

УДК 514.763

© Аминова А. В., Хакимов Д. Р., 2023

СИММЕТРИИ ПЯТИМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ В ФОРМЕ АЛГЕБР ЛИ ПРОЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Аминова А. В.^{а,1}, Хакимов Д. Р.^{а,2}^а Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Обсуждаются симметрии пятимерных искривленных пространств в форме проективных движений, сохраняющих геодезические. Исследуются 5-мерные жесткие h -пространства H_{221} , H_{32} , H_{41} и H_5 , т.е. псевдоримановы многообразия (M^5, g) произвольной сигнатуры с (невырожденной) характеристикой Сегре $\chi = \{r_1, \dots, r_k\}$, $r_1, \dots, r_k \in N$, $r_1 + \dots + r_k = 5$, и вещественными собственными значениями производной Ли $L_X g$ метрики g в направлении инфинитезимального преобразования X , допускающие инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования. Для каждого из них определяются структуры соответствующих максимальных проективной и аффинной алгебр Ли, включая классификацию h -пространств H_{221} типа $\{221\}$ по максимальным алгебрам Ли проективных и аффинных преобразований, более широким, чем алгебры Ли гомотетий [1–5]. Дан обзор работ, относящихся к 5-мерным космологическим моделям.

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, пятимерное псевдориманово многообразие, космологическая модель, h -пространства H_{221} , H_{32} , H_{41} , H_5 , системы дифференциальных уравнений с частными производными, негомотетическое проективное движение, уравнения Киллинга, проективная алгебра Ли.

SYMMETRIES OF FIVE-DIMENSIONAL SPACES IN THE FORM OF LIE ALGEBRAS OF PROJECTIVE MOTIONS

Aminova A. V.^{а,1}, Khakimov D. R.^{а,2}^а Kazan State University, Kazan, 420008, Russia

The symmetries of the five-dimensional curved spaces in the form of projective motions which preserve geodesics are discussed. The 5-dimensional rigid h -spaces H_{221} , H_{32} , H_{41} and H_5 , i.e. pseudo-Riemannian manifolds (M^5, g) of arbitrary signature with (non-degenerate) Segre characteristic $\chi = \{r_1, \dots, r_k\}$, $r_1, \dots, r_k \in N$, $r_1 + \dots + r_k = 5$, and real eigenvalues of the Lie derivative $L_X g$ of the metric g in the direction of the infinitesimal transformation X are investigated, which admit (non-homothetic) infinitesimal projective and affine transformations, and for each of them the structure of the corresponding maximal projective and affine Lie algebras are determined; the classification of h -spaces H_{221} of type $\{221\}$ on maximal Lie algebras of projective and affine transformations, wider than the Lie algebras of homotheties, is obtained. An overview of the works related to the 5-dimensional cosmological models is given.

Keywords: differential geometry, five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, cosmological model, h -space H_{221} , H_{32} , H_{41} , H_5 , systems of partial differential equations, non-homothetical projective motion, the Killing equations, projective Lie algebra.

PACS: 11.10.Kk, 04.50.+h, 04.50.-h, 02.40.-k, 02.20.Sv

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2023.1.8–11

¹E-mail: asya.aminova@kpfu.ru²E-mail: dzhamolidink@mail.ru

Введение

Работа посвящена имеющей многочисленные геометрические и физические приложения проблеме исследования многомерных псевдоримановых многообразий, допускающих алгебры Ли инфинитезимальных проективных (в частности, аффинных) преобразований, более широкие, чем алгебры Ли инфинитезимальных гомотетий.

Проективное преобразование псевдориманова многообразия M^n с проективной структурой Π сохраняет проективную структуру Π и переводит геодезические линии снова в геодезические.

Векторное поле X на псевдоримановом многообразии (M, g) с проективной структурой Π называется бесконечно малым проективным преобразованием, или проективным движением, если локальная однопараметрическая группа локальных преобразований, порожденная этим полем в окрестности каждой точки $x \in M$, состоит из (локальных) проективных преобразований, т. е. автоморфизмов проективной структуры Π .

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы $X = \xi^i \partial_i$ было проективным движением на псевдоримановом многообразии (M, g) , является равенство

$$(L_X g_{ij})_{,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}, \quad (1)$$

где φ – функция от x^i , называемая определяющей функцией проективного движения X . [6].

Уравнение (1) можно записать в виде двух соотношений:

$$L_X g_{ij} \equiv \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = h_{ij} \quad (2)$$

(обобщенное уравнение Киллинга) и

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i} \quad (3)$$

(уравнение Эйзенхарта). Если $\varphi = \text{const}$, то есть $\text{div} X = \text{const}$, то векторное поле X сохраняет аффинную связность и, следовательно, является бесконечно малым аффинным преобразованием, или аффинным движением.

Аффинное движение X является бесконечно малой гомотетией, или гомотетическим движением, если $h_{ij} = \text{const} \cdot g_{ij}$, и бесконечно малой изометрией, или изометрическим движением, если $h_{ij} = 0$.

Теория групп проективных преобразований псевдоримановых пространств является одним из активно развивающихся разделов дифференциальной геометрии, имеющих приложения в теории дифференциальных уравнений и анализе, а также в теоретической и математической физике.

Проективные преобразования систематически возникают при исследовании симметрий уравнений математической физики.

В теоретической физике за последние годы значительно возрос интерес к использованию геометрических свойств многомерных, в частности, 5-мерных пространств.

В 1919 г. Т. Калуцей была предложена идея геометризации электромагнитного поля в духе эйнштейновской теории тяготения с помощью увеличения на единицу числа пространственных координат; сейчас в литературе 5-мерная теория называется теорией Калуцы–Клейна. Заслуга Клейна состоит в обобщении линеаризованного варианта теории Калуцы на общий случай.

В теории Калуцы–Клейна мир описывается 5-мерным псевдоримановым пространственно-временным многообразием с квадратичной дифференциальной формой

$$dI^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, 5). \quad (4)$$

Пятнадцать компонент 5-мерного метрического тензора определяют десять компонент 4-мерного метрического тензора и четыре компоненты векторного электромагнитного потенциала. Оставшаяся пятнадцатая компонента метрического тензора описывает некоторое скалярное поле.

В качестве уравнений поля используются 5-мерные уравнения Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R + \tilde{\Lambda}g_{\alpha\beta} = \chi Q_{\alpha\beta}, \quad (5)$$

где $Q_{\alpha\beta}$ есть 5-мерный тензор энергии-импульса внешней материи. Из этих уравнений следуют аналоги 4-мерных уравнений Эйнштейна с тензором энергии-импульса электромагнитного поля и уравнения Максвелла. В качестве уравнений движения частиц берутся 5-мерные уравнения геодезических

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dI^2} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{dI} \frac{dx^\gamma}{dI}, \quad (6)$$

где $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ — 5-мерные символы Кристоффеля. Теории с размерностью пространства больше пяти и с полевыми уравнениями, аналогичными уравнениям Эйнштейна, называются теориями типа Калуцы–Клейна.

В 1921 году Калуца и Клейн показали, что при определенных условиях (таких как цилиндричность: $\partial g_{ij}/\partial x^5 = 0, i, j = 1, \dots, 4$) добавление 5-го измерения может объяснить появление электромагнитного поля. Проблема заключается в том, что хотя сама модель является геометрической, условия типа цилиндричности не являются геометрическими. Эта проблема была частично решена Эйнштейном и Бергманом, которые в своей статье 1938 года предположили, что пятое измерение компактифицируется в небольшую окружность S^1 , так что в полученном цилиндрическом 5D пространстве-времени $R^4 \times S^1$ зависимость от x^5 макроскопически незаметна.

Дальнейшему развитию идей Калуцы с приложениями в гравитации и космологии посвящена обзорная часть и библиография расширенного варианта данного краткого сообщения, представленного в журнал "Пространство, время и фундаментальные взаимодействия".

Список литературы

1. Aminova A.V., Khakimov D.R. Projective group properties of h -spaces of type {221}. *Russian Mathematics*, 2019, vol. 63, no. 10, pp. 76–82.
2. Aminova A.V., Khakimov D.R. On the properties of the projective Lie algebras of rigid h -spaces H_{32} of the type {32}. *Uchenye Zapiski Kazan skogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 2, pp. 111–119. (in Russian)
3. Aminova A.V., Khakimov D.R. Lie algebras of projective motions of five-dimensional h -spaces H_{221} of type {221}. *Russ. Math.*, 2021, vol. 65, no. 12, pp. 6–19.
4. Аминова А.В., Хакимов Д.Р. H -пространства (H_{41}, g) типа {41}: проективно-групповые свойства. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2019. № 4. С. 4–12.
5. Аминова А.В., Хакимов Д.Р. Проективно-групповые свойства h -пространств H_5 типа {5}. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2020. № 1. С. 4–11.
6. Аминова А.В. *Проективные преобразования псевдоримановых многообразий*. М.: Янус-К, 2003. 619 с.

References

1. Aminova A.V., Khakimov D.R. Projective group properties of h -spaces of type {221}. *Russian Mathematics*, 2019, vol. 63, no. 10, pp. 76–82.
2. Aminova A.V., Khakimov D.R. On the properties of the projective Lie algebras of rigid h -spaces H_{32} of the type {32}. *Uchenye Zapiski Kazan skogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 2, pp. 111–119. (in Russian)
3. Aminova A.V., Khakimov D.R. Lie algebras of projective motions of five-dimensional h -spaces H_{221} of type {221}. *Russ. Math.*, 2021, vol. 65, no. 12, pp. 6–19.
4. Aminova A.V., Khakimov D.R. H -spaces (H_{41}, g) of type {41}: projective-group properties. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2019, no. 4, pp. 4–12.

5. Aminova A.V., Khakimov D.R. Projective-group properties of h -spaces H_5 of type $\{5\}$. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2020, no. 1, pp. 4–11.
6. Aminova A.V. *Transformations of Pseudo-Riemannian manifolds*. Moscow, Yanus-K Publ., 2003. (in Russian)

Авторы

Аминова Ася Васильевна, профессор, д.ф.-м.н., кафедра теории относительности и гравитации, Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Хакимов Джамолиддин Рахмонович, старший преподаватель, к.ф.-м.н., кафедра геометрии, отделение математики, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: dzhamoliddink@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Аминова А. В., Хакимов Д. Р. Симметрии пятимерных пространств в форме алгебр Ли проективных движений. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2023. № 1. С. 8–11.

Authors

Aminova Asya Vasilyevna, Kazan (Volga Region) Federal University, Kremlyovskaya str., 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Khakimov Dzhamoliddin Rakhmonovich, Kazan (Volga Region) Federal University, Kremlyovskaya str., 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: dzhamoliddink@mail.ru

Please cite this article in English as:

Aminova A. V., Khakimov D. R. Symmetries of five-dimensional spaces in the form of Lie algebras of projective motions. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2023, no. 1, pp. 8–11.