

УДК 524.882

© Ишкаева В. А., Сушков С. В., 2023

ТЕНЬ КРОВОЙ НОРЫ ЭЛЛИСА–БРОННИКОВА И СИЛУЭТ ЕЕ ГОРЛОВИНЫ*Ишкаева В. А.^{а,1}, Сушков С. В.^{а,2}^а Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Есть две возможности “прямого” наблюдения кротовых нор: получение изображения тени кротовой норы и получение изображения ее горловины. Тень будет видна, когда наблюдатель и кротовая нора окружены светящимся фоном. Горловина кротовой норы сама по себе невидима, но ее силуэт можно получить, если предположить, что на кротовую нору падает множество светящихся зондов, а наблюдатель регистрирует сигналы, которые зонды испускают на горловине. В данной статье мы получаем выражение для радиуса силуэта горловины кротовой норы Эллиса–Бронникова и сравниваем его с радиусом тени кротовой норы.

Ключевые слова: черная дыра, кротовая нора, тень кротовой норы.

THE SHADOW OF THE ELLIS–BRONNIKOV WORMHOLE AND ITS THROAT SILHOUETTEIshkaeva V. A.^{а,1}, Sushkov S. V.^{а,2}^а Kazan State University, Kazan, 420008, Russia

In this paper, we consider two possibilities for observing wormholes: obtaining an image of the shadow of a wormhole and obtaining an image of its throat. The shadow will be visible when the observer and the wormhole are surrounded by a glowing background. The throat of a wormhole is invisible, but its silhouette can be obtained if we assume that a lot of glowing probes fall on the wormhole, and the observer registers the signals that the probes emit on the throat. In this article, we obtain an expression for the silhouette radius of the Ellis–Bronnikov wormhole throat and compare it with the radius of the wormhole shadow.

Keywords: black hole, wormhole, wormhole shadow.

PACS: 04.70.-s, 04.90.+e

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2023.1.79–84

Введение

В настоящее время разрешение телескопов достигло таких значений, что позволило получить изображения теней сверхмассивных компактных объектов в центрах галактик. В апреле 2019 года научной коллаборацией Телескоп Горизонта Событий (Event Horizon Telescope) было опубликовано изображение сверхмассивного компактного объекта в центре галактики M87 [1], а в мае 2022 года — изображение объекта в центре нашей Галактики [2]. На данный момент они ассоциируются со сверхмассивными черными дырами, однако кротовые норы также могут давать подобные изображения.

Кротовая нора — структура пространства–времени с нетривиальной топологией, соединяющая различные пространственные области одной и той же вселенной или две разные вселенные.

* Работа выполнена в рамках Программы стратегического академического лидерства «Приоритет 2030» Казанского федерального университета и частично поддержана грантом РНФ № 21-12-00130.

¹ E-mail: ishkaeva.valeria@mail.ru

² E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

Кротовая нора в каждый момент времени представляет собой тоннель, самая узкая часть которого называется горловиной. Если с одной стороны от кротовой норы нет источников света, то наблюдатель, находящийся на другой стороне, не сможет увидеть кротовую нору в привычном смысле этого слова. Этим свойством кротовые норы очень похожи на черные дыры, которые также невидимы. Однако, если кротовая нора или черная дыра будут освещаться внешним источником, то мы сможем увидеть тень объекта, причем размер тени будет зависеть от того освещается ли объект ярким экраном или он подсвечивается падающим на него веществом. В последнем случае изображения черной дыры и кротовой норы предположительно будут сильно отличаться. Если подсвечивается черная дыра, например аккреционным диском, то мы увидим темное пятно, которое будет являться изображением горизонта событий. Однако, если светящееся вещество падает на кротовую нору, то пройдя за горловину, оно продолжит излучать и фотоны скорее всего будут доходить до наблюдателя. Таким образом на изображении могут появиться дополнительные свечящиеся области. Если же рассмотреть ситуацию, когда вещество не будет излучать, пройдя через горловину кротовой норы, или если фотоны не будут доходить до наблюдателя, то мы получим изображение, похожее на изображение черной дыры, только в данном случае темное пятно будет изображением горловины.

В данной работе мы рассмотрим движение фотонов в пространстве–времени кротовой норы Эллиса–Бронникова, получим выражения для размеров ее тени и силуэта горловины, сравним их между собой и с аналогичными выражениями для черной дыры Шварцшильда. Мы используем систему единиц, в которой гравитационная постоянная $G = 1$ и скорость света $c = 1$.

1. Тень кротовой норы Эллиса–Бронникова

Мы используем метрику невращающейся кротовой норы Эллиса–Бронникова, которую можно представить в следующем виде [3]

$$ds^2 = -e^{2u(r)} dt^2 + e^{-2u(r)} dr^2 + e^{-2u(r)} (r^2 + a^2) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.1)$$

где радиальная координата r меняется от $-\infty$ до ∞ , m и a — неотрицательные параметры кротовой норы и $u(r) = \frac{m}{a} \left(\arctan \frac{r}{a} - \frac{\pi}{2} \right)$. Принимая во внимание следующую асимптотику

$$e^{2u(r)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = \left(1 - \frac{2m}{r} \right) + O(r^{-2}), \quad e^{2u(r)} \Big|_{r \rightarrow -\infty} = e^{-\frac{2\pi m}{a}} \left(1 + \frac{2m}{|r|} \right) + O(r^{-2}), \quad (1.2)$$

видно, что пространство–время с метрикой (1.1) обладает двумя асимптотически плоскими областями, в одной из которых асимптотическая масса кротовой норы $M|_{r \rightarrow \infty} = m$, а в другой $M|_{r \rightarrow -\infty} = -me^{-\frac{2\pi m}{a}}$. Эти области соединены горловиной, радиус которой соответствует минимуму радиуса двумерной сферы $R^2(r) = e^{-2u(r)} (r^2 + a^2)$. Минимум $R(r)$ достигается при $r_{th} = m$ и равняется

$$R_{th} = \exp \left[-\frac{m}{a} \left(\arctan \frac{m}{a} - \frac{\pi}{2} \right) \right] (m^2 + a^2)^{1/2}. \quad (1.3)$$

Уравнения геодезических для фотонов могут быть получены решением уравнения Гамильтона–Якоби, которое для фотонов выглядит следующим образом

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 0. \quad (1.4)$$

Поскольку метрика (1.1) не зависит от координат t и ϕ , действие S можно записать в виде [4]

$$S = -Et + L\phi + S_r(r) + S_\theta(\theta), \quad (1.5)$$

где E — полная энергия фотона, L — проекция углового момента на ось z . Таким образом из уравнений (1.4) и (1.5)

$$-(r^2 + a^2) \left(\frac{dS_r(r)}{dr} \right)^2 + e^{-4u(r)} (r^2 + a^2) E^2 = \left(\frac{dS_\theta(\theta)}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} = K. \quad (1.6)$$

Учитывая

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu}, \quad (1.7)$$

уравнения геодезических для фотонов записываются следующим образом:

$$\frac{dt}{d\lambda} = E \cdot e^{-\frac{2m}{a}(\arctan \frac{r}{a} - \frac{\pi}{2})}, \quad (1.8)$$

$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm E \sqrt{1 - e^{\frac{4m}{a}(\arctan \frac{r}{a} - \frac{\pi}{2})} \frac{q^2 + l^2}{r^2 + a^2}}, \quad (1.9)$$

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \pm E \frac{e^{\frac{2m}{a}(\arctan \frac{r}{a} - \frac{\pi}{2})}}{r^2 + a^2} \sqrt{q^2 - l^2 \cot^2 \theta}, \quad (1.10)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = e^{\frac{2m}{a}(\arctan \frac{r}{a} - \frac{\pi}{2})} \frac{L^2}{r^2 + a^2}, \quad (1.11)$$

где $l = L/E$, $q = \sqrt{Q}/E$ — управляющие параметры фотонов, $Q = K - L^2$ — константа Картера.

Выражение для тени невращающейся кротовой норы Эллиса–Бронникова было получено нами в работе [5]. Для удаленного наблюдателя, находящегося на расстоянии $r_O \gg m$ от кротовой норы, радиус тени составит

$$\alpha_{sh} = e^{-\frac{2m}{a}(\arctan \frac{2m}{a} - \frac{\pi}{2})} \sqrt{4m^2 + a^2}. \quad (1.12)$$

2. Силуэт горловины кротовой норы Эллиса–Бронникова

Силуэт горловины кротовой норы можно построить, если предположить, что на кротовую нору падает множество светящихся зондов, а наблюдатель регистрирует сигналы, которые зонды испускают на горловине.

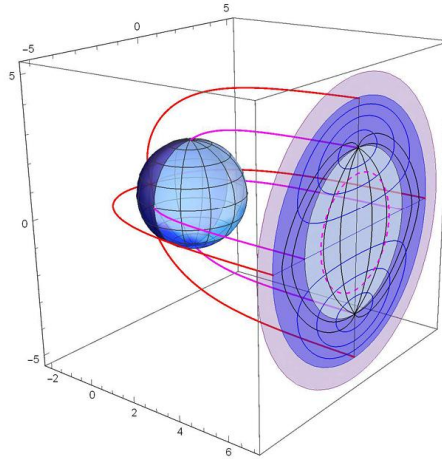


Рис. 1. Изображение горизонта событий (синий диск) внутри тени черной дыры Шварцшильда (фиолетовый диск). Пунктирная пурпурная окружность — фиктивная внешняя граница изображения горизонта событий в воображаемом евклидовом пространстве. Изображения некоторых параллелей (синие кривые) и меридианов (черные кривые) показаны также на глобусе горизонта событий (синяя сфера) и на его проекции (синяя область), наблюдаемой удаленным наблюдателем. Светло-голубая часть изображения горизонта событий является проекцией его ближайшего полушария. Соответственно, темно-синяя часть изображения горизонта событий является проекцией его дальнего полушария. Рисунок взят из статьи [6].

На небесной сфере наблюдателя координаты приходящего луча света записываются следующим образом [7]

$$\alpha_i = -r_O^2 \sin \theta_O \left. \frac{d\phi}{dr} \right|_{r_O}, \quad \beta_i = r_O^2 \left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r_O}, \quad (2.1)$$

где θ_O — угол между осью z и линией, соединяющей наблюдателя и кротовую нору. Поскольку метрика (1) описывает сферически-симметричное пространство-время, то из уравнений (1.10), (1.11), (2.1) с учетом асимптотического поведения функций (1.2), полагая $\theta_O = \pi/2$ и $r_O \gg m$, получим радиус силуэта горловины кротовой норы:

$$\alpha_{th} = \sqrt{q^2 + l^2}. \quad (2.2)$$

Движение фотонов, формирующих границу изображения горловины, задается интегральными уравнениями геодезических. Полагая, что фотоны начинают движение с $r_s = r_{th} = m$, $\theta_s = \pi/2$ и достигают наблюдателя, координаты которого $r_O \rightarrow \infty$, $\theta_O = \pi/2$, из (1.9), (1.10) получим

$$\int_m^\infty \frac{e^{\frac{2m}{a}(\arctan \frac{r}{a} - \frac{\pi}{2})} dr}{(r^2 + a^2) \sqrt{1 - e^{\frac{4m}{a}(\arctan \frac{r}{a} - \frac{\pi}{2})} \frac{q^2 + l^2}{r^2 + a^2}}} = 2 \int_{\theta_{min}}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{q^2 - l^2 \cot^2 \theta}}, \quad (2.3)$$

где $\theta_{min} = \arccos \frac{q}{\sqrt{q^2 + l^2}}$ — точка поворота, определяемая из (1.10) при $\frac{d\theta}{d\lambda} = 0$. Взяв интеграл в правой части (2.3), запишем итоговое уравнение на радиус силуэта горловины α_{th} :

$$\int_m^\infty \frac{e^{\frac{2m}{a}(\arctan \frac{r}{a} - \frac{\pi}{2})} dr}{(r^2 + a^2) \sqrt{1 - e^{\frac{4m}{a}(\arctan \frac{r}{a} - \frac{\pi}{2})} \frac{\alpha_{th}^2}{r^2 + a^2}}} = \frac{\pi}{\alpha_{th}}. \quad (2.4)$$

Данное уравнение является трансцендентным, и его решение может быть получено численно.

3. Обсуждение результатов

Для полноты картины сравним полученные результаты с радиусами тени α_{sh}^{Schw} и силуэта горизонта событий α_h^{Schw} черной дыры Шварцшильда. В работе [6] было показано, что

$$\alpha_{sh}^{Schw} = 3\sqrt{3}m \approx 5.196m, \quad \alpha_h^{Schw} \approx 4.457m. \quad (3.1)$$

Численно решая уравнения (1.12) и (2.4), мы построили зависимость радиусов тени α_{sh}^{EB} и силуэта горловины α_{th}^{EB} кротовой норы Эллиса–Бронникова от параметра a (рис.2).

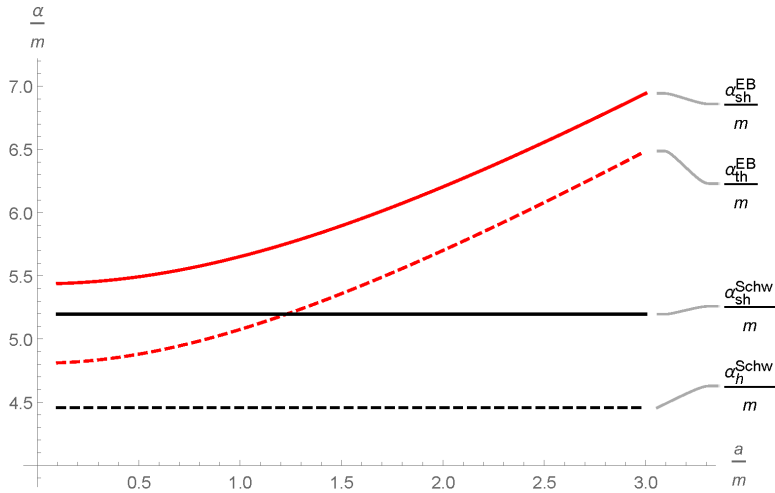


Рис. 2. Зависимость радиусов тени α_{sh}^{EB} (красная сплошная линия) и силуэта горловины α_{th}^{EB} (красная пунктирная линия) кротовой норы Эллиса–Бронникова от параметра a . На графике для наглядности также представлены радиусы тени α_{sh}^{Schw} (черная сплошная линия) и силуэта горизонта событий α_h^{Schw} (черная пунктирная линия) черной дыры Шварцшильда.

Мы получили, что, как и для черной дыры Шварцшильда, $\alpha_{sh}^{EB} > \alpha_{th}^{EB}$.

Заключение

В данной работе мы вывели выражение для радиуса силуэта горловины кротовой норы Эллиса–Бронникова и показали, что подобно результатам для черной дыры Шварцшильда, радиус тени кротовой норы больше радиуса силуэта ее горловины. Также мы получили, что $\alpha_{sh}^{EB} > \alpha_{sh}^{Schw}$ и $\alpha_{th}^{EB} > \alpha_h^{Schw}$ при одинаковой массе объектов m . В дальнейшем мы планируем построить изображение аккреционного диска в пространстве–времени данной кротовой норы, а также сделать подобные расчеты для вращающейся кротовой норы Эллиса–Бронникова.

Работа выполнена в рамках Программы стратегического академического лидерства «Приоритет 2030» Казанского федерального университета и частично поддержана грантом РФФ № 21-12-00130.

Список литературы

1. Akiyama K., et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 2019, vol. 875, no. 1, p. L1. <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab0ec7>
2. Akiyama K., et al. First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. III. Imaging of the Galactic Center Supermassive Black Hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 2022, vol. 930, no. 2, p. L14. <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac6429>
3. Bronnikov K.A., Baleevskikh K.A. On gravitational lensing by symmetric and asymmetric wormholes. *Gravitation and Cosmology*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 44–49. <https://doi.org/10.1134/S020228931901002X>
4. Carter B. Global structure of the Kerr family of gravitational fields. *Physical Review*, 1968, vol. 174, no. 5, p. 1559. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.174.1559>
5. Ишкаева В.А., Сушков С.В. Тень кротовой норы Эллиса–Бронникова. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2022. № 39. С. 26–42. <https://doi.org/10.17238/issn2226-8812.2022.2.26-42>
6. Dokuchaev V. To see the invisible: Image of the event horizon within the black hole shadow. *International Journal of Modern Physics D*, 2019, vol. 28, no. 13, p. 1941005. <https://doi.org/10.1142/S0218271819410050>
7. Vazquez S.E., Esteban E.P. Strong field gravitational lensing by a Kerr black hole. *Nuovo Cimento B*, 2004, vol. 119, no. 5, pp. 489–519. <https://doi.org/10.1393/ncb/i2004-10121-y>

References

1. Akiyama K., et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 2019, vol. 875, no. 1, p. L1. <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab0ec7>
2. Akiyama K., et al. First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. III. Imaging of the Galactic Center Supermassive Black Hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 2022, vol. 930, no. 2, p. L14. <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac6429>
3. Bronnikov K.A., Baleevskikh K.A. On gravitational lensing by symmetric and asymmetric wormholes. *Gravitation and Cosmology*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 44–49. <https://doi.org/10.1134/S020228931901002X>
4. Carter B. Global structure of the Kerr family of gravitational fields. *Physical Review*, 1968, vol. 174, no. 5, p. 1559. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.174.1559>
5. Ishkaeva V.A., Sushkov S.V. The shadow of the Ellis-Bronnikov wormhole. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2022, no. 39, pp. 26–42. (in Russ.) <https://doi.org/10.17238/issn2226-8812.2022.2.26-42>
6. Dokuchaev V. To see the invisible: Image of the event horizon within the black hole shadow. *International Journal of Modern Physics D*, 2019, vol. 28, no. 13, p. 1941005. <https://doi.org/10.1142/S0218271819410050>
7. Vazquez S.E., Esteban E.P. Strong field gravitational lensing by a Kerr black hole. *Nuovo Cimento B*, 2004, vol. 119, no. 5, pp. 489–519. <https://doi.org/10.1393/ncb/i2004-10121-y>

Авторы

Ишкаева Валерия Артуровна, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.

E-mail: ishkaeva.valeria@mail.ru

Сушков Сергей Владимирович, д.ф.-м.н., доцент, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.

E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

Пробьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Ишкаева В. А., Сушков С. В. Тень кротовой норы Эллиса–Бронникова и силуэт ее горловины. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2023. № 1. С. 79–84.

Authors

Ishkaeva Valeria Arturovna, Kazan State University, Kremlevskaya str. 18, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: ishkaeva.valeria@mail.ru

Sushkov Sergey Vladimirovich, Doctor of Physics and Mathematics, Docent, Kazan State University, Kremlevskaya str. 18, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

Please cite this article in English as:

Ishkaeva V. A., Sushkov S. V. The shadow of the Ellis–Bronnikov wormhole and its throat silhouette. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2023, no. 1, pp. 79–84.