Используемый метод определения стратификации основан на построении версальных деформаций алгебр Ли, которые позволяют идентифицировать естественные окрестности элементов в пространстве модулей.

В [126] показано, что подходящее двойное расширение конечномерной неразложимой контактной алгебры Ли снова является контактной алгеброй Ли. В частности, за исключением семейства 5-мерных неразложимых контактно-разрешимых алгебр Ли $A_{5,35}$, любая 5-мерная неразложимая контактно-разрешимая алгебра Ли может быть получена как двойное расширение 3-мерной алгебры Ли. Семейство $A_{5,35}$ можно обобщить на семейство $(4n+1)$-мерных неразложимых контактно-разрешимых алгебр Ли, которые не могут быть получены ни как подвес симплектической алгебры Ли коразмерности 1, ни как двойное расширение контактной подалгебры Ли коразмерности 2.

В работе Л. Галл и Т. Мохаупт [127] разработан формализм, позволяющий систематически строить суперсимметричные теории в зависимости от сигнатур пространства-времени. Используется алгебра суперсимметрии, которая получается путем удвоения спинорного представления, это позволяет обобщить симплектические майорановские спиноры. Для случая, когда спинорное представление является комплексно неприводимым, R-симметрия действует только на внутреннем пространстве. Показано, что возникающие при построении связные группы есть $SO(2)$, $SO(1,1)$, $SU(2)$ и $SU(1,1)$. В качестве приложения построены преобразования суперсимметрии и суперсимметричные лагранжианы для пятимерных векторных мультиплетов при произвольной сигнатуре (t,s). В этом случае группами R-симметрии являются $SU(2)$ или $SU(1,1)$, в зависимости от того, несет ли спинорное представление кватернионную или паракватернионную структуру. Для евклидовой сигнатуры скалярные и векторные кинетические члены различаются по относительному знаку, что согласуется с известными результатами.

Хорошо известно, что пятимерная теория Калуцы-Клейна обеспечивает геометрическую основу для объединения гравитации и электромагнетизма. Также в этой теории были найдены решения солитонного типа (см., например, Дж. Гросс и Дж. Перри [85]). Вот почему важно исследовать обобщенные векторы Киллинга в $5D$ пространствах.

В работах Ашфак Х. Бохари и Асгар Кадир [86] изучался конкретный ряд изометрических векторов Киллинга, полученных из четырехмерного линейного элемента при его определенной параметризации. Аналогичная проблема была решена Крамером Д., Стефани Х., МакКаллумом М. [87], и Э. Херлт, Рчеулишвили Г. [88], где для некоторых линейных элементов были получены генераторы групп изометрий в пятимерном пространстве.

В теориях типа Калуцы-Клейна пятимерное пространство выделяется благодаря тому, что из всех многомерных пространств именно в этом пространстве полное многообразие M^5 вместе с многообразием типа Калуцы-Клейна $M^4 \times S^1$ удовлетворяют классическим уравнениям Эйнштейна-Виттена. Отметим, что решение системы уравнений

$$\xi^k \partial_k \tilde{g}_{ij} + \tilde{g}_{ik} \partial_j \xi^k + \tilde{g}_{kj} \partial_i \xi^k = \Phi \tilde{g}_{ij}$$

для конформных векторов Киллинга приводит к более ясному пониманию природы ограничений на g_{55} для групп изометрий [89].

В [90] было исследовано поведение малых возмущений метрики Калуцы-Клейна в пятимерном пространстве-времени, получены решения уравнений для амплитуды метрических возмущений при условии постоянства возмущений в пятом направлении. Небольшие возмущения отождествляются с гравитационными волнами.

В статье [91] с помощью жордановых матриц была представлена алгебраическая классификация симметрических тензоров второго порядка в пятимерных лоренцевых пространствах типа Калуцы-Клейна. Показано, что возможными типами Сегре являются $[1,1111], [2111], [311], [z\bar{z}111]$ и их вырождения. Найден набор канонических форм для каждого типа Сегре. Также изучаются возможные непрерывные группы симметрий для каждой канонической формы.

Римановы симметрические пространства имеют следующие два класса пространств в качестве своих естественных обобщений: (A) класс GS-пространств (обобщенно-симметрические римановы пространства), (B) класс GPS-пространств (обобщенные поточечно-симметрические римановы пространства). О. Ковальский [92] показал, что отношение включения $(A) \subset (B)$ между этими двумя классами является строгим.

В работе [93] утверждается, что в размерности 5 класс (A) и класс (B) должны совпадать.

В работе [94] представлен новый подход к алгебраической классификации симметричных тензоров второго порядка в 5-мерном пространстве-времени. Найдены возможные типы Сегре для симметричного двухвалентного тензора. Получен набор канонических форм для каждого типа Сегре. Также сформулирована теорема, в которой собраны некоторые основные результаты, касающиеся алгебраической структуры тензора Риччи в 5-мерном пространстве-времени.

Существование так называемого «фантомного» скалярного поля в некотором римановом пространстве V_4, для которого эффективный тензор энер-гии-импульса $T^{(st)}$ обращается в нуль в пятимерной теории Калуцы-Клейна, исследуется с помощью условий интегрируемости соотношений вида $\Phi_{;\mu;\nu} = k\Phi_{;\mu}\Phi_{;\nu} + bg_{\mu\nu}$, найденных в [95].

В работе [96] исследованы генераторы групп конформных движений, допускаемых метрикой

$$ds^2 = g_{11}(z)dt^2 - dz^2 - g_{33}(z)d\nu^2 - \left(g_33(z)\sin^2\nu + g_{55}(z)\cos^2\nu\right)d\varphi^2 -$$

$$2g_{55}(z)\cos\nu d\varphi d\psi - g_{55}(z)d\psi.$$

Наличие конформных векторных полей Киллинга позволяет описать законы сохранения для бесследовых тензорных величин (см. например, Т. Фултон, Ф. Рорлих, Л. Виттен [97]).

Пятимерное риманово многообразие представляет особый интерес в теориях Калуцы–Клейна (см. Э. Виттен [98]). Кроме того, решение обобщенной системы приводит к более глубокому анализу ограничений, которые были наложены на g_{55} в работе Рчеулишвили Г. [99] при поиске ряда изометрических киллинговых полей.

В работе [100] описывается классификация римановых пространств с пятимерной группой движений с точки зрения решения уравнений Дирака. Идентифицирован класс пространств, в которых уравнение Дирака не допускает полного разделения переменных; точные решения уравнения Дирака получаются в этих пространствах методом некоммутативного интегрирования.

В [101] получена предельная диаграмма для классификации Сегре в 5-мерном пространстве-времени, расширяющая недавнюю работу по пределам тензора энергии-импульса в общей теории относительности. Некоторые результаты Героча [102] о границах пространства-времени в общей теории относительности распространяются на пятимерное пространство-время Ка-луцы-Клейна.

В статье [103] рассматривался метрический тензор однородного изотропного 5-мерного псевдориманова пространства, разрешающий соответствующие уравнения Эйнштейна в случае, когда пространственная компонента является плоской, сферической или псевдосферической.

Новая 5-мерная классическая единая теория поля типа Калуцы-Клейна формулируется с использованием двух отдельных скалярных полей. Показано, что предложенная процедура решает проблему изменчивости параметра гравитационной связи без требования конформной инвариантности. Соответствующие уравнения поля обсуждаются с учетом возможной индукции градиентов скалярного поля электромагнитными полями.

В работе [104] получен новый предел соответствия, в котором уравнения поля приводят к обычным уравнениям Эйнштейна–Максвелла без условия постоянства скалярного поля.

В [105] геометрическая модель гравитационного взаимодействия с электромагнитным полем в аффинно-метрическом пространстве с кручением и неметричностью представлена как динамика пустого 5-мерного аффинно-метрического пространства. Гравитационное и электромагнитное поля в модели выражаются через метрический тензор 5-мерного пространства-времени. Уравнения теории выводятся из вариационного принципа с использованием формализма (4+1)–расщепления. Получены точные сферически симметричные решения системы полевых уравнений предложенной теории и исследованы их возможные эффекты в астрофизике и физике элементарных частиц.

В статье [106] рассматриваются 5-мерные группы Ли с многозначными функциями Казимира. Показано, что в случае, когда группа Ли состоит из существенно многозначных функций Казимира, пространство орбит коприсоединенного представления является неполухаусдорфовым, что позволяет сформулировать критерий идентификации этих групп. Полные инволютивные множества функций Казимира извлекаются для всех вещественных пятимерных алгебр Ли, и по этому критерию идентифицируются две алгебры Ли с нехаусдорфовым пространством орбит.

В [107] изучается множество однородных геодезических пятимерных обобщенных симметрических пространств и находятся несколько интересных вариантов поведения геодезических.

В рамках пятимерной теории гравитации рассмотрены пространства, которые допускают семейство максимально симметричных трехмерных подпространств. Для этих пространств строятся пятимерные вакуумные уравнения Эйнштейна и вводится пятимерный аналог массовой функции. Соответствующий ей закон сохранения некоторого заряда приводит к пятимерному аналогу теоремы Биркгофа. Отсюда следует, что для рассматриваемых пространств условие цилиндричности реализуется динамически. Для некоторых полученных метрик условие регулярности приводит к замкнутости пятой координаты. При этом оказывается возможным связать величину периода пятой координаты с сохраняющимся зарядом. Обсуждается проблема разделения динамических степеней свободы скалярного и гравитационного полей, полученных в результате редукции исходного пятимерного действия к четырехмерному виду, и связанная с этим проблема конформной неоднозначности калибровки 4-метрики. Параметризация скалярного поля и 4-метрики, приводящая к конформно-инвариантной теории взаимодействующих скалярного и гравитационного полей, представляется автору статьи наиболее естественной [108].

Последние разработки в теории струн позволяют предположить существование дополнительных пространственных измерений, которые не являются ни малыми, ни компактными. Основой множества космологических моделей бран является та, в которой поля материи ограничены бранным миром, заключенным в пять измерений (объем). Используя основные результаты алгебраической классификации симметричных тензоров второго порядка в 5-мерном пространстве-времени ([91], [94], см. выше), авторы работы [109] представили две теоремы, содержащие некоторые результаты об алгебраической структуре симметричных тензоров второго порядка в $5D$. Показано, как можно по индукции получить классификацию и канонические формы симметричного тензора второго ранга на n-мерных ($n > 5$) пространствах, исходя из классификации в $5D$ пространствах, представить типы Сегре и соответствующие канонические формы в nD. Эта классификация важна в контексте n-мерных бранных миров, а также в рамках $11D$ супергравитации и $10D$ теории суперструн.

В работе [110] изучена структура расслоении Зейферта на односвязных 5-многообразиях. Полученные результаты используются для построения метрик Эйнштейна с положительной кривизной Риччи на указанных многообразиях.

В [111] рассматриваются пятимерные космологические модели в геометрии Лиры с зависящей от времени калибровочной функцией. Получены точные решения пятимерных вакуумных уравнений, обсуждаются их свойства.

В работе [112] проведено исследование некоторых отношений между алгеброй Ли бесконечно малых конформных преобразований касательного расслоения с синектическим лифтом римановой метрики и алгеброй Ли бесконечно малых проективных преобразований.

В работе А. С. Киселева [113] получен ряд решений для пятимерной изотропной космологической модели, построенной на базе ОТО. Материя, заполняющая Вселенную, представлена в виде идеальной жидкости. Показано, что в рамках пятимерной космологии можно объяснить современные наблюдаемые данные о характере эволюции Вселенной. В работе [114] того же автора получены космологические решения в рамках обобщенной теории Калуцы–Клейна для случая пятимерного пространства Римана-–Вейля. Материя в виде идеальной жидкости индуцирует неметричность пространства–времени. Утверждается, что такая теория дает адекватное описание современного этапа эволюции Метагалактики. В рамках пятимерной геометрической теории получен ряд решений для модели, описывающей самогравитирующую идеальную жидкость в пятимерном пространстве с неметричностью типа Вейля [115].

В [116] дан краткий обзор псевдоримановой геометрии пятимерного однородного пространства с конформной группой $O(4,2)$. Описана топология пространства и обсуждается его связь с конформно компактифицированным пространством Минковского. Описана компактификация с помощью геометрии сферы Ли. Отмечается возможное применение теории START Хайме–Келлера с использованием ее предшественника – 5-оптики Ю.Б. Румера.

В работе [117] исследуются 5-мерные псевдоримановы многообразия, снабженные почти параконтактной структурой, которая является аналогом почти контактной структуры в римановой геометрии. Предполагается, что кривизна и аффинор структуры коммутируют. Эти многообразия допускают совместимую косимплектическую структуру в смысле П. Либермана. Найдены явные выражения для связности, кривизны, кривизны Вейля и тензора Риччи. Классифицированы многообразия с контактным потенциалом Риччи и локально плоские многообразия. Описаны все связные односвязные группы Ли, допускающие левоинвариантную структуру. Изучаемые многообразия являются пространствами Уокера – многообразиями с параллельным изотропным распределением, однако классификационная теорема Уокера не применяется.

В работе Й. Микеша [118] пятимерное риманово многообразие M^5 с неприводимой $SO(3)$-структурой рассмотрено в качестве примера абстрактного статистического многообразия. Доказано, что если M^5 является статистическим многообразием постоянной кривизны, то метрика риманова многообразия является метрикой Эйнштейна. Показано, что пятимерная евклидова сфера с неприводимой $SO(3)$-структурой не может быть сопряженным симметричным статистическим многообразием. Получены некоторые результаты для пятимерного риманова многообразия с почти интегрируемой $SO(3)$-структурой. Доказывается, в частности, что тензор интегрируемой $SO(3)$-структуры на пятимерном римановом многообразии является гармоническим симметричным тензором и определяет первый интеграл третьего порядка уравнений геодезических. Рассмотрены некоторые топологические свойства пятимерных компактных и конформно-плоских римановых многообразий с неприводимой $SO(3)$-структурой.

В работе [119] методы Т.Т. Думитреску, Г. Фестуччиа и Н. Зейберга [120] обобщены на 5-мерные римановы многообразия М; изучена связь между геометрией в М и числом решений обобщенного спинорного уравнения Киллинга, полученного из 5-мерной супергравитации. Существование одной пары решений связано с почти контактными метрическими структурами. Обсуждается случай $M = S^1 \times M^4$, где М расслоено подмногообразиями со специальными кватернион-келеровыми свойствами. В случае двух пар решений замыкание подалгебры изометрий, порожденной решениями, требует, чтобы М было S^3 или T^3-расслоением на римановой поверхности. Предложена новая суперсимметричная теория для $N = 1$ векторного мультиплета на К-контактном многообразии, допускающая решения спинорного уравнения Киллинга.

В работе Л. С. Ладке, В. К. Джайсвал и Р. А. Хиваркара [121] получены два пятимерных точных решения для пространства-времени типа I Бианки в теории гравитации $f(R,T)$ в предположении о постоянном параметре замедления и законе вариации параметра Хаббла, соответствующих двум различным космологическим моделям, сингулярной и неособой; для обеих моделей обсуждается их физическое поведение.

В работе [123] исследовался жесткий предел $5D$ конформной супергравитации с минимальной суперсимметрией на римановых многообразиях. Необходимым и достаточным условием существования решения является существование конформного вектора Киллинга. Обсуждается, при каких обстоятельствах допускается кинетический член Янга–Миллса в действии векторного мультиплета.

Работы авторов ([24]– [31]) посвящены решению задачи определения всех 5-мерных жестких h-пространств H_χ, т.е. псевдоримановых многообразий (M^5, g) произвольной сигнатуры с (невырожденной) характеристикой Сегре $\chi = \{r_1, ..., r_k\}$, $r_1, ..., r_k \in N$, $r_1 + ... + r_k = 5$, и вещественными собственными значениями производной Ли $L_X g$ метрики g в направлении инфинитезимального преобразования X, допускающих (негомотетические) проективные и аффинные движения (т.е. инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования), и для каждого из них – определение структуры соответствующих максимальных проективной и аффинной алгебр Ли, включая классификацию h-пространств H_{221} типа $\{221\}$ по максимальным алгебрам Ли проективных и аффинных преобразований, более широким, чем алгебры Ли гомотетий.

Решение этой задачи основано на разбиении пространств (M^5, g) по типам в соответствии с алгебраической структурой билинейной формы $h = L_X g$ и включает несколько этапов ([128]– [131]). В итоге получены следующие основные результаты:

Полностью решена задача определения 5-мерных жестких h-пространств H_χ, т. е. 5-мерных псевдоримановых пространств (M^5, g), допускающих нетривиальные решения $h \neq \mathrm{const} \cdot g$ уравнения Эйзенхарта с вещественной невырожденной характеристикой Сегре χ. Для каждого из найденных h-пространств получены общие решения уравнения Эйзенхарта; каждому решению отвечает квадратичный первый интеграл уравнений геодезических. Найдены формы связности и кривизны 5-мерных пространств H_χ. Получены необходимые и достаточные условия постоянства кривизны жестких h-пространств. Описаны свойства определяющих функций проективных движений и ковариантно постоянных симметричных тензоров в жестких h-пространствах. Установлены необходимые и достаточные условия существования в 5-мерном пространстве негомотетического проективного движения заданного типа χ. Показано, что аффинная алгебра Ли в жестком h-

пространстве непостоянной кривизны состоит, самое большее, из гомотетий. Доказано, что если 5-мерное жесткое h-пространство допускает негомотетическую проективную алгебру Ли P_r, то эта алгебра содержит подалгебру H_{r-1} инфинитезимальных гомотетий размерности $r-1$.

3. Классификация h-пространств типа $\{221\}$ по алгебрам Ли проективных и аффинных движений

В работе [32] дана классификация h-пространств H_{221} непостоянной кривизны по (негомотетическим) алгебрам Ли инфинитезимальных проективных и аффинных преобразований; перечислены все проективно-подвижные h-метрики типа $\{221\}$ и указаны размерности, базисные элементы и структурные уравнения действующих в них максимальных проективных алгебр Ли. Доказана следующая теорема.

Теорема 1 *Если 5-мерное h-пространство H_{221} типа $\{221\}$ непостоянной кривизны:*

$$g = e_1(f_2-f_1)^2(f_3-f_1)\left(2Adx^1dx^2 - A^2\left(\frac{2}{f_2-f_1}+\frac{1}{f_3-f_1}\right)(dx^2)^2\right)+$$

$$e_2(f_1-f_2)^2(f_3-f_2)\left(2Bdx^3dx^4 - B^2\left(\frac{2}{f_1-f_2}+\frac{1}{f_3-f_2}\right)(dx^4)^2\right)+$$

$$e_3(f_1-f_3)^2(f_2-f_3)^2(dx^5)^2,$$

$$\varphi = f_1+f_2+(1/2)f_3,$$

где $f_1=\varepsilon_1x^2+(1-\varepsilon_1)c_1$, $f_2=\varepsilon_2x^4+(1-\varepsilon_2)c_2$, $f_3=\mu(x^5)$, $c_1,\ c_2-const$, $A=\varepsilon_1\left(x^1+\tau(x^2)\right)+1-\varepsilon_1$, $B=\varepsilon_2\left(x^3+\omega(x^4)\right)+1-\varepsilon_2$; $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ принимают независимо значения 0 или 1, $e_1,e_2,e_3=\pm1$, τ — функция x^2, ω — функция x^4, допускает негомотетическое проективное движение, то это пространство и действующая в нем максимальная проективная алгебра Ли P определяются указанными далее формулами, где $\underset{n}{E}$ — неаффинное проективное движение, $\underset{г}{E}$ — неизометрическая инфинитезимальная гомотетия, $\underset{и}{E}$ — инфинитезимальная изометрия.

I. *H-пространства $H_{221,1}$ непостоянной кривизны ($\varepsilon_1=\varepsilon_2=1,\ {f_3'}^2+{\tau'}^2+{\omega'}^2\neq0$).*

I.A. *Функции f_3,τ и ω являются решениями уравнений*

$$f_3''=3\frac{f_3-a+b}{f_3^2+bf_3+c}f_3'^2,$$

$$((x^2)^2+bx^2+c)\tau''+3(x^2-a+b)\tau'=0,$$

$$((x^4)^2+bx^4+c)\omega''+3(x^4-a+b)\omega'=0,$$

где a,b,c — постоянные, связанные условием $a-b(c-b)\neq0$; $f_3'\neq0$. Размерность проективной алгебры Ли $\dim P=1$. Алгебра P натянута на проективное векторное поле

$$\underset{n}{E}{}_1=\{(3a-2b-x^2)(x^1+\tau)-({x^2}^2+bx^2+c)\tau'\}\partial_1+({x^2}^2+bx^2+c)\partial_2+$$

$$\{(3a-2b-x^4)(x^3+\omega)-({x^4}^2+bx^4+c)\omega'\}\partial_3+({x^4}^2+bx^4+c)\partial_4+\frac{f_3^2+bf_3+c}{f_3'}\partial_5.$$

I.B. *Функции f_3,τ и ω имеют вид*

$$f_3=\frac{C_0}{\sqrt{|x^5|}},\quad \tau=\frac{C_1}{{x^2}^2},\quad \omega=\frac{C_2}{{x^4}^2}.$$

При $C_0\neq0$ ($f_3\neq0$) размерность проективной алгебры Ли $\dim P=2$. Базис в P включает проективное векторное поле

$$\underset{n}{E}{}_1=-x^2(x^1+\tau)\partial_1+{x^2}^2\partial_2-x^4(x^3+\omega)\partial_3+{x^4}^2\partial_4-2x^5f_3\partial_5$$

и инфинитезимальную изометрию

$$\underset{u}{E}_2 = -2x^1\partial_1 + x^2\partial_2 - 2x^3\partial_3 + x^4\partial_4 - 2x^5\partial_5.$$

Структурное уравнение имеет вид

$$[E_2, E_1] = E_1.$$

При $f_3 = 0$ *добавляется трансляция* $\underset{u}{E}_3 = \partial_5$. *В этом случае* $\dim P = 3$, P *натянута на* $\underset{n}{E}_1$ $(f_3 = 0)$, $\underset{u}{E}_2$ *и* $\underset{u}{E}_3$, *при этом* $[E_1, E_3] = 0, [E_2, E_3] = 2E_3$.

I.C. *Функции* τ *и* ω *задаются равенствами*

$$\tau = C_1\left(1 + \frac{3a-b}{x^2}\right)\left(1 + \frac{b}{x^2}\right)\left(\frac{x^2}{x^2+b}\right)^{3a/b},$$

$$\omega = C_2\left(1 + \frac{3a-b}{x^4}\right)\left(1 + \frac{b}{x^4}\right)\left(\frac{x^4}{x^4+b}\right)^{3a/b}, \quad f_3 = 0.$$

Размерность проективной алгебры Ли $\dim P = 2$. *Базис в* P *состоит из проективного движения*

$$\underset{n}{E}_1 = \{(3a - 2b - x^2)(x^1 + \tau) - x^2(x^2 + b)\tau'\}\partial_1 + x^2(x^2 + b)\partial_2 +$$

$$\{(3a - 2b - x^4)(x^3 + \omega) - x^4(x^4 + b)\omega'\}\partial_3 + x^4(x^4 + b)\partial_4 + (3a - 2b)x^5\partial_5.$$

и трансляции $\underset{u}{E}_2 = \partial_5$; $[E_2, E_1] = (3a - 2b)E_2$.

II. *H-пространства $H_{221,2}$ непостоянной кривизны* ($\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$, $f_2 = c_2 = const$, ${f_3'}^2 + {\tau'}^2 \neq 0$).

II.A. *Непостоянная функция* f_3 *задается уравнением*

$$\frac{{f_3}''}{{f_3'}^2} = \frac{3}{2}\frac{f_3 + a}{f_3^2 + 3a(f_3 - c_2) - c_2^2},$$

$$\tau = C_1(x^2 + 3a)(x^2 - c_2)^{-c_2/(3a+2c_2)}(x^2 + 3a + c_2)^{-(3a+c_2)/(3a+2c_2)},$$

где a — *постоянная. Размерность проективной алгебры Ли* $\dim P = 3$. *Алгебра Ли* P *натянута на проективное векторное поле*

$$\underset{n}{E}_1 = \{-x^2(x^1 + \tau) - (x^2 + 3a + c_2)(x^2 - c_2)\tau'\}\partial_1 + (x^2 + 3a + c_2)(x^2 - c_2)\partial_2 -$$

$$(c_2x^3 + x^4)\partial_3 + (3a + c_2)x^4\partial_4 + \frac{(f_3 + 3a + c_2)(f_3 - c_2)}{f_3'}\partial_5$$

и две трансляции $\underset{u}{E}_2 = \partial_3$, $\underset{u}{E}_3 = \partial_4$. *Структурные уравнения:*

$$[E_1, E_2] = c_2E_2, \quad [E_1, E_3] = E_2 - (3a + c_2)E_3, \quad [E_2, E_3] = 0.$$

II.B. *Постоянная функция* $f_3 = 0$,

$$\tau = C_1\left(1 + \frac{a + c_2}{x^2}\right)\left(1 - \frac{c_2}{x^2}\right)^{1 + a/c_2},$$

где $a = const$. *Размерность проективной алгебры Ли* $\dim P = 4$. *Базис в* P *включает проективное векторное поле*

$$\underset{n}{E}_1 = \{(a + 2c_2 - x^2)(x^1 + \tau) - x^2(x^2 - c_2)\tau'\}\partial_1 + x^2(x^2 - c_2)\partial_2 +$$

$$((a + c_2)x^3 - x^4)\partial_3 + (a + 2c_2)x^4\partial_4 + (a + 2c_2)x^5\partial_5$$

и три трансляции $\underset{u}{E}_2 = \partial_3$, $\underset{u}{E}_3 = \partial_4$ *и* $\underset{u}{E}_4 = \partial_5$,

$$[E_2, E_1] = (a + c_2)E_2, \quad [E_3, E_1] = -E_2 + (a + 2c_2)E_3, \quad [E_4, E_1] = (a + 2c_2)E_4,$$

остальные скобки Ли равны нулю.

III. *H-пространства $H_{221,3}$ непостоянной кривизны ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $A = B = 1$, $f_1 = c_1$ и $f_2 = c_2$ — постоянные, $f_3 \neq const$).*

Функция f_3 является решением уравнения

$$\frac{f_3''}{{f_3'}^2} = 3\frac{f_3 - c_1 - c_2 - a}{(f_3 - c_1)(f_3 - c_2)},$$

где a — постоянная. Размерность проективной алгебры Ли $\dim P = 5$. *Алгебра Ли P натянута на проективное движение*

$$\underset{n}{E}_1 = ((3a + c_1 + 2c_2)x^1 - x^2)\partial_1 + (3a + 2c_1 + c_2)x^2\partial_2 +$$

$$((3a + 2c_1 + c_2)x^3 - x^4)\partial_3 + (3a + c_1 + 2c_2)x^4\partial_4 + \frac{(f_3 - c_1)(f_3 - c_2)}{f_3'}\partial_5$$

и пять трансляций $\underset{u}{E}_2 = \partial_1$, $\underset{u}{E}_3 = \partial_2$, $\underset{u}{E}_4 = \partial_3$ *и* $\underset{u}{E}_5 = \partial_4$.

Структурные уравнения алгебры Ли P имеют вид

$$[E_2, E_1] = (3a + c_1 + 2c_2)E_2, \quad [E_3, E_1] = -E_2 + (3a + 2c_1 + c_2)E_3,$$

$$[E_4, E_1] = (3a + 2c_1 + c_2)E_4, \quad [E_5, E_1] = -E_4 + (3a + c_1 + 2c_2)E_5,$$

остальные скобки Ли равны нулю.

Заключение

Статья носит обзорный характер по теме "Инвариантно-групповые методы в пятимерной теории физических полей", что объясняет обширный список литературы. Появление подобного обзора, заполняющего известный пробел, стало необходимым. Идя навстречу пожеланиям рецензента, мы расширили часть обзора, касающуюся полученных авторами этой статьи результатов, описывающих симметрии пятимерных искривленных пространств в форме проективных движений, сохраняющих геодезические. В частности, исследованы 5-мерные жесткие h-пространства H_{221}, H_{32}, H_{41} и H_5, т.е. псевдоримановы многообразия (M^5, g) произвольной сигнатуры с (невырожденной) характеристикой Сегре $\chi = \{r_1, ..., r_k\}$, $r_1, ..., r_k \in N$, $r_1 + ... + r_k = 5$, и вещественными собственными значениями производной Ли $L_X g$ метрики g в направлении инфинитезимального преобразования X, допускающие инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования. Для каждого из них определены структуры соответствующих максимальных проективной и аффинной алгебр Ли, включая классификацию h-пространств H_{221} типа $\{221\}$ по максимальным алгебрам Ли проективных и аффинных преобразований, более широким, чем алгебры Ли гомотетий. Доказательства утверждений можно найти в цитированной литературе.

Список литературы

1. Аминова А.В. *Проективные преобразования псевдоримановых многообразий.* М.: Янус-К, 2003. 619 с.

2. Аминова А.В., Аминов Н.А.-М. Проективная геометрия систем дифференциальных уравнений второго порядка. *Матем. сб.* 2006. Т. 197, № 7. С. 3–28.

3. Аминова А.В. Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими. *УМН.* 1993. № 2. С. 107–164.

4. Aminova A.V. Group-invariant methods in the theory of projective mappings of space-time manifolds. *Tensor (N.S.)*, 1993, vol. 54, pp. 91–100.

5. Аминова А.В. Проективные симметрии и законы сохранения в K-пространствах, определяемых полями тяготения *Изв. Вузов. Физика.* 2008. Т. 51. № 4. С. 30–37.

6. Аминова А.В., Аминов Н.А.-М. Проективно-геометрическая теория систем дифференциальных уравнений второго порядка: теоремы выпрямления и симметрии. *Матем. сб.* 2010. Т. 201. № 5. С. 3–13.

7. Аминова А.В. *Проективные симметрии гравитационных полей.* Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018. 202 с.

8. Егоров И.П. *Движения в пространствах аффинной связности.* Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. 184 с.

9. Fubini G. Sui gruppi trasformazioni geodetiche. *Mem. Acc. Torino. Cl. Fif. Mat. Nat.*, 1903, vol. 53, no. 2, pp. 261–313.

10. Солодовников А.С. Проективные преобразования римановых пространств. *УМН.* 1956. Т. 11. С. 45–116.

11. Аминова А.В. Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий *УМН.* 1995. Т. 50. Вып. 1. С. 69–142.

12. Аминова А.В. Группы проективных преобразований некоторых полей тяготения. *Гравитация и теория относительности.* 1970. № 7. С. 127–131.

13. Аминова А.В. О полях тяготения, допускающих группы проективных движений. *ДАН СССР.* 1971. Т. 197. № 4. С. 807–809.

14. Аминова А.В. Проективные группы в полях тяготения (I). *Гравитация и теория относительности.* 1971. № 8. С. 3–13.

15. Аминова А.В. Проективные группы в полях тяготения (II). *Гравитация и теория относительности.* 1971. № 8. С. 14–20.

16. Аминова А.В. О бесконечно малых преобразованиях, сохраняющих траектории пробных тел. *Препринт ИТФ АН УССР.* Киев. 1971. С. 71–85.

17. Аминова А.В. Проективно-групповые свойства некоторых римановых пространств // Тр. Геом. семин. ВИНИТИ АН СССР. 1974. Т. 6. С. 295–316.

18. Аминова А.В. Группы проективных и аффинных движений в пространствах общей теории относительности // Тр. Геом. семин. ВИНИТИ АН СССР. 1974. Т. 6. С. 317–346.

19. Аминова А.В. Проективные группы в пространствах-временах, допускающих два постоянных векторных поля. *Гравитация и теория относительности.* 1976. № 10. С. 9–22.

20. Aminova A.V. *Groups of transformations of pseudo-Riemannian manifolds in theoretical and mathematical physics* // In mem. N. I. Lobatschevskii: Collect. mem. Presentes savants divers pays Soc. Phys.-Math. Kazan occas. celebration bicenten. N. I. Lobatcheffsky. - Kazan, 1995. Vol. 3. Pt. 2. P. 79–103.

21. Aminova A.V. Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds. *J. Math. Sci.*, 2003, vol. 113, no. 3, pp. 367–470.

22. Aminova A.V., Aminov N.A.-M. Geometric theory of differential systems: Linearization criterion for systems of second-order ordinary differential equations with a 4-dimensional solvable symmetry group of the Lie-Petrov type VI 1. *Journal of Mathematical Sciences*, 2009, vol. 158 (2), pp. 163–183.

23. Аминова А.В., Аминов Н.А.-М. *Пространства с проективной связностью Картана и групповой анализ систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Тематические обзоры. Геометрия. - М. ВИНИТИ. - 2009. Т. 123. С. 58–80.

24. Аминова А.В., Хакимов Д.Р. О проективных движениях 5-мерных пространств. I. H-пространства типа $\{32\}$. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2018. № 4. С. 21–31.

25. Аминова А.В., Хакимов Д.Р. О проективных движениях 5-мерных пространств. II. H-пространства типа $\{41\}$. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2019. № 1. С. 45–55.

26. Аминова А.В., Хакимов Д.Р. О проективных движениях 5-мерных пространств. III. H-пространства типа $\{5\}$. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2019. № 1. С. 56–66.

27. Аминова А.В., Хакимов Д.Р. H-пространства (H_{41}, g) типа $\{41\}$: проективно-групповые свойства. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2019. № 4. С. 4–12.

28. Аминова А.В., Хакимов Д.Р. Проективно-групповые свойства h-пространств H_5 типа $\{5\}$. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2020. № 1. С. 4–11.

29. Aminova A.V., Khakimov D.R. On projective motions of five-dimensional spaces of special form. *Russian Mathematics*, 2017, vol. 61, no. 5, pp. 83–87.

30. Aminova A.V., Khakimov D.R. Projective group properties of h-spaces of type $\{221\}$. *Russian Mathematics*, 2019, vol. 63, no. 10, pp. 76–82.

31. Aminova A.V., Khakimov D.R. On the properties of the projective Lie algebras of rigid h-spaces H_{32} of the type $\{32\}$. *Uchenye Zapiski Kazan skogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 2, pp. 111–119. (In Russian)

32. Aminova A.V., Khakimov D.R. Lie algebras of projective motions of five-dimensional h-spaces H_{221} of type $\{221\}$. *Russ Math.*, 2021, vol. 65, no. 12, pp. 6–19.

33. Жукова Л.И. Римановы пространства с проективной группой. *Учен. зап. Пензенск. пед. ин-та.* 1971. Т. 124. С. 13–18.

34. Жукова Л.И. Проективные преобразования в римановых пространствах (изотропный случай). *Учен. зап. Пензенск. пед. ин-та.* 1971. Т. 124. С. 19–25.

35. Жукова Л.И. О группах проективных преобразований некоторых римановых пространств. *Учен. зап. Пензенск. пед. ин-та.* 1971. Т. 124. С. 26–30.

36. Жукова Л.И. Римановы пространства, допускающие проективные преобразования. *Изв. вузов. Матем.* 1973. № 6. С. 37–41.

37. Aminova A.V. On geodesic mappings of Riemannian spaces. *Tensor*, 1987, vol. 46, pp. 179–186.

38. Аминова А.В. Об интегрировании ковариантного дифференциального уравнения первого порядка и геодезическом отображении римановых пространств произвольной сигнатуры и размерности. *Изв. вузов. Математика.* 1988. № 1. С. 3–13.

39. Starks S.A., Kosheleva O., Kreinovich V. *Kaluza – Klein 5D ideas made fully geometric.* arxiv:0506218v1. `https://arxiv.org/abs/physics/0506218v1` (date of the application: 29.06.2005).

40. Трунев А.П. Фундаментальные взаимодействия в теории Калуцы – Клейна. *Научный журнал КубГАУ.* 2011. Т. 71, вып. 7. 27 с.

41. Bleyer U., Leibscher D.E., Polnarev A.G. Mixed metric perturbation in Kaluza – Klein cosmologies. *Astron. Nachr.*, 1990, vol. 311, no. 3, pp. 151–154.

42. Bleyer U., Leibscher D.E., Polnarev A.G. Mixed metric perturbations in Kaluza – Klein cosmologies. *Nuovo Cim. B.*, 1991, vol. 106, no. 2, pp. 107–122.

43. Becerril R., Matos T. Bonnor solution in five-dimensional gravity. *Phys. Rev. D*, 1990, vol. 41, no. 6, pp. 1895–1896.

44. Ho Choon - Lin, Nqkin-Wong Wilson line breaking and vacuum stability in Kaluza - Klein cosmology. *Phys. Rev. D.*, 1991, vol. 43, no. 10, pp. 3107–3111.

45. Guendelman E.I. Kaluza-Klein-Casimir cosmology with decoupled heavy modes. *Phys. Lett.*, 1988, vol. B201, no. 1, pp. 39–41.

46. Fukui Takao. The motion of a test particle in the Kaluza - Klein-type of gravitational theory with variable mass. *Astrophys. and Space Sci.*, 1988, vol. 141, no. 2, pp. 407–413.

47. Wesson P.S. A physical interpretation of Kaluza - Klein cosmology. *Astrophys. J.*, 1992, vol. 394, no. 1, pp. 19–24.

48. Wesson P.S. The properties of matter in Kaluza - Klein cosmology. *Mod. Phys. Lett. A.*, 1992, vol. 7, no. 11, pp. 921–926.

49. Аминова А.В. Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими. *УМН.* 1993. Т. 48. Вып. 2. С. 107–164.

50. Постников. М.М. *Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия.* М.: Факториал, 1998. 496 с.

51. Шарафутдинов В.А. *Введение в дифференциальную топологию и риманову геометрию.* Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2018. 282 с.

52. Широков П.А. *Тензорное исчисление.* Казань: Изд-во КГУ, 1961. 447 с.

53. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* М.: Наука, 1981. Т. 1-2.

54. Mikesh J. *Differential Geometry of Special Mappings.* Palack University, Olomouc, 2019. 565 p.

55. Эйзенхарт Л.П. *Непрерывные группы преобразований.* М.: Ин. лит., 1947. 358 с.

56. Эйзенхарт Л.П. *Риманова геометрия.* М.: Ин. лит., 1948. 316 с.

57. Schur F. Über den Zusammenhang der Räume konstanter Krümmungs masses mit den projectiven Raumen *Math. Ann.*, 1886, vol. 27, pp. 537–567.

58. Beltrami E. Teoria fondamentale degli spazii di curvature costante *Ann. di Mat.*, 1868, no. 2, pp. 232–255.

59. Dini U. Sopra una problema che si presenta nella teoria generale delle rapprezentazioni geografiche di una superficie su di un'altra. *Ann. di Mat.*, 1869, vol. 3, no. 7, pp. 269–293.

60. Levi-Civita T. Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche. *Ann. di Mat.*, 1896, vol. 24, no. 2, pp. 255–300.

61. Петров А.З. О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики. *Учен. зап. Казан. ун-та.* 1949. Т. 109. Вып. 3. С. 7–36.

62. Широков П.А. *Избранные труды по геометрии.* Казань: Изд-во КГУ, 1966. С. 383–389.

63. Голиков В.И. О геодезическом отображении полей тяготения общего вида. *Тр. семин. по вект. и тенз. анализу.* 1963. № 12. С. 97–129.

64. Кручкович Г.И. Уравнения полуприводимости и геодезическое соответствие пространств Лоренца. *Тр. Всесоюзн. заочн. энергетич. ин-та.* 1963. Вып. 24. С. 74–87.

65. Солодовников А.С. Пространства с общими геодезическими. *ДАН СССР.* 1956. Т. 108. № 2. С. 201–203.

66. Солодовников А.С. Геодезические классы пространств V (K). *ДАН СССР.* 1956. Т. 111. № 1. С. 33–36.

67. Солодовников А.С. Пространства с общими геодезическими. *Тр. семин. по вект. и тенз. анализу.* М.: Изд-во МГУ, 1961. Вып. II. С. 43–102.

68. Кручкович Г.И. О пространствах V (K) и их геодезических отображениях. *Тр. Всесоюзн. заочн. энергетич. ин-та.* 1967. Вып. 33. С. 3–18.

69. Синюков Н.С. О геодезическом отображении римановых пространств на симметрические римановы пространства. *ДАН СССР.* 1954. Т. 98, № 1. С. 21–23.

70. Синюков Н.С. Нормальные геодезические отображения римановых пространств. *ДАН СССР.* 1956. Т. 111. № 4. С. 266–267.

71. Синюков Н.С. Эквидистантные римановы пространства. *Научн. ежег. Одесса.* 1957. С. 133–135.

72. Синюков Н.С. Об одном инвариантном преобразовании римановых пространств с общими геодезическими. *ДАН СССР.* 1961. Т. 137. № 6. С. 1312–1314.

73. Синюков Н.С. Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств. *ДАН СССР.* 1963. Т. 151, № 4. С. 781–782.

74. Синюков Н.С. К теории геодезического отображения римановых пространств. *ДАН СССР.* 1966. Т. 169, № 4. С. 770–772.

75. Синюков Н.С. Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979. 225 с.

76. Königs M.G. *Sur les geodetiques integrales quadratiques.* Прилож. II к G. Darboux. Lecons sur la theorie generale des surfaces. IV. 1896. Pp. 368-404.

77. Knebelman M.S. Homothetic mappings of Riemann spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1958, vol. 9, no. 6, pp. 927–928.

78. Аминова А.В. Группы преобразований римановых многообразий. *Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. ВИНИТИ.* 1990. 22. С. 97–165.

79. Hicks, Jesse W. Algebraic properties of Killing vectors for Lorentz metrics in four dimensions. *All Graduate Plan B and other Reports.* 102. 2011. 1–90 p.

80. Dieter Kovacs. The geodesic equation in five-dimensional relativity theory of Kaluza-Klein. *General relativity and gravitation*, 1984, vol. 16, no. 7, pp. 645–655.

81. Mankoc-borstnik N., Pavsi M. A systematic examination of 5-dimensional Kaluza-Klein theory with sources consisting of point particles or strings. *Il nuovo cimento*, 1988, vol. 99 A, no. 4, pp. 489–507.

82. Rcheulishvili G.L. The curvature and the algebra of Killing vectors in five-dimensional space. *Journal of Mathematical Physics*, 1992, 33, pp. 1103–1108.

83. Yano K. On harmonic and Killing vectors *Annals of Math.*, 1952, 55, pp. 38–45.

84. Coley A.A., Tupper B.O.J. Special conformal Killing vector space-times and symmetry inheritance. *J. Math. Phys.*, 1989, 30, pp. 2616–2625.

85. Gross D.J., Perry M.J. Magnetic monopoles in Kaluza-Klein theories. *Nucl. Phys.*, 1983, B226, pp. 29–48.

86. Ashfaque H. Bokhari, Asghar Qadir Symmetries of static, spherically symmetric space-times. *J. Math.Phys.*, 1987, 28, pp. 1019–1022.

87. Kramer D., Stephani H., MacCallum M., Herlt E. *Exact solutions of einstein's field equations.* Cambridge University Press, Cambridge, 1980. P. 690.

88. Rcheulishvili G. *Spherically symmetric line element and Killing vectorsin five-dimensional space* // Preprint ICTP, IC/92/108. Miramare-Trieste 1992. – 1–9 p.

89. Rcheulishvili G.L. Conformal killing vectors in five-dimensional space. `https://arxiv.org/pdf/gr-qc/9312004` (date of the application: 02.12.1993).

90. ABE O. Gravitational-wave propagation in the five-dimensional Kaluza-Klein space-time. *Il nuovo cimento*, 1994, vol. 109 B, no. 6, pp. 659–673.

91. Santos J., Reboucas M.J., Teixeira A.F.F. Classification of second order symmetric tensors in five-dimensional Kaluza-Klein-type theories *Journal of Mathematical Physics*, 1995, 36, pp. 3074–3084.

92. Kowalski O. *Classification of Generalized Symmetric Riemannian Spaces of Dimension* $n \leq 5$. // Rozpravy CSAV, Rada MPV., 1975, no. 85. 61 p.

93. Rosa Anna Marinosci. Classification of Five-Dimensional Generalized Pointwise Symmetric Riemannian Spaces. *Geometriae Dedicata*, 1995, 57, pp. 11–53.

94. Hall G.S., Reboucas M.J., Santos J., Teixeixa A.F.F. On the Algebraic Structure of Second Order Symmetric Tensors in 5-Dimensionai Space-times. *General Relativity and Gravitation*, 1996, vol. 8, no. 9, pp. 1107–1113.

95. Kokarev S.S. Phantom scalar fields in five - dimensional kaluza- klein theory. *Russmn Physics Journal*, 1996, vol. 39, no. 2, pp. 146–152.

96. Rcheulishvili G.L. Generalized killing lorentz manifold vectors in the five-dimensional. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1997, vol. 112, no. 2, pp. 995–998.

97. Fulton T., Rohrlich F., Witten L. Conformal invariance in Physics. *Rev. Mod. Phys*, 1962, vol. 34, no. 3, pp. 442–557.

98. Witten E. Search for a realistic Kaluza-Klein theory. *Nucl. Phys. B.*, 1981, vol. 186, pp. 412–428.

99. Rcheulishvili G.L. Spherically symmetric line element and Killing vectors in five-dimensional space. *TMF*, 1995, 102:3, pp. 345–351.

100. Varaksin O.L., Klishevich V.V. Integration of dirac equation in Riemannian spaces with five - dimensional group of motions. *Russian Physics Journal*, 1997, vol. 40, no. 8, pp. 727–731.

101. Paiva F.M., Reboucas M.J., Teixeira A.F.F. Limits of space-times in five dimensions and their relation to the Segre types. *Journal of Mathematical Physics*, 1997, 38, pp. 4228–4236.

102. Geroch R. Limits of Space-times. *Commun. Math. Phys.*, 1969, 13, pp. 180–193.

103. Luis A. Anchordoqui., Graciela s. Birman *Metric tensors for homogeneous, isotropic, 5-dimensional pseudo Riemannian models. Revista Colombiana de Matematicas*, 1998, vol. 32, pp. 73–79.

104. Paulo G. Macedo. New Proposal for a 5-dimensional Unified Theory of Classical Fields of Kaluza-Klein type. `https://arXiv:0101121v1`.(date of the application: 30.06.2001).

105. Кречет В.Г., Левкоева М.В., Садовников Д.В. Геометрическая теория электромагнитного поля в пятимерном аффинно-метрическом пространстве. *Вестник РУДН, серия Физика.* 2001. Вып. 1, № 9. С. 33–37.

106. Magazev A.A. Casimir functions for five-dimensional lie groups with a non-semi-hausdorff space of orbits. *Russian Physics Journal*, 2003, vol. 46, no. 9, pp. 912–920.

107. Calvaruso G., R.A. Marinosci Homogeneous Geodesics in Five-Dimensional Generalized Symmetric Spaces. *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, 2003, vol. 8, no. 1, pp. 1–19.

108. Гладуш В.Д. Пятимерная общая теория относительности и теория Калуцы-Клейна. *ТМФ.* 2003. Т. 136. № 3. С. 480–495.

109. Reboucas M.J., Santos J., Teixeira A.F.F. Classification of Energy Momentum Tensors in $n > 5$ Dimensional Space-times: A Review. *Brazilian Journal of Physics*, 2004, vol. 34, no. 2A, pp. 1678–4448.

110. By Jrnos Kolldr. Einstein Metrics on Five-Dimensional Seifert Bundles. *The Journal of Geometric Analysis*, 2005, vol. 15, № 3, pp. 445–476.

111. Mohanty G., Mahanta K.L., Bishi B.K. Five dimensional cosmological models in Lyra geometry with time dependent displacement field. *Astrophys Space Sci.*, 2007, vol. 310, pp. 273–276.

112. Aydin Gezer. On infinitesimal conformal transformations of the tangent bundles with the synectic lift of a Riemannian metric. *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.),* 2009, vol. 119, no. 3, pp. 345–350.

113. Киселев А.С. *Космологическая проблема в пятимерном пространстве-времени. Ярослав. пед. вестн. Сер. Физико-математические и естественные науки.* 2010. Вып. 1. С. 64–67.

114. Киселев А.С., Кречет В.Г. Космологическая проблема в пятимерном пространстве Римана-Вейля с идеальной жидкостью. *Ярослав пед. вестн.*. 2011. Том 3. № 1. (Естественные науки). С. 37–41.

115. Kiselev A.S., Krechet V.G. Static distributions of matter in the five-dimensional riemann-weyl space. *Russian Physics Journal.*, 2012, vol. 55, no. 4. pp. 417–425.

116. Arkadiusz Jadczyk. START in a five-dimensional conformal domain. `https://arXiv:1111.5540v2`. (date of the application: 28.11.2011).

117. Dacko Piotr. Five dimensional almost para-cosymplectic manifolds with contact ricci potential. `https://arxiv.org/abs/1308.6429`. (date of the application: 29.08.2013).

118. Mikesh J., Stepanova E. A five-dimensional Riemannian manifold with an irreducible $SO(3)$-structure as a model of abstract statistical manifold. *Ann Glob Anal Geom.*, 2014, vol. 45, pp. 111–128.

119. Pan Yiwen. Rigid supersymmetry on 5-dimensional Riemannian manifolds and contact geometry. `http://arxiv.org/abs/1308.1567v4.pdf` (date of the application: 29.05.2015).

120. Dumitrescu T.T., Festuccia G., Seiberg N. Exploring curved superspace. `http://arxiv.org/abs/1205.1115v2.pdf` (date of the application: 27.06.2012).

121. Ladke L.S., Jaiswal V.K., Hiwarkar R.A. Five Dimensional Exact Solutions of Bianchi Type-I Space-Time in $f(R,T)$ Theory of Gravity. *International Journal of Innovative Research in Science,Engineering and Technology*, 2014, vol. 3, issue 8, pp. 15332–15342.

122. Буданов К.М., Султанов А.Я. Инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения вейля второго порядка со связностью полного лифта. *Известия вузов. Математика.* 2015. № 12. С. 3–13.

123. Pini A., Rodriguez-Gomeza D., Schmudea J. Rigid supersymmetry from conformal supergravity in five dimensions. `http://arxiv.org/abs/1504.04340v3.pdf` (date of the application: 2.09.2015).

124. Abdelghani Zeghib. On discrete projective transformation groups of Riemannian manifolds. *Advances in Mathematics*, 2016, 297, pp. 26–53.

125. Fialowski A., Penkava M. The moduli space of complex 5-dimensional Lie algebras. *Journal of Algebra*, 2016, 458, pp. 422–444.

126. Rodroguez-Vallarte M.C., Salgado G. 5-dimensional indecomposable contact Lie algebras as double extensions. *Journal of Geometry and Physics*, 2016, 100, pp. 20–32.

127. Gall L., Mohaupt T. Five-dimensional vector multiplets in arbitrary signature. `https://doi.org/10.1007/JHEP09(2018)053.pdf` (date of the application: 10.09.2018).

128. Аминова А.В., Хакимов Д.Р. Алгебры Ли проективных движений пятимерных псевдоримановых пространств. I. Предварительные сведения // Геометрия, механика и дифференциальные уравнения, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., том 212, ВИНИТИ РАН, М., 2022, С. 10–29.

129. Аминова А.В., Хакимов Д.Р. Алгебры Ли проективных движений пятимерных псевдоримановых пространств. II. Интегрирование уравнений Эйзенхарта // Геометрия, механика и дифференциальные уравнения, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., том 213, ВИНИТИ РАН, М., 2022, С. 10–37.

130. Аминова А.В., Хакимов Д.Р. Алгебры Ли проективных движений пятимерных псевдоримановых пространств. III. Формы кривизны пятимерных жестких h-пространств в косонормальном репере // Алгебра, геометрия и комбинаторика, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., том 214, ВИНИТИ РАН, М., 2022, С. 3–20.

131. Аминова А.В., Хакимов Д.Р. Алгебры Ли проективных движений пятимерных псевдоримановых пространств. IV. Структура проективных и аффинных алгебр Ли пятимерных жестких h-пространств // Алгебра, геометрия и комбинаторика, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., том 215, ВИНИТИ РАН, М., 2022, С. 18–31.

References

1. Aminova A.V. *Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds.* Moscow, Janus-K Publ., 2003. 619 p. (in Russ.)

2. Aminova A.V., Aminov N.A.-M. Projective geometry of systems of second-order differential equations. *Matem. Sat.*, 2006, vol. 197, no. 7, pp. 3–28. (in Russ.)

3. Aminova A.V. Pseudo-Riemannian manifolds with common geodesics. *Uspekhi Mat.*, 1993, no. 2, pp. 107–164. (in Russ.)

4. Aminova A.V. Group-invariant methods in the theory of projective mappings of space-time manifolds. *Tensor (N.S.)*, 1993, vol. 54, pp. 91–100.

5. Aminova A.V. Projective symmetries and conservation laws in K-spaces defined by gravitational fields. *Izv. universities. Physics*, 2008, vol. 51, no. 4, pp. 30–37. (in Russ.)

6. Aminova A.V., Aminov N.A.-M. Projective-geometric theory of systems of second-order differential equations: rectification and symmetry theorems. *Math. Sat.*, 2010, vol. 201, no. 5, pp. 3–13. (in Russ.)

7. Aminova A.V. *Projective symmetries of gravitational fields.* Kazan, Kazan Publishing House. un-ta, 2018. 202 p. (in Russ.)

8. Egorov I.P. *Motions in spaces with affine connection.* Kazan, Kazan Publishing House. un-ta, 1965. 184 p. (in Russ.)

9. Fubini G. Sui gruppi trasformazioni geodetiche. *Mem. Acc. Torino. Cl. Fif. Mat. Nat.*, 1903, vol. 53, no. 2, pp. 261–313.

10. Solodovnikov A.S. Projective transformations of Riemannian spaces. *UMN*, 1956, vol. 11, pp. 45–116. (in Russ.)

11. Aminova A.V. Lie algebras of infinitesimal projective transformations of Lorentzian manifolds. UMN, 1995, vol. 50, no. 1, pp. 69–142. (in Russ.)

12. Aminova A.V. Groups of projective transformations of some gravitational fields. *Gravitation and the theory of relativity*, 1970, no. 7, pp. 127–131. (in Russ.)

13. Aminova A.V. On gravitational fields admitting groups of projective motions. *DAN USSR*, 1971, vol. 197, no. 4, pp. 807–809. (in Russ.)

14. Aminova A.V. Projective groups in gravitational fields (I). *Gravitation and the theory of relativity*, 1971, no. 8, pp. 3–13. (in Russ.)

15. Aminova A.V. Projective groups in gravitational fields (II). *Gravitation and the theory of relativity*, 1971, no. 8, pp. 14–20. (in Russ.)

16. Aminova A.V. On infinitesimal transformations that preserve the trajectories of test bodies. *Preprint ITF AN Ukrainian SSR. Kyiv*, 1971, pp. 71–85. (in Russ.)

17. Aminova A.V. Projective group properties of some Riemannian spaces. *Tr. Geom. semin. VINITI AS USSR*, 1974, vol. 6, pp. 295–316. (in Russ.)

18. Aminova A.V. Groups of projective and affine motions in spaces of general relativity. *Tr. Geom. semin. VINITI AN USSR*, 1974, vol. 6, pp. 317–346. (in Russ.)

19. Aminova A.V. Projective groups in space-times admitting two constant vector fields. *Gravity and theory relativity*, 1976, no. 10, pp. 9–22. (in Russ.)

20. Aminova A.V. *Groups of transformations of pseudo-Riemannian manifolds in theoretical and mathematical physics* // In mem. N. I. Lobatschevskii: Collect. mem. Presentes savants divers pays Soc. Phys.-Math. Kazan occas. celebration bicenten. N. I. Lobatcheffsky. Kazan, 1995. Vol. 3, Pt. 2. - P. 79-103.

21. Aminova A.V. Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds. *J. Math. Sci.*, 2003, vol. 113, no. 3, pp. 367–470.

22. Aminova A.V., Aminov N.A.-M. Geometric theory of differential systems: Linearization criterion for systems of second-order ordinary differential equations with a 4-dimensional solvable symmetry group of the Lie-Petrov type VI 1. *Journal of Mathematical Sciences*, 2009, vol. 158 (2), pp. 163–183.

23. Aminova A.V. Spaces with projective Cartan connection and group analysis of systems of second-order ordinary differential equations // Aminova A. V., Aminov N. A.-M. // Results of science and technology. Ser. Modern mat. and her app. Subject reviews. Geometry. - M. VINITI, 2009, vol. 123, pp. 58-80. (in Russ.)

24. Aminova A.V., Khakimov D.R. On projective motions of 5-dimensional spaces. I. H-spaces of type $\{32\}$. *Space, time and fundamental interactions*, 2018, no. 4, pp. 21–31. (in Russ.)

25. Aminova A.V., Khakimov D.R. On projective motions of 5-dimensional spaces. II. H-spaces like $\{41\}$. *Space, time and fundamental interactions*, 2019, no. 1, pp. 45–55. (in Russ.)

26. Aminova A.V., Khakimov D.R. On projective motions of 5-dimensional spaces. III. H-spaces of type $\{5\}$. *Space, time and fundamental interactions*, 2019, no. 1, pp. 56–66. (in Russ.)

27. Aminova A.V., Khakimov D.R. H-spaces (H_{41}, g) of type $\{41\}$: projective group properties. *Space, time and fundamental interactions*, 2019, no. 4, pp. 4–12. (in Russ.)

28. Aminova A.V., Khakimov D.R. Projective-group properties of h-spaces H_5 of type $\{5\}$. *Space, time and fundamental interactions*, 2020, no. 1, pp. 4–11. (in Russ.)

29. Aminova A.V., Khakimov D.R. On projective motions of five-dimensional spaces of special form. *Russian Mathematics*, 2017, vol. 61, no. 5, pp. 83–87.

30. Aminova A.V., Khakimov D.R. Projective group properties of h-spaces of type $\{221\}$. *Russian Mathematics*, 2019, vol. 63, no. 10, pp. 76–82.

31. Aminova A.V., Khakimov D.R. On the properties of the projective Lie algebras of rigid h-spaces H_{32} of the type $\{32\}$. *Uchenye Zapiski Kazan skogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 2, pp. 111–119. (In Russian)

32. Aminova A.V., Khakimov D.R. Lie algebras of projective motions of five-dimensional h-spaces H_{221} of type $\{221\}$. *Russ Math.*, 2021, vol. 65, no. 12, pp. 6–19.

33. Zhukova L.I. Riemannian spaces with a projective group. *Uchen. app. Penza. ped. in-ta*, 1971, vol. 124, pp. 13–18. (in Russ.)

34. Zhukova L.I. Projective transformations in Riemannian spaces (isotropic case). *Uchen. app. Penza. ped. in-ta*, 1971, vol. 124, pp. 19–25. (in Russ.)

35. Zhukova L.I. On groups of projective transformations of some Riemannian spaces. *Uchen. app. Penza. ped. in-ta*, 1971, vol. 124, pp. 26–30. (in Russ.)

36. Zhukova L.I. Riemannian spaces admitting projective transformations. *Izv. universities. Mat.*, 1973, no. 6, pp. 37–41. (in Russ.)

37. Aminova A.V. On geodesic mappings of Riemannian spaces. *Tensor*, 1987, vol. 46, pp. 179–186. (in Russ.)

38. Aminova A.V. On the integration of a first-order covariant differential equation and the geodesic mapping of Riemannian spaces of arbitrary signature and dimension. *Izv. universities. Mathematics*, 1988, no. 1, pp. 3–13. (in Russ.)

39. Starks S.A., Kosheleva O., Kreinovich V. *Kaluza – Klein 5D ideas made fully geometric.* arxiv:0506218v1. `https://arxiv.org/abs/physics/0506218v1` (date of the application: 29.06.2005).

40. Trunev A.P. Fundamental interactions in the Kaluza-Klein theory. *Scientific journal of KubSAU*, 2011, vol. 71, no. 7, 27 p. (in Russ.)

41. Bleyer U., Leibscher D.E., Polnarev A.G. Mixed metric perturbation in Kaluza – Klein cosmologies. *Astron. Nachr.*, 1990, vol. 311, no. 3, pp. 151–154.

42. Bleyer U., Leibscher D.E., Polnarev A.G. Mixed metric perturbations in Kaluza – Klein cosmologies. *Nuovo Cum. B.*, 1991, vol. 106, no. 2, pp. 107–122.

43. Becerril R., Matos T. Bonnor solution in five-dimensional gravity. *Phys. Rev. D*, 1990, vol. 41, no. 6, pp. 1895–1896.

44. Ho Choon - Lin, Nqkin-Wong Wilson line breaking and vacuum stability in Kaluza - Klein cosmology. *Phys. Rev. D.*, 1991, vol. 43, no. 10, pp. 3107–3111.

45. Guendelman E.I. Kaluza-Klein-Casimir cosmology with decoupled heavy modes. *Phys. Lett.*, 1988, vol. B201, no. 1, pp. 39–41.

46. Fukui Takao. The motion of a test particle in the Kaluza - Klein-type of gravitational theory with variable mass. *Astrophys. and Space Sci.*, 1988, vol. 141, no. 2, pp. 407–413.

47. Wesson P.S. A physical interpretation of Kaluza - Klein cosmology. *Astrophys. J.*, 1992, vol. 394, no. 1, pp. 19–24.

48. Wesson P.S. The properties of matter in Kaluza - Klein cosmology. *Mod. Phys. Lett. A.*, 1992, vol. 7, no. 11, pp. 921–926.

49. Aminova A.V. Pseudo-Riemannian manifolds with common geodesics. *UMN*, 1993, vol. 48, issue 2, pp. 107–164. (in Russ.)

50. Postnikov. M.M. *Lectures on Geometry. Semester V. Riemannian geometry.* Moscow, Factorial Publ., 1998. 496 p. (in Russ.)

51. Sharafutdinov V.A. *Introduction to differential topology and Riemannian geometry.* Novosibirsk, CPI NGU Publ., 2018. 282 p. (in Russ.)

52. Shirokov P.A. *Tensor Calculus.* Kazan, Publishing house of KSU, 1961. 447 p. (in Russ.)

53. Kobayashi Sh., Nomizu K. *Fundamentals of Differential Geometry.* Moscow, Nauka Publ., 1981. Vol. 1-2. (in Russ.)

54. Mikesh J. *Differential Geometry of Special Mappings.* Palack University, Olomouc, 2019. 565 p. (in Russ.)

55. Eisenhart L.P. *Continuous transformation groups.* Moscow, In. lit. Publ., 1947. 358 p. (in Russ.)

56. Eisenhart L.P. *Riemannian geometry.* Moscow, In. lit. Publ., 1948. 316 p. (in Russ.)

57. Schur F. Über den Zusammenhang der Räume konstanter Krümmungs masses mit den projectiven Raumen *Math. Ann.*, 1886, vol. 27, pp. 537–567.

58. Beltrami E. Teoria fondamentale degli spazii di curvature costante *Ann. di Mat.*, 1868, no. 2, pp. 232–255.

59. Dini U. Sopra una problema che si presenta nella teoria generale delle rapprezentazioni geografiche di una superficie su di un'altra. *Ann. di Mat.*, 1869, vol. 3, no. 7, pp. 269–293.

60. Levi-Civita T. Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche. *Ann. di Mat.*, 1896, vol. 24, no. 2, pp. 255–300.

61. Petrov A.Z. On the geodesic mapping of Riemannian spaces of indefinite metric. *Uchen. app. Kazan. un-ta*, 1949, vol. 109, issue 3, pp. 7–36. (in Russ.)

62. Shirokov P.A. *Selected works on geometry.* Kazan, Publishing house KSU, 1966. Pp. 383–389. (in Russ.)

63. Golikov V.I. On the geodesic mapping of gravitational fields of general species. *Tr. semin. by vect. and tenz. analysis*, 1963, no. 12, pp. 97–129. (in Russ.)

64. Kruchkovich G.I. Equations of semireducibility and geodesic correspondence of Lorentz spaces. *Tr. All-Union. in absentia energetic. in-ta*, 1963, issue 24, pp. 74–87. (in Russ.)

65. Solodovnikov A.S. Spaces with common geodesics. *Dokl. THE USSR*, 1956, vol. 108, no. 2, pp. 201–203. (in Russ.)

66. Solodovnikov A.S. *Geodesic classes of spaces V (K). DAN SSSR*, 1956, vol. 111, no. 1, pp. 33–36. (in Russ.)

67. Solodovnikov A.S. *Spaces with common geodesics.* Tr. semin. by vect. and tenz. analysis. - Moscow, Publishing House of Moscow State University, 1961. Issue. II. P. 43–102. (in Russ.)

68. Kruchkovich G.I. *On the spaces V (K) and their geodesic mappings* // Tr. All-Union. in absentia energetic. in-ta. 1967, issue. 33, pp. 3–18. (in Russ.)

69. Sinyukov N.S. *On the geodesic mapping of Riemannian spaces onto symmetric Riemannian spaces. Dokl. THE USSR*, 1954, vol. 98, no. 1, pp. 21–23. (in Russ.)

70. Sinyukov N.S. *Normal geodesic maps of Riemannian spaces. DAN SSSR*, 1956, vol. 111, no. 4, pp. 266–267. (in Russ.)

71. Sinyukov N.S. Equidistant Riemannian spaces. *Nauchn. annual Odessa*, 1957, pp. 133–135. (in Russ.)

72. Sinyukov N.S. On an invariant transformation of Riemannian spaces with common geodesics. *DAN SSSR*, 1961, vol. 137, no. 6, pp. 1312–1314. (in Russ.)

73. Sinyukov N.S. *Almost geodesic mappings of affinely connected and Riemannian spaces. DAN SSSR*, 1963, vol. 151, no. 4, pp. 781–782. (in Russ.)

74. Sinyukov N.S. On the theory of geodesic mapping of Riemannian spaces. *Dokl.*, 1966, vol. 169, no. 4, pp. 770–772. (in Russ.)

75. Sinyukov N.S. *Geodesic mappings of Riemannian spaces.* Moscow, Nauka Publ., 1979. 225 p. (in Russ.)

76. Königs M.G. *Sur les geodetiques integrales quadratiques.* App. II to G. Darboux. Lecons sur la theorie generale des surfaces. IV. 1896. Pp. 368–404.

77. Knebelman M.S. Homothetic mappings of Riemann spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1958, vol. 9, no. 6, pp. 927–928.

78. Aminova A.V. Transformation groups of Riemannian manifolds. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Probl. geom. VINITI*, 1990, 22, pp. 97–165. (in Russ.)

79. Hicks, Jesse W. Algebraic properties of Killing vectors for Lorentz metrics in four dimensions. *All Graduate Plan B and other Reports.* 102. 2011. 1–90 p.

80. Dieter Kovacs. The geodesic equation in five-dimensional relativity theory of Kaluza-Klein. *General relativity and gravitation*, 1984, vol. 16, no. 7, pp. 645–655.

81. Mankoc-borstnik N., Pavsi M. A systematic examination of 5-dimensional Kaluza-Klein theory with sources consisting of point particles or strings. *Il nuovo cimento*, 1988, vol. 99 A, no. 4, pp. 489–507.

82. Rcheulishvili G.L. The curvature and the algebra of Killing vectors in five-dimensional space. *Journal of Mathematical Physics*, 1992, 33, pp. 1103–1108.

83. Yano K. On harmonic and Killing vectors *Annals of Math.*, 1952, 55, pp. 38–45.

84. Coley A.A., Tupper B.O.J. Special conformal Killing vector space-times and symmetry inheritance. *J. Math. Phys.*, 1989, 30, pp. 2616–2625.

85. Gross D.J., Perry M.J. Magnetic monopoles in Kaluza-Klein theories. *Nucl. Phys.*, 1983, B226, pp. 29–48.

86. Ashfaque H. Bokhari, Asghar Qadir Symmetries of static, spherically symmetric space-times. *J. Math.Phys.*, 1987, 28, pp. 1019–1022.

87. Kramer D., Stephani H., MacCallum M., Herlt E. *Exact solutions of einstein's field equations.* Cambridge University Press, Cambridge, 1980. P. 690.

88. Rcheulishvili G. *Spherically symmetric line element and Killing vectorsin five-dimensional space* // Preprint ICTP, IC/92/108. Miramare-Trieste 1992. – 1–9 p.

89. Rcheulishvili G.L. Conformal killing vectors in five-dimensional space. `https://arxiv.org/pdf/gr-qc/9312004` (date of the application: 02.12.1993).

90. ABE O. Gravitational-wave propagation in the five-dimensional Kaluza-Klein space-time. *Il nuovo cimento*, 1994, vol. 109 B, no. 6, pp. 659–673.

91. Santos J., Reboucas M.J., Teixeira A.F.F. Classification of second order symmetric tensors in five-dimensional Kaluza-Klein-type theories *Journal of Mathematical Physics*, 1995, 36, pp. 3074–3084.

92. Kowalski O. *Classification of Generalized Symmetric Riemannian Spaces of Dimension* $n \leq 5$. // Rozpravy CSAV, Rada MPV., 1975, no. 85. 61 p.

93. Rosa Anna Marinosci. Classification of Five-Dimensional Generalized Pointwise Symmetric Riemannian Spaces. *Geometriae Dedicata*, 1995, 57, pp. 11–53.

94. Hall G.S., Reboucas M.J., Santos J., Teixeixa A.F.F. On the Algebraic Structure of Second Order Symmetric Tensors in 5-Dimensionai Space-times. *General Relativity and Gravitation*, 1996, vol. 8, no. 9, pp. 1107–1113.

95. Kokarev S.S. Phantom scalar fields in five - dimensional kaluza- klein theory. *Russmn Physics Journal*, 1996, vol. 39, no. 2, pp. 146–152.

96. Rcheulishvili G.L. Generalized killing lorentz manifold vectors in the five-dimensional. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1997, vol. 112, no. 2, pp. 995–998.

97. Fulton T., Rohrlich F., Witten L. Conformal invariance in Physics. *Rev. Mod. Phys*, 1962, vol. 34, no. 3, pp. 442–557.

98. Witten E. Search for a realistic Kaluza-Klein theory. *Nucl. Phys. B.*, 1981, vol. 186, pp. 412–428.

99. Rcheulishvili G.L. Spherically symmetric line element and Killing vectors in five-dimensional space. *TMF*, 1995, 102:3, pp. 345–351.

100. Varaksin O.L., Klishevich V.V. Integration of dirac equation in Riemannian spaces with five - dimensional group of motions. *Russian Physics Journal*, 1997, vol. 40, no. 8, pp. 727–731.

101. Paiva F.M., Reboucas M.J., Teixeira A.F.F. Limits of space-times in five dimensions and their relation to the Segre types. *Journal of Mathematical Physics*, 1997, 38, pp. 4228–4236.

102. Geroch R. Limits of Space-times. *Commun. Math. Phys.*, 1969, 13, pp. 180–193.

103. Luis A. Anchordoqui., Graciela s. Birman *Metric tensors for homogeneous, isotropic, 5-dimensional pseudo Riemannian models. Revista Colombiana de Matematicas*, 1998, vol. 32, pp. 73–79.

104. Paulo G. Macedo. New Proposal for a 5-dimensional Unified Theory of Classical Fields of Kaluza-Klein type. `https://arXiv:0101121v1`. (date of the application: 30.06.2001).

105. Krechet V.G., Levkoeva M.V., Sadovnikov D.V. Geometric theory of electromagnetic field in five-dimensional affine-metric space. *Bulletin of RUDN University, Physics series*, 2001, issue 1, no. 9, pp. 33–37. (in Russ.)

106. Magazev A.A. Casimir functions for five-dimensional lie groups with a non-semi-hausdorff space of orbits. *Russian Physics Journal*, 2003, vol. 46, no. 9, pp. 912–920.

107. Calvaruso G., R.A. Marinosci Homogeneous Geodesics in Five-Dimensional Generalized Symmetric Spaces. *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, 2003, vol. 8, no. 1, pp. 1–19.

108. Gladush V.D. Five-dimensional general relativity and Kaluza–Klein theory. *TMF*, 2003, vol. 136, no. 3, pp. 480–495. (in Russ.)

109. Reboucas M.J., Santos J., Teixeira A.F.F. Classification of Energy Momentum Tensors in $n > 5$ Dimensional Space-times: A Review. *Brazilian Journal of Physics*, 2004, vol. 34, no. 2A, pp. 1678–4448.

110. By Jrnos Kolldr. Einstein Metrics on Five-Dimensional Seifert Bundles. *The Journal of Geometric Analysis*, 2005, vol. 15, no. 3, pp. 445–476.

111. Mohanty G., Mahanta K.L., Bishi B.K. Five dimensional cosmological models in Lyra geometry with time dependent displacement field. *Astrophys Space Sci.*, 2007, vol. 310, pp. 273–276.

112. Aydin Gezer. On infinitesimal conformal transformations of the tangent bundles with the synectic lift of a Riemannian metric. *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.),* 2009, vol. 119, no. 3, pp. 345–350.

113. Kiselev A.S. Cosmological problem in five-dimensional space-time. *Yaroslav. ped. vestn. Ser. Physical-mathematical and natural sciences*, 2010, issue 1, pp. 64–67. (in Russ.)

114. Kiselev A.S., Gyrfalcon V.G. Cosmological problem in the five-dimensional Riemann-Weyl space with ideal fluid. *Yaroslav ped. vestn.*, 2011, vol. 3, no. 1 (Natural sciences), pp. 37–41. (in Russ.)

115. Kiselev A.S., Krechet V.G. Static distributions of matter in the five-dimensional riemann-weyl space. *Russian Physics Journal.*, 2012, vol. 55, no. 4. pp. 417–425.

116. Arkadiusz Jadczyk. START in a five-dimensional conformal domain. `https://arXiv:1111.5540v2`. (date of the application: 28.11.2011).

117. Dacko Piotr. Five dimensional almost para-cosymplectic manifolds with contact ricci potential. `https://arxiv.org/abs/1308.6429`. (date of the application: 29.08.2013).

118. Mikesh J., Stepanova E. A five-dimensional Riemannian manifold with an irreducible $SO(3)$-structure as a model of abstract statistical manifold. *Ann Glob Anal Geom.*, 2014, vol. 45, pp. 111–128.

119. Pan Yiwen. Rigid supersymmetry on 5-dimensional Riemannian manifolds and contact geometry. `http://arxiv.org/abs/1308.1567v4.pdf` (date of the application: 29.05.2015).

120. Dumitrescu T.T., Festuccia G., Seiberg N. Exploring curved superspace. `http://arxiv.org/abs/1205.1115v2.pdf` (date of the application: 27.06.2012).

121. Ladke L.S., Jaiswal V.K., Hiwarkar R.A. Five Dimensional Exact Solutions of Bianchi Type-I Space-Time in $f(R,T)$ Theory of Gravity. *International Journal of Innovative Research in Science,Engineering and Technology*, 2014, vol. 3, issue 8, pp. 15332–15342.

122. Budanov K.M., Sultanov A.Ya. Infinitesimal affine transformations of the second-order Weyl bundle with a complete lift connection. *News of universities. Mathematics*, 2015, no. 12, pp. 3–13. (in Russ.)

123. Pini A., Rodriguez-Gomeza D., Schmudea J. Rigid supersymmetry from conformal supergravity in five dimensions. `http://arxiv.org/abs/1504.04340v3.pdf` (date of the application: 2.09.2015).

124. Abdelghani Zeghib. On discrete projective transformation groups of Riemannian manifolds. *Advances in Mathematics*, 2016, 297, pp. 26–53.

125. Fialowski A., Penkava M. The moduli space of complex 5-dimensional Lie algebras. *Journal of Algebra*, 2016, 458, pp. 422–444.

126. Rodroguez-Vallarte M.C., Salgado G. 5-dimensional indecomposable contact Lie algebras as double extensions. *Journal of Geometry and Physics*, 2016, 100, pp. 20–32.

127. Gall L., Mohaupt T. Five-dimensional vector multiplets in arbitrary signature. `https://doi.org/10.1007/JHEP09(2018)053.pdf` (date of the application: 10.09.2018).

128. Aminova A.V., Khakimov D.R. *Lie algebras of projective motions of five-dimensional pseudo-Riemannian spaces. I. Preliminaries* // Geometry, mechanics and differential equations, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Modern mat. and her app. Subject. obz., 212, VINITI RAN, M., 2022, pp. 10–29. (in Russ.)

129. Aminova A.V., Khakimov D.R. *Lie algebras of projective motions of five-dimensional pseudo-Riemannian spaces. II. Integration of the Eisenhart equations* // Geometry, mechanics and differential equations, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Modern mat. and her app. Subject. obz., 213, VINITI RAN, M., 2022, pp. 10–37. (in Russ.)

130. Aminova A.V., Khakimov D.R. *Lie algebras of projective motions of five-dimensional pseudo-Riemannian spaces. III. Forms of curvature of five-dimensional rigid h-spaces in a skew-normal frame* // Algebra, geometry and combinatorics, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Modern mat. and her app. Subject. obz., 214, VINITI RAN, M., 2022, pp. 3–20. (in Russ.)

131. Aminova A.V., Khakimov D.R. *Lie algebras of projective motions of five-dimensional pseudo-Riemannian spaces. IV. The structure of projective and affine Lie algebras of five-dimensional rigid h-spaces* // Algebra, geometry and combinatorics, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Modern mat. and her app. Subject. obz., 215, VINITI RAN, M., 2022, pp. 18–31. (in Russ.)

Авторы

Аминова Ася Васильевна, профессор, д.ф.-м.н., кафедра теории относительности и гравитации, Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Хакимов Джамолиддин Рахмонович, старший преподаватель, к.ф.-м.н., кафедра геометрии, отделение математики, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: dzhamoliddink@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Аминова А. В., Хакимов Д. Р. Проективные симметрии пятимерных пространств. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2023. № 2. С. 4–27.

Authors

Aminova Asya Vasilyevna, Professor, Doctor of Physics and Mathematics, Department of Theory of Relativity and Gravity, Institute of Physics, Kazan (Volga Region) Federal University, Kremlevskaya str., 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Khakimov Dzhamoliddin Rakhmonovich, Senior Lecturer, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Department of Geometry, Department of Mathematics, Institute of Mathematics and Mechanics. N. I. Lobachevsky, Kazan (Volga Region) Federal University, Kremlevskaya str., 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: dzhamoliddink@mail.ru

Please cite this article in English as:
Aminova A. V., Khakimov D. R. Projective symmetries of five-dimensional spaces. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2023, no. 2, pp. 4–27.