

УДК 524-1/-8

© Самородов Н. А., Попов В. А., 2023

УСТОЙЧИВОСТЬ ГРАВИТАЦИОННО-СВЯЗАННОГО КОНДЕНСАТА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ БОЗОНОВ *

Самородов Н. А.^{a,1}, Попов В. А.^{a,2}^a Институт физики, Казанский федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

В рамках модели темной материи, состоящей из легких взаимодействующих бозонов, исследуется устойчивость компактных гравитационно-связанных конденсатов Бозе-Эйнштейна (Бозе-звезд). Эта задача рассматривалась ранее в рамках приближения Каулинга, то есть без учета возмущений гравитационного потенциала, что позволяло в задаче на собственные значения перейти от уравнения четвертого порядка к уравнению второго порядка. В данной работе приближение Каулинга не используется и задача сведена к уравнению второго порядка на вектор смещения. Найдены собственные функции и собственные значения для радиальных и нескольких первых гармоник нерадиальных возмущений. Возмущения носят осциллирующий характер, что говорит об устойчивости конденсата.

Ключевые слова: Аксион, темная материя, конденсат Бозе-Эйнштейна, Бозе-звезда, устойчивость.

STABILITY OF GRAVITATIONALLY BOUNDED BOSE-EINSTEIN CONDENSATE CONSISTING OF SELF-INTERACTING BOSONS

Samorodov N. A.^{a,1}, Popov V. A.^{a,2}^a Institute of Physics, Kazan Federal University, Kazan, 420008, Russia

Considering Dark Matter as light self-interacting bosons, we study the stability of compact gravitationally bounded Bose-Einstein condensates (Bose stars). The problem was considered before under the Cowling approximation, i.e. ignoring variations in the gravitational potential. This approach reduces the eigenvalue problem from a fourth-order equation to a second-order one. The Cowling approximation is not used in this work, and the problem is reduced to a second-order equation for the displacement vector. Eigenfunctions and eigenvalues are found for the radial and the few lowest non-radial perturbations. The perturbations are oscillating, which implies the stability of the condensate.

Keywords: Axion, dark matter, Bose-Einstein condensate, Bose-star, stability.

PACS: 03.75.Kk, 95.30.Lz, 95.35.+d

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2023.1.101-107

Введение

Современные данные астрофизических и космологических наблюдений показывают, что темная материя (ТМ) составляет большую часть нерелятивистского вещества во Вселенной. Природа ТМ и ее происхождение до сих пор остается загадкой, но в большинстве моделей ТМ состоит из нейтральных слабо взаимодействующих массивных частиц, которые не входят в Стандартную модель физики элементарных частиц [1, 2].

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-52-05009) и Программы повышения конкурентоспособности Казанского (Приволжского) федерального университета.

¹ E-mail: niksamorodov@gmail.com² E-mail: vladipopov@mail.ru

Одной из популярных моделей холодной ТМ являются легкие (псевдо)скалярные бозоны, образующие конденсат Бозе-Эйнштейна (БЭК) (см., например, [3] и ссылки в ней). Конденсированные бозоны имеют нулевой импульс и поэтому являются нерелятивистскими независимо от их массы. Важным преимуществом этой модели ТМ является то, что профиль плотности галактического гало в ней не имеет центральной сингулярности. Она естественным образом устраняется либо из-за принципа неопределенности Гейзенберга [4], либо из-за отталкивающего взаимодействия между конденсированными частицами [5], которое уравнивает гравитацию.

Первая ситуация характерна, например, для сверхлегких бозонов с массами $m \sim 10^{-22}$ эВ или меньше, так что длина волны де Бройля сравнима с размером галактики, что обеспечивает волновое поведение частиц на астрофизических масштабах. Гравитационное притяжение уравнивается так называемым квантовым давлением, которое связано с кинетическим членом в гамильтониане, описывающем систему бозонов. Поэтому данное приближение называется кинетическим режимом. Альтернативным кинетическому режиму является приближение Томаса-Ферми, когда квантовым давлением можно пренебречь, а роль противовеса гравитации играет отталкивающее взаимодействие.

Таким образом формируются компактные гравитационно-связанные БЭК, которые могут составлять как целое галактическое гало так и сравнительно небольшие «капли», разбросанные внутри галактики [6, 7]. Такие объекты часто называют Бозе-звездами.

Компактные стационарные системы как релятивистских, так и нерелятивистских бозонов рассматривались неоднократно [8–12], в том числе в контексте устойчивости и гравитационного коллапса БЭК [13–16].

Стандартным подходом при исследовании устойчивости нерелятивистских звезд является приближение Каулинга [17], в котором игнорируются возмущения гравитационного потенциала. Использование приближения Каулинга аргументируется тем, что основная масса звезды концентрируется около ее центра и больших возмущений гравитационного потенциала возникнуть не может. Несомненным плюсом этого приближения является существенное упрощение уравнений, описывающих возмущения.

Устойчивость БЭК, описываемых стационарными решениями, полученными в приближении Томаса-Ферми рассматривалась в [18, 19]. В рамках приближения Каулинга возмущения параметров БЭК носят осциллирующий характер как для радиальных, так и нерадиальных мод, что говорит об устойчивости системы.

В данной работе при исследовании на устойчивость гравитационно-связанного конденсата приближение Каулинга не используется. Показано, что и в этом случае малые отклонения от равновесия не приводят к возникновению растущих мод как для радиальных так и нерадиальных возмущений.

1. Профиль плотности конденсата

Нерелятивистский гравитационно-связанный БЭК, состоящий из взаимодействующих бозонов, описывается уравнениями Гросса–Питаевского–Пуассона [20]

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + m\Phi(\mathbf{r}, t) + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (1.1)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G m n, \quad (1.2)$$

где $\Psi(\mathbf{r}, t)$ — волновая (классическая) функция конденсата, нормированная таким образом, что $n(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ есть плотность числа частиц, находящихся в гравитационном потенциале $\Phi(\mathbf{r}, t)$, m — масса бозонов, а g — константа их взаимодействия, G — постоянная тяготения.

Систему уравнений (1.1) и (1.2) можно переписать в гидродинамическом представлении, разделяя амплитуду и фазу волновой функции конденсата (подстановка Маделунга [21]) $\Psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n(\mathbf{r}, t)} e^{iS(\mathbf{r}, t)/\hbar}$. Тогда комплексное уравнение (1.1) преобразуется в уравнение непрерывности и

уравнение Эйлера

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n\mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{m}\nabla\mu, \quad (1.3)$$

где скорость частиц конденсата определяется как $\mathbf{v} = \nabla S/m$, а μ — химический потенциал конденсата. В приближении Томаса-Ферми полагаем $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$, которое соответствует так называемому квантовому давлению пренебрегают, что дает

$$\mu = gn + m\Phi. \quad (1.4)$$

Для установившегося равновесия химический потенциал является константой, и уравнения (1.3) удовлетворяются тождественно. Оставшиеся уравнения (1.2) и (1.4) дают решение для профиля плотности БЭК

$$n(r) = n_0 \frac{\sin(r/R)}{(r/R)}, \quad (1.5)$$

где n_0 — плотность в центре БЭК, а $R^2 = g/(4\pi Gm^2)$ определяет характерный размер БЭК, так что его радиус равен πR .

2. Устойчивость конденсата

Для исследования устойчивости БЭК линеаризуем уравнения (1.2), (1.3) и (1.4) относительно возмущений плотности конденсата $\delta n(\mathbf{r}, t)$, его химического потенциала $\delta\mu(\mathbf{r}, t)$, скорости $\delta\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ и гравитационного потенциала $\delta\Phi(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta n}{\partial t} + \nabla(n\mathbf{v}) &= 0, & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{m}\nabla\delta\mu &= 0, \\ \nabla^2\delta\Phi &= 4\pi Gm\delta n, & \delta\mu &= m\delta\Phi + g\delta n. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Удобно ввести вектор смещения, связанный со скоростью соотношением $\partial\mathbf{s}/\partial t = \mathbf{v}$. Тогда система (2.1) сведется к единственному векторному уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = 4\pi Gmns + \frac{g}{m} \text{grad div}(n\mathbf{s}). \quad (2.2)$$

Нас интересуют решения уравнения (2.2), зависящие от времени как $e^{i\omega t}$, которые при действительных значениях ω описывают осцилляции \mathbf{s} , а при комплексных значениях — экспоненциальный рост и убывание.

Перепишем уравнение (2.2) в безразмерных величинах:

$$x = \frac{n}{n_0}, \quad \boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{r}}{R}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad (2.3)$$

где $T^2 = (4\pi Gmn_0)^{-1}$ — характерное время свободного падения. Кроме того, представляя смещение в виде $\mathbf{s} = x^{-1}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})e^{i\Omega\tau}$, получим задачу на собственные значения

$$\left(\frac{\lambda}{x} + 1\right)\mathbf{u} + \text{grad div}\mathbf{u} = 0, \quad (2.4)$$

где параметр $\lambda = \omega^2 T^2$, а градиент и дивергенция теперь берутся относительно безразмерной координаты $\boldsymbol{\xi}$.

Будем полагать, что компоненты вектора \mathbf{u} не зависят от азимутального угла, тогда в уравнении (2.4) достаточно будет рассмотреть вектор вида

$$\mathbf{u} = u_\xi(\xi, \theta)\mathbf{e}_\xi + u_\theta(\xi, \theta)\mathbf{e}_\theta, \quad (2.5)$$

где ξ — безразмерная радиальная координата, определенная в (2.3), θ — полярный угол, а \mathbf{e}_ξ и \mathbf{e}_θ — соответствующие орты.

Решение уравнения (2.4) может быть представлено в виде разложений:

$$u_\xi(\xi, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l(\xi) P_l(\cos \theta), \quad u_\theta(\xi, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l(\xi) P_l^1(\cos \theta), \quad (2.6)$$

где $P_l(y)$ — полиномы Лежандра, $P_l^1(y)$ — присоединенные функции Лежандра 1-го порядка, а функции $\alpha_l(\xi)$ и $\beta_l(\xi)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\left(\frac{\lambda_0}{x} + 1\right) \alpha_0 + \left(\frac{(\xi^2 \alpha_0)'}{\xi^2}\right)' = 0, \quad (2.7)$$

для радиальных возмущений, соответствующих $l = 0$, и

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_l}{x} + 1\right) \alpha_l + \left(\frac{(\xi^2 \alpha_l)'}{\xi^2}\right)' + l(l+1) \left(\frac{\beta_l}{\xi}\right)' &= 0, \\ \left(\frac{\lambda_l}{x} + 1\right) \beta_l - \frac{(\xi^2 \alpha_l)'}{\xi^3} - l(l+1) \frac{\beta_l}{\xi^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

при $l = 1, 2, \dots$. Штрихом обозначена производная по переменной ξ .

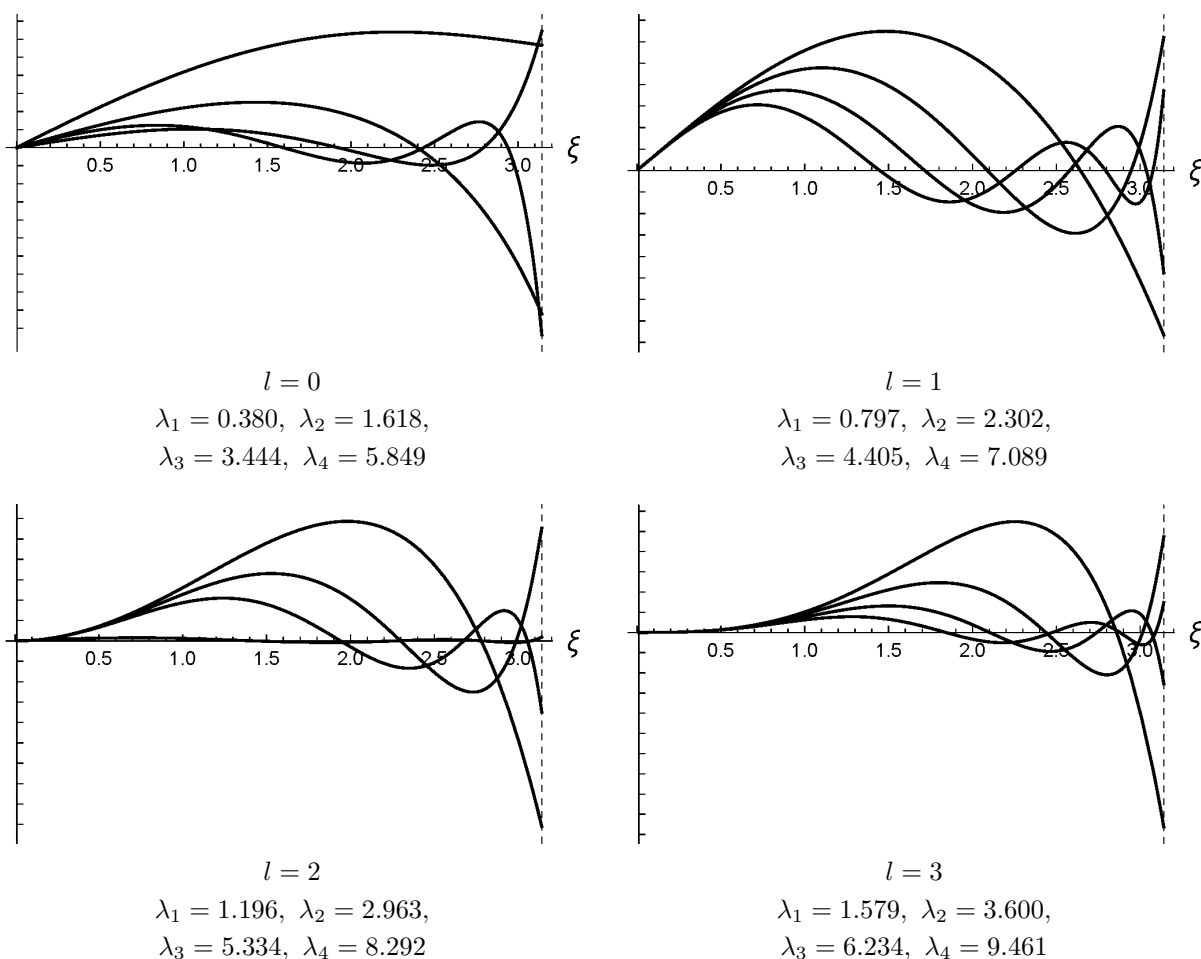


Рис. 1. Собственные функции возмущений плотности БЭК для сферических гармоник с $l = 1, 2, 3$. Для каждой гармоники представлены функции, соответствующие четырем первым собственным значениям, которые выписаны под рисунком. Штриховой линией обозначена граница БЭК $\xi = \pi$

Решения уравнений (2.7) и (2.8) для нескольких первых сферических гармоник получены численно; некоторые из которых них представлены на рис. 1. Граничные условия ставились, исходя из требования отсутствия смещения в центре и на границе БЭК. С помощью численных расчетов

показано, что как для радиальных отклонений ($l = 0$) так и низших нерадиальных отклонений ($l = 1, 2, 3$), все собственные значения положительны. Это значит, что возмущения имеют характер пульсаций с частотами $\omega_{lk} = \sqrt{\lambda_{lk}}/T$, где k нумерует моды осцилляций для l -ой сферической гармоники.

На рис. 1 приведены собственные функции возмущений плотности БЭК $\delta x = \delta n/n_0$, которая, как легко убедиться из (2.1), связана с вектором смещения соотношением $\delta x = -\operatorname{div} \mathbf{u}$.

Из-за того, что градиент профиля плотности БЭК на границе не равен нулю, на отклонения плотности от равновесия накладывалось условие ограниченности. Более жесткое требование о равенстве δx нулю на границе приводит к большим значениям градиентов малых отклонений при $\xi \rightarrow \pi$. Заметим, что аналогичное поведение имеет место при использовании приближения Каулинга. Этот факт остался без внимания в работе [19] из-за неверно определенной формы эффективного потенциала в задаче на собственные значения.

Заключение

В рамках приближения Томаса–Ферми рассматривалась задача на собственные значения для малых возмущений, возникающих в статическом конденсате взаимодействующих бозонов ТМ. Радиальные и нерадиальные отклонения от равновесия в БЭК исследовались без привлечения приближения Каулинга, то есть с учетом возмущений гравитационного потенциала. Для сферических гармоник $l = 0, 1, 2, 3$ мы определили, что малые возмущения в БЭК осциллируют, а также вычислили несколько низших частот (в единицах, обратных времени свободного падения). Отсутствие растущих мод свидетельствует об устойчивости конденсата относительно произвольных малых возмущений.

Список литературы

1. Bertone G., Hooper D., Silk J. Particle dark matter: evidence, candidates and constraints. *Phys. Rept.*, 2005, vol. 405, no. 5-6, pp. 279–390.
2. Muñoz C. Dark matter detection in the light of recent experimental results. *Int. J. Mod. Phys. A*, 2004, vol. 19, no. 19, pp. 3093–3169.
3. Suárez A., Robles V.H., Matos T. A Review on the Scalar Field/Bose-Einstein Condensate Dark Matter Model. *Astrophys. Space Sci. Proc.*, 2014, vol. 38, pp. 107–142.
4. Hu W., Barkana R., Gruzinov A. Fuzzy cold dark matter: the wave properties of ultralight particles. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, vol. 85, no. 6, pp. 1158–1161.
5. Böehmer C.G., Harko T. Can dark matter be a Bose–Einstein condensate? *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, 2007, vol. 2007, no. 6, pp. 025.
6. Du X., Behrens C., Niemeyer J.C. Substructure of fuzzy dark matter haloes. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 2016, vol. 465, no. 1, pp. 941–951.
7. Bereziani L., Cintia G., Warkentin M. Core fragmentation in simplest superfluid dark matter scenario. *Phys. Lett. B*, 2021, vol. 819, pp. 136422.
8. Colpi M., Shapiro S.L., Wasserman I. Boson stars: Gravitational equilibria of self-interacting scalar fields. *Phys. Rev. Lett.*, 1986, vol. 57, no. 20, pp. 2485.
9. Friedberg R., Lee T.D., Pang Y. Mini-soliton stars. *Phys. Rev. D*, 1987; vol 35, no. 12, pp. 3640.
10. Kaup D.J. Klein-gordon geon. *Phys. Rev.*, 1968, vol. 172, no. 5, pp. 1331.
11. Lee J.-W., Koh I.-G. Galactic halos as boson stars. *Phys. Rev. D*, 1996, vol. 53, no. 4, pp. 2236.
12. Das S., Bhaduri R.K. Dark matter and dark energy from a Bose–Einstein condensate. *Class. Quant. Grav.*, 2015, vol. 32, no. 10, pp. 105003.
13. Seidel E., Suen W.-M. Dynamical evolution of boson stars: Perturbing the ground state. *Phys. Rev. D*, 1990, vol. 42, no. 2, pp. 384.
14. Gleiser M. Stability of boson stars. *Phys. Rev. D*, 1988, vol. 38, no. 8, pp. 2376.
15. Jetzer Ph. Stability of excited Bose stars. *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, 1990, vol. 14, no. 2, pp. 265–271.

16. Hartman S.T.H., Winther H.A., Mota D.F. Collapse of spherical overdensities in superfluid models of dark matter. *A&A*, 2020, vol. 639, pp. A90.
17. Cowling T.G. The non-radial oscillations of polytropic stars. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 1941, vol. 101, pp. 367–365.
18. Lopes I., Panotopoulos G. Radial oscillations of boson stars made of ultralight repulsive dark matter. *Nucl. Phys. B*, 2020, vol. 961, pp. 115266.
19. Panotopoulos G., Lopes I. Acoustic modes of pulsating axion stars: Nonradial oscillations. *Int. J. Mod. Phys. D*, 2019, vol. 28, pp. 1950111.
20. Chavanis P.-H. Jeans mass-radius relation of self-gravitating Bose-Einstein condensates and typical parameters of the dark matter particle. *Phys. Rev. D*, 2021, vol. 103, no. 12, pp. 123551.
21. Madelung E. Quantentheorie in hydrodynamischer Form. *Z. Phys.*, 1927, vol. 40, no. 3, pp. 322–326.

References

1. Bertone G., Hooper D., Silk J. Particle dark matter: evidence, candidates and constraints. *Phys. Rept.*, 2005, vol. 405, no. 5-6, pp. 279–390.
2. Muñoz C. Dark matter detection in the light of recent experimental results. *Int. J. Mod. Phys. A*, 2004, vol. 19, no. 19, pp. 3093–3169.
3. Suárez A., Robles V.H., Matos T. A Review on the Scalar Field/Bose-Einstein Condensate Dark Matter Model. *Astrophys. Space Sci. Proc.*, 2014, vol. 38, pp. 107–142.
4. Hu W., Barkana R., Gruzinov A. Fuzzy cold dark matter: the wave properties of ultralight particles. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, vol. 85, no. 6, pp. 1158–1161.
5. Böehmer C.G., Harko T. Can dark matter be a Bose-Einstein condensate? *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, 2007, vol. 2007, no. 6, pp. 025.
6. Du X., Behrens C., Niemeyer J.C. Substructure of fuzzy dark matter haloes. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 2016, vol. 465, no. 1, pp. 941–951.
7. Berezhiani L., Cintia G., Warkentin M. Core fragmentation in simplest superfluid dark matter scenario. *Phys. Lett. B*, 2021, vol. 819, pp. 136422.
8. Colpi M., Shapiro S.L., Wasserman I. Boson stars: Gravitational equilibria of self-interacting scalar fields. *Phys. Rev. Lett.*, 1986, vol. 57, no. 20, pp. 2485.
9. Friedberg R., Lee T.D., Pang Y. Mini-soliton stars. *Phys. Rev. D*, 1987, vol. 35, no. 12, pp. 3640.
10. Kaup D.J. Klein-gordon geon. *Phys. Rev.*, 1968, vol. 172, no. 5, pp. 1331.
11. Lee J.-W., Koh I.-G. Galactic halos as boson stars. *Phys. Rev. D*, 1996, vol. 53, no. 4, pp. 2236.
12. Das S., Bhaduri R.K. Dark matter and dark energy from a Bose-Einstein condensate. *Class. Quant. Grav.*, 2015, vol. 32, no. 10, pp. 105003.
13. Seidel E., Suen W.-M. Dynamical evolution of boson stars: Perturbing the ground state. *Phys. Rev. D*, 1990, vol. 42, no. 2, pp. 384.
14. Gleiser M. Stability of boson stars. *Phys. Rev. D*, 1988, vol. 38, no. 8, pp. 2376.
15. Jetzer Ph. Stability of excited Bose stars. *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, 1990, vol. 14, no. 2, pp. 265–271.
16. Hartman S.T.H., Winther H.A., Mota D.F. Collapse of spherical overdensities in superfluid models of dark matter. *A&A*, 2020, vol. 639, pp. A90.
17. Cowling T.G. The non-radial oscillations of polytropic stars. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 1941, vol. 101, pp. 367–365.
18. Lopes I., Panotopoulos G. Radial oscillations of boson stars made of ultralight repulsive dark matter. *Nucl. Phys. B*, 2020, vol. 961, pp. 115266.
19. Panotopoulos G., Lopes I. Acoustic modes of pulsating axion stars: Nonradial oscillations. *Int. J. Mod. Phys. D*, 2019, vol. 28, pp. 1950111.
20. Chavanis P.-H. Jeans mass-radius relation of self-gravitating Bose-Einstein condensates and typical parameters of the dark matter particle. *Phys. Rev. D*, 2021, vol. 103, no. 12, pp. 123551.
21. Madelung E. Quantentheorie in hydrodynamischer Form. *Z. Phys.*, 1927, vol. 40, no. 3, pp. 322–326.

Авторы

Самородов Никита Алексеевич, магистрант 2-го года, Институт физики, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, 18, г. Казань, 420008, Россия.

E-mail: niksamorodov@gmail.com

Попов Владимир Александрович, к.ф.-м.н., доцент, кафедра теории относительности и гравитации, Институт физики, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, 18, г. Казань, 420008, Россия.

E-mail: vladipopov@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Самородов Н. А., Попов В. А. Устойчивость гравитационно-связанного конденсата взаимодействующих бозонов. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2023. № 1. С. 101–107.

Authors

Samorodov Nikita Alekseevich, second year undergraduate, Institute of Physics, Kazan Federal University, Kremlyovskaya st. 18, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: niksamorodov@gmail.com

Popov Vladimir Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Institute of Physics, Kazan Federal University, Kremlyovskaya st. 18, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: vladipopov@mail.ru

Please cite this article in English as:

Samorodov N. A., Popov V. A. Stability of gravitationally bounded Bose-Einstein condensate consisting of self-interacting bosons. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2023, no. 1, pp. 101–107.