

УДК 539.1.01

© Лисенков Д. С., Попов А. А., 2022

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА КВАНТОВАННОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ ПРИ НЕНУЛЕВОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ НА ФОНЕ КРОТОВОЙ НОРЫ С БЕСКОНЕЧНО КОРОТКОЙ ГОРЛОВИНОЙ*Лисенков Д. С.^{a,1}, Попов А. А.^{a,2}^a Казанский федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия.

Исследована поляризация вакуума квантованного скалярного поля в пространстве–времени кротовой норы с бесконечно короткой горловиной. Предполагается, что поле является безмассовым, имеет произвольную связь со скалярной кривизной и находится в тепловом квантовом состоянии с произвольной температурой.

Ключевые слова: поляризация вакуума, скалярное поле, тепловое квантовое состояние, кротовая нора.

VACUUM POLARIZATION OF A QUANTIZED SCALAR FIELD IN THE THERMAL STATE ON THE SHORT-THROAT FLAT-SPACE WORMHOLE BACKGROUNDLisenkov D. S.^{a,1}, Popov A. A.^{a,2}^a Kazan Federal University, Kazan, 420008, Russia.

Vacuum polarization of scalar fields on the short-throat flat-space wormhole background is investigated. The field is assumed massless, with arbitrary coupling to the scalar curvature, and in a thermal state at an arbitrary temperature.

Keywords: vacuum polarization, scalar field, thermal state, wormhole.

PACS: 04.62.+v, 04.70.Dy

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2022.2.43-53

Введение

Интерес к эффекту поляризации вакуума в сильных гравитационных полях связан, в основном, с исследованием ранней Вселенной и построением самосогласованной модели испарения черных дыр. Этот эффект описывается полуклассической теорией гравитации

$$G_{\nu}^{\mu} = 8\pi \langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{ren}, \quad (I)$$

где $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{ren}$ вакуумное среднее оператора тензора энергии–импульса квантованных полей. Отметим, что вакуумные флуктуации квантованных полей рассматривались в качестве материи, обеспечивающей существование кротовых нор в работах [1–4].

Основная трудность теории полуклассической гравитации состоит в том, что эффекты квантования гравитационного поля игнорируются. Популярное решение этой проблемы — это предел большого числа материальных полей, при этом вкладом гравитационного поля можно пренебречь по сравнению с вкладом в правую часть уравнений (I) других квантованных полей. Другая проблема такой теории заключается в том, что эффекты поляризации вакуума определяются, как правило, топологическими и геометрическими свойствами пространства–времени в целом и выбором

* Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно–образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2022-882.

¹ E-mail: lesman1985@gmail.com

² E-mail: apopov@kpfu.ru

квантового состояния, в котором вакуумные средние вычисляются. Это означает, что вычисление функциональной зависимости $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{ren}$ от метрического тензора, который должен быть определен из уравнений (I), представляет огромную трудность. Только в некоторых пространствах–временах с высокой степенью симметрии для конформно инвариантных полей $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$ такие вычисления были проделаны, а уравнения (I) решены [5–9].

Численные вычисления $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{ren}$ обычно чрезвычайно трудоемки [10–17]. В некоторых случаях $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$ определяется локальными свойствами пространства–времени, и можно приблизительно вычислить функциональную зависимость $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$ от метрического тензора. Одним из наиболее широко известных примеров такой ситуации является случай весьма массивного поля. В этом случае масса поля m много больше $1/l$, где l — характерный масштаб кривизны пространства–времени

$$\frac{1}{ml} \ll 1, \quad (\text{II})$$

и $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{ren}$ можно разложить по этому малому параметру [18–24].

Также были проведены приближенные вычисления $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$ для безмассовых квантованных полей, неконформно связанных с кривизной пространства–времени. Примерами таких вычислений в статических пространствах Эйнштейна ($R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$) являются приближения Пэйджа, Брауна и Оттевилла [25–27]. Эти результаты были обобщены на произвольные статические пространства–времена Занниасом [28]. Другой подход к получению приближенных выражений для $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$ для конформно связанных с кривизной безмассовых полей в статических пространствах–временах был предложен Фроловым и Зельниковым [29]. Их расчеты основывались, главным образом, на геометрических аргументах и общих свойствах тензора энергии–импульса, а не на теории поля. Позднее, с использованием методов квантовой теории поля, Андерсоном, Хичкоком и Самуэлем были получены выражения для $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$ квантованного скалярного поля в статических сферически–симметричных асимптотически плоских пространствах–временах [10]. Они предполагали, что поле может находиться в вакуумном квантовом состоянии с нулевой или ненулевой температурой, может быть массивным или безмассовым и иметь произвольную константу связи ξ поля с кривизной. Их результат был представлен в виде суммы двух частей: численной и аналитической

$$\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{ren} = \langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{numeric} + \langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{analytic}. \quad (\text{III})$$

Аналитическая часть этого выражения сохраняется. Она имеет след равный следу конформной аномалии для конформно инвариантного поля. По этой причине было предложено использовать $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{analytic}$ как приближение для $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{ren}$. Аналогичный результат был получен Гровсом, Андерсоном и Карлсоном [30] в случае безмассового поля со спином равным $1/2$ в статических сферически симметричных пространствах–временах.

В [31] $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{ren}$ получен для массивного скалярного поля с произвольной связью с гравитационным полем точечного глобального монополя. В этой работе использовалось приближение Швингера–Девитта до второго порядка малости по параметру (II).

Подчеркнем, что единственным параметром размерности длины в задаче (I) является планковская длина l_P . Это означает, что характерный масштаб l кривизны пространства–времени (который соответствует решению уравнений (I)) может отличаться от l_P только при наличии большого безразмерного параметра. В качестве примера такого параметра можно рассмотреть число полей, поляризация которых является источником искривления пространства–времени¹. В случае массивного поля существование дополнительного параметра $1/m$ размерности длины не увеличивает характерный масштаб кривизны пространства–времени l , который соответствует решению уравнений (I)². Для безмассовых квантованных полей таким параметром могут быть константы

¹здесь и ниже предполагается, конечно, что характерный масштаб изменения фонового гравитационного поля много больше l_P , так что само понятие классического пространства–времени все еще имеет смысл.

²характерный масштаб компонент G_{ν}^{μ} в левой части уравнений (I) равен $1/l^2$, в правой части — $l_P^2/(m^2 l^6)$

связи поля с кривизной пространства-времени [4]. Другой возможностью введения дополнительного параметра в задачу (I) является рассмотрение ненулевой температуры квантового состояния для квантованного поля. Известно (см., например, [32]), что в высокотемпературном пределе (когда $T \gg 1/l$, T — температура теплового квантового состояния) $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$ для такого теплового состояния пропорциональна четвертой степени температуры T .

В этой работе получено приближенное выражение для $\langle \varphi^2 \rangle_{ren}$ квантованного скалярного поля в пространстве-времени кротовой норы с бесконечно короткой горловиной в предположении о том, что поле является безмассовым, имеет произвольную связь со скалярной кривизной пространства-времени и находится в тепловом квантовом состоянии с произвольной температурой.

На протяжении всей работы будут использоваться система единиц, в которой $\hbar = c = G = k_B = 1$.

1. Неперенормированное выражение $\langle \varphi^2 \rangle$

Метрика статического сферически симметричного пространстве-времени кротовой норы с бесконечно короткой горловиной, аналитически продолженная в евклидово пространство, имеет вид

$$ds^2 = d\tau^2 + d\rho^2 + (|\rho| + a)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1.1)$$

где τ — евклидово время ($\tau = -it$, где t координата, соответствующая времениподобному вектору Киллинга, который всегда существует в статическом пространстве-времени).

Вакуумное среднее оператора ϕ^2 квантованного скалярного поля ϕ может быть вычислено с использованием метода раздвижки точек [33, 34] из евклидовой функции Грина $G_E(x; \tilde{x})$ следующим образом

$$\langle \phi^2(x, \tilde{x}) \rangle_{unren} = G_E(x, \tilde{x}), \quad (1.2)$$

где $G_E(x, \tilde{x})$ удовлетворяет уравнению

$$[\square_x - \xi R(x)] G_E(x, \tilde{x}) = -\frac{\delta^4(x, \tilde{x})}{\sqrt{|g(x)|}}, \quad (1.3)$$

$\square_x = g^{\mu\nu}(x)\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}$ вычисляется для метрики (1.1), ξ — константа связи скалярного поля ϕ с кривизной R пространства-времени. В пространстве-времени (1.1) можно записать $\frac{\delta^4(x, \tilde{x})}{\sqrt{|g(x)|}}$ как $\frac{\delta(\tau - \tilde{\tau})\delta(r, \tilde{r})\delta(\Omega, \tilde{\Omega})}{r^2}$. Дельта-функция $\delta(\Omega, \tilde{\Omega})$ может быть разложена по полиномам Лежандра P_l

$$\delta(\Omega, \tilde{\Omega}) = \sum_{l,m} Y_{lm}(\Omega)Y_{lm}^*(\tilde{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)P_l(\cos\gamma), \quad (1.4)$$

где $\cos\gamma \equiv \cos\theta\cos\tilde{\theta} + \sin\theta\sin\tilde{\theta}\cos(\phi - \tilde{\phi})$.

В этой работе предполагается, что поле находится в вакуумном состоянии с ненулевой температурой, определяемом по отношению к времениподобному вектору Киллинга. В этом случае функция Грина является периодической по $\tau - \tilde{\tau}$ с периодом $\frac{1}{T}$, где T — температура поля. В этом случае $\delta(\tau - \tilde{\tau})$ имеет вид

$$\delta(\tau - \tilde{\tau}) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in2\pi T(\tau - \tilde{\tau})}. \quad (1.5)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
G_E(x; \tilde{x}) &= \frac{T}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in2\pi T(\tau-\tilde{\tau})} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \gamma) g_{nl}(\rho, \tilde{\rho}) = \\
&= \frac{T}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \gamma) g_{0l}(\rho, \tilde{\rho}) + \\
&\quad + \frac{T}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos[2\pi nT(\tau-\tilde{\tau})] \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \gamma) g_{nl}(\rho, \tilde{\rho}), \tag{1.6}
\end{aligned}$$

где $g_{nl}(\rho, \tilde{\rho})$ удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{(|\rho|+a)} \frac{d(|\rho|+a)}{d\rho} \frac{d}{d\rho} - \left[(2\pi nT)^2 + \frac{l(l+1)}{(|\rho|+a)^2} + \xi R \right] \right\} g_{nl}(\rho, \tilde{\rho}) = -\frac{\delta(\rho, \tilde{\rho})}{(|\rho|+a)^2}. \tag{1.7}$$

Используя результаты работы [35], получим при $\rho > \tilde{\rho}$, $n \neq 0$

$$\begin{aligned}
g_{nl}(\rho, \tilde{\rho}) &= \frac{K_\nu(k(a+\rho)) I_\nu(k(a+\tilde{\rho}))}{\sqrt{(a+\rho)(a+\tilde{\rho})}} - \\
&\quad - \frac{(8\xi-1)I_\nu(x)K_\nu(x) + x(I'_\nu(x)K_\nu(x) + I_\nu(x)K'_\nu(x))}{(8\xi-1)K_\nu^2(x) + 2xK'_\nu(x)K_\nu(x)} \frac{K_\nu(k(a+\rho))K_\nu(k(a+\tilde{\rho}))}{\sqrt{(a+\rho)(a+\tilde{\rho})}} \tag{1.8}
\end{aligned}$$

Представим $g_{nl}(\rho, \tilde{\rho})$ в виде

$$g_{nl}(\rho, \tilde{\rho}) = g_{nl}^M(\rho, \tilde{\rho}) + g_{nl}^I(\rho, \tilde{\rho}), \tag{1.9}$$

где

$$\begin{aligned}
g_{nl}^M(\rho, \tilde{\rho}) &= \frac{K_\nu(k(a+\rho)) I_\nu(k(a+\tilde{\rho}))}{\sqrt{(a+\rho)(a+\tilde{\rho})}} \\
g_{nl}^I(\rho, \tilde{\rho}) &= -\frac{(8\xi-1)I_\nu(x)K_\nu(x) + x(I'_\nu(x)K_\nu(x) + I_\nu(x)K'_\nu(x))}{(8\xi-1)K_\nu^2(x) + 2xK'_\nu(x)K_\nu(x)} \frac{K_\nu(k(a+\rho))K_\nu(k(a+\tilde{\rho}))}{\sqrt{(a+\rho)(a+\tilde{\rho})}}
\end{aligned}$$

Решение уравнения (1.7) при $n=0$, $\rho > \tilde{\rho}$ имеет вид

$$g_{0l}(\rho, \tilde{\rho}) = g_{0l}^M(\rho, \tilde{\rho}) + g_{0l}^I(\rho, \tilde{\rho}), \tag{1.10}$$

где

$$\begin{aligned}
g_{0l}^M(\rho, \tilde{\rho}) &= \frac{(\rho+a)^{-(l+1)}(\tilde{\rho}+a)^l}{2l+1}, \\
g_{0l}^I(\rho, \tilde{\rho}) &= -\frac{a^{2l+1}(1-8\xi)(\rho+a)^{-l-1}(\tilde{\rho}+a)^{-l-1}}{2(2l+1)(l-4\xi+1)}
\end{aligned}$$

В дальнейшем будем считать $\theta = \tilde{\theta}$, $\varphi = \tilde{\varphi}$. В этом случае $\cos(\gamma) = 1$ и $P_l(1) = 1$. Тогда (1.6) примет вид

$$G_E(x; \tilde{x}) = \frac{T}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) g_{0l}(\rho, \tilde{\rho}) + \frac{T}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos[2\pi nT(\tau-\tilde{\tau})] \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) g_{nl}(\rho, \tilde{\rho}). \tag{1.11}$$

Представим $G_E(x; \tilde{x})$ в виде

$$G_E(x; \tilde{x}) = G_{E0}(x; \tilde{x}) + G_{En}(x; \tilde{x}), \tag{1.12}$$

где $G_{E0}(x; \tilde{x})$ есть первая сумма в (1.11), а $G_{En}(x; \tilde{x})$ последняя двойная сумма в (1.11). Представим также каждое из этих слагаемых в виде

$$\begin{aligned} G_{E0}(x; \tilde{x}) &= G_{E0}^M(x; \tilde{x}) + G_{E0}^I(x; \tilde{x}), \quad n = 0, \\ G_{En}(x; \tilde{x}) &= G_{En}^M(x; \tilde{x}) + G_{En}^I(x; \tilde{x}), \quad n \neq 0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

а определения $G_{E0}^M(x; \tilde{x})$, $G_{E0}^I(x; \tilde{x})$, $G_{En}^M(x; \tilde{x})$ и $G_{En}^I(x; \tilde{x})$ даны ниже. Определим

$$G_{En}^M(\tau, \rho; \tilde{\tau}, \tilde{\rho}) \equiv \frac{T}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \left[2\pi n T (\tau - \tilde{\tau}) \right] \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) g_{nl}^M(\rho, \tilde{\rho}). \quad (1.14)$$

Используя теорему суммирования для функций Бесселя [36] и выполнив суммирование по n в (1.14), получим при $\tau - \tilde{\tau} = 0$

$$G_{En}^M(\rho; \tilde{\rho}) = \frac{1}{4\pi^2(\rho - \tilde{\rho})^2} - \frac{T}{4\pi(\rho - \tilde{\rho})} + \frac{T^2}{12} - \frac{T^4\pi^2(\rho - \tilde{\rho})^2}{180} + O((\rho - \tilde{\rho})^3) \quad (1.15)$$

Тогда определение $G_{En}^I(\tau, \rho; \tilde{\tau}, \tilde{\rho})$ имеет вид

$$\begin{aligned} G_{En}^I(\tau, \rho; \tilde{\tau}, \tilde{\rho}) &= -\frac{T}{2\pi} \sum_{\tilde{n}=1}^{\infty} \cos \left[2\pi n T (\tau - \tilde{\tau}) \right] \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) g_{nl}^I(\rho, \tilde{\rho}) = \\ &= -\frac{T}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \left[2\pi n T (\tau - \tilde{\tau}) \right] \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{K_\nu(k(a+\rho))K_\nu(k(a+\tilde{\rho}))}{\sqrt{(a+\rho)(a+\tilde{\rho})}} \times \\ &\quad \times \frac{(8\xi - 1)I_\nu(ka)K_\nu(ka) + ka(I'_\nu(ka)K_\nu(ka) + I_\nu(ka)K'_\nu(ka))}{(8\xi - 1)K_\nu^2(ka) + 2kaK'_\nu(ka)K_\nu(ka)} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Следовательно

$$\begin{aligned} G_{En}(\tau, \rho; \tilde{\tau}, \tilde{\rho}) &= G_{En}^M(\rho; \tilde{\rho}) + G_{En}^I(\tau, \rho; \tilde{\tau}, \tilde{\rho}) = \frac{1}{4\pi^2(\rho - \tilde{\rho})^2} - \frac{T}{4\pi(\rho - \tilde{\rho})} + \frac{T^2}{12} - \\ &- \frac{T^4\pi^2(\rho - \tilde{\rho})^2}{180} - \frac{T}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \left[2\pi n T (\tau - \tilde{\tau}) \right] \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{K_\nu(k(a+\rho))K_\nu(k(a+\tilde{\rho}))}{\sqrt{(a+\rho)(a+\tilde{\rho})}} \times \\ &\quad \times \frac{(8\xi - 1)I_\nu(ka)K_\nu(ka) + ka(I'_\nu(ka)K_\nu(ka) + I_\nu(ka)K'_\nu(ka))}{(8\xi - 1)K_\nu^2(ka) + 2kaK'_\nu(ka)K_\nu(ka)} + O((\rho - \tilde{\rho})^3). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Используя (1.10) обозначим

$$G_{E0}^M(\rho, \tilde{\rho}) \equiv \frac{T}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) g_{0l}^M(\rho, \tilde{\rho}) = \frac{T}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (\rho+a)^{-(l+1)} (\tilde{\rho}+a)^l = \frac{T}{4\pi(\rho - \tilde{\rho})}, \quad (1.18)$$

$$G_{E0}^I(\rho, \tilde{\rho}) \equiv \frac{T}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) g_{0l}^I(\rho, \tilde{\rho}) = -\frac{T}{8\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^{2l+1}(1-8\xi)(\rho+a)^{-l-1}(\tilde{\rho}+a)^{-l-1}}{(l-4\xi+1)}. \quad (1.19)$$

Тогда

$$\begin{aligned} G_E^M(\rho, \tilde{\rho}) &= G_{E0}^M(\rho, \tilde{\rho}) + G_{En}^M(\rho, \tilde{\rho}) = \\ &= \frac{1}{4\pi^2(\rho - \tilde{\rho})^2} + \frac{T^2}{12} - \frac{T^4\pi^2(\rho - \tilde{\rho})^2}{180} + O((\rho - \tilde{\rho})^3), \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} G_E^I(\tau, \rho, \tilde{\tau}, \tilde{\rho}) &= G_{E0}^I(\rho, \tilde{\rho}) + G_{En}^I(\tau, \rho, \tilde{\tau}, \tilde{\rho}) = -\frac{T}{8\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^{2l+1}(1-8\xi)(\rho+a)^{-l-1}(\tilde{\rho}+a)^{-l-1}}{(l-4\xi+1)} - \\ &- \frac{T}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \left[2\pi n T (\tau - \tilde{\tau}) \right] \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{K_\nu(k(a+\rho))K_\nu(k(a+\tilde{\rho}))}{\sqrt{(a+\rho)(a+\tilde{\rho})}} \times \\ &\quad \times \frac{(8\xi - 1)I_\nu(ka)K_\nu(ka) + ka(I'_\nu(ka)K_\nu(ka) + I_\nu(ka)K'_\nu(ka))}{(8\xi - 1)K_\nu^2(ka) + 2kaK'_\nu(ka)K_\nu(ka)}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Окончательно

$$G_E(\tau, \rho, \tilde{\tau}, \tilde{\rho}) = G_E^I(\tau, \rho, \tilde{\tau}, \tilde{\rho}) + G_E^M(\rho, \tilde{\rho}). \quad (1.22)$$

Тогда выражение (1.6) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} G_E(\tau, \rho; \tau, \tilde{\rho}) &= \frac{1}{4\pi^2(\rho - \tilde{\rho})^2} + \frac{T^2}{12} - \frac{T^4\pi^2(\rho - \tilde{\rho})^2}{180} - \\ &- \frac{T}{8\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^{2l+1}(1-8\xi)(\rho+a)^{-l-1}(\tilde{\rho}+a)^{-l-1}}{(l-4\xi+1)} - \frac{T}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos[2\pi nT(\tau - \tilde{\tau})] \times \\ &\times \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{(8\xi-1)I_\nu(ka)K_\nu(ka) + ka(I'_\nu(ka)K_\nu(ka) + I_\nu(ka)K'_\nu(ka))}{(8\xi-1)K_\nu^2(ka) + 2kaK'_\nu(ka)K_\nu(ka)} \times \\ &\times \frac{K_\nu(k(a+\rho))K_\nu(k(a+\tilde{\rho}))}{\sqrt{(a+\rho)(a+\tilde{\rho})}} + O((\rho - \tilde{\rho})^3). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Отметим, что $G_E^M(\rho, \tilde{\rho})$ совпадает с соответствующей функцией Грина пространства–времени Минковского.

2. Перенормировка $\langle \phi^2 \rangle$ и анализ результата

В методе регуляризации раздвижкой точек процедура перенормировки состоит в вычитании из $G_E(x^i, \tilde{x}^i)$ контрчлена G_{DS} [34], который в пространстве (1.1) для $x^i - \tilde{x}^i = \delta_\rho^i(\rho - \tilde{\rho})$ равен

$$G_{DS} = \frac{1}{4\pi^2(\rho - \tilde{\rho})^2}, \quad (2.1)$$

и нахождению предела совпадающих точек. Все расходимости G_E совпадают с расходимостями G_E^M . Поэтому введем

$$G_{E_ren}^M = \lim_{\tilde{\rho} \rightarrow \rho} (G_E^M - G_{DS}). \quad (2.2)$$

Тогда в области $\rho > 0$

$$\begin{aligned} a^2 \langle \phi^2 \rangle_{ren} &= a^2 G_{E_ren} = a^2 \lim_{\tilde{\rho} \rightarrow \rho} (G_{E_ren}^M + G_E^I) = \frac{a^2 T^2}{12} + \lim_{\tilde{\rho} \rightarrow \rho} G_E^I = \\ &= \frac{\tau^2}{48\pi^2} - \frac{\tau}{16\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(1-8\xi)}{(l-4\xi+1)(x+1)^{2l+2}} - \frac{\tau}{2\pi^2(x+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2} \right) \times \\ &\times \frac{(8\xi-1)I_\nu(\tau n)K_\nu(\tau n) + \tau n(I'_\nu(\tau n)K_\nu(\tau n) + I_\nu(\tau n)K'_\nu(\tau n))}{(8\xi-1)K_\nu^2(\tau n) + 2\tau n K'_\nu(\tau n)K_\nu(\tau n)} \times \\ &\times \left[K_\nu(\tau n(x+1)) \right]^2, \quad x = \rho/a, \quad \tau = 2\pi T a. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В пределе $\rho \rightarrow \infty$

$$\langle \phi^2 \rangle_{ren} \simeq \frac{T^2}{12} + \frac{Ta(\xi - 1/8)}{4\pi(\xi - 1/4)\rho^2}. \quad (2.4)$$

При $T = 0$

$$\begin{aligned} a^2 \langle \phi^2 \rangle_{ren} &= -\frac{1}{2\pi^2(1+x)} \int_0^\infty dy \sum_{l=0}^{\infty} \nu \frac{(8\xi-1)I_\nu(y)K_\nu(y) + y(I'_\nu(y)K_\nu(y) + I_\nu(y)K'_\nu(y))}{(8\xi-1)K_\nu^2(y) + 2yK'_\nu(y)K_\nu(y)} \\ &\left[K_\nu(y(1+x)) \right]^2, \quad x = \rho/a, \quad y = ka, \quad \nu = l + 1/2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

результат совпадает с результатом работы [35]. В силу симметрии результат справедлив и в области $\rho < 0$.

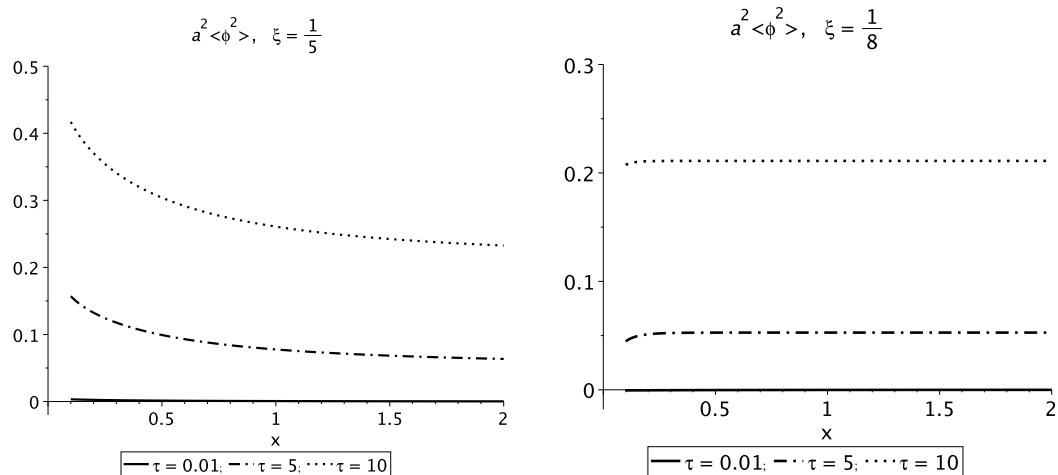


Рис. 1. Графики функции (2.3) для $\xi = 1/5, 1/8$ и $\tau = 2\pi Ta = 0.01, 5, 10$ от $x = \rho/a$.

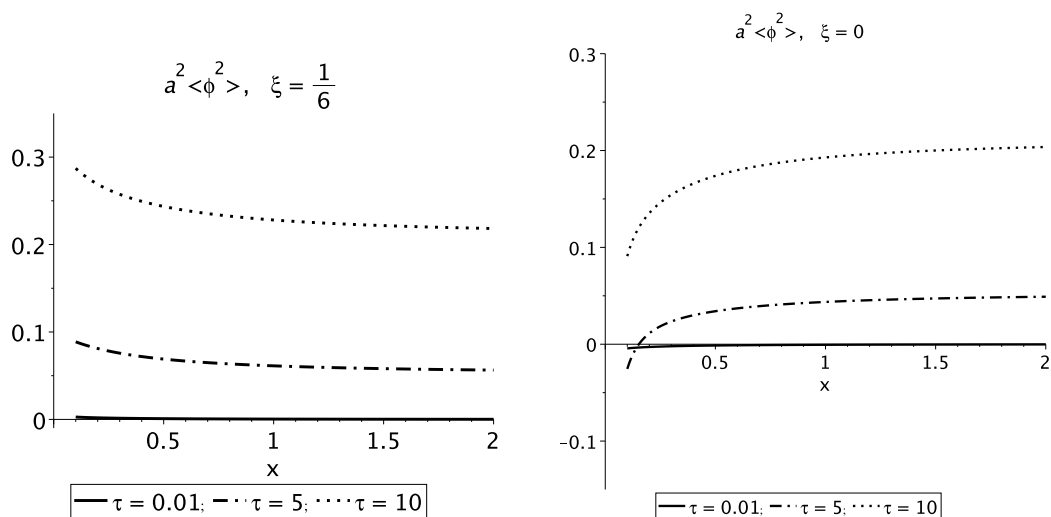


Рис. 2. Графики функции (2.3) для $\xi = 1/6, 0$ и $\tau = 2\pi Ta = 0.01, 5, 10$ от $x = \rho/a$.

Заключение

Получено выражение и проведены численные расчеты квадрата вакуумных флуктуаций $\langle \varphi^2 \rangle_{ren}$ квантованного скалярного поля в пространстве–времени кротовой норы с бесконечно короткой горловиной в предположении о том, что поле является безмассовым, имеет произвольную связь со скалярной кривизной и находится в тепловом квантовом состоянии с произвольной температурой.

Благодарности

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно–образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2022-882

Список литературы

1. Morris M.S. and Thorne K.S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *American Journal of Physics*, 1988, vol. 56, no. 5, pp. 395–399. <https://doi.org/10.1119/1.15620>

2. Sushkov S.V. A selfconsistent semiclassical solution with a throat in the theory of gravity. *Physics Letters A*, 1992, vol. 164, pp. 33–37. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(92\)90901-W](https://doi.org/10.1016/0375-9601(92)90901-W)
3. Hochberg D., Popov A. and Sushkov S. V. Self-consistent wormhole solutions of semiclassical gravity. *Physical Review Letters*, 1997, vol. 78, no. 11, pp. 2050–2053. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.2050>
4. Popov A. Long throat of a wormhole created from vacuum fluctuations. *Classical and Quantum Gravity*, 2005, vol. 22, no. 24, pp. 5223–5230. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/22/24/002>
5. Starobinsky A.A. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Physics Letters B*, 1980, vol. 91, pp. 99–102. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(80\)90670-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(80)90670-X)
6. Mamayev S.G. Mostepanenko V.M. Isotropic cosmological models determined by vacuum quantum effects. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1980, vol. 78, pp. 20–27.
7. Kofman L.A., Sakhni V. Starobinskii A.A. Anisotropic cosmological model created by quantum polarization of vacuum. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1983, vol. 58, pp. 1090–1095.
8. Kofman L.A., Sahni V. A new self-consistent solution of the Einstein equations with one-loop quantum-gravitational corrections. *Physics Letters B*, 1983, vol. 127, pp. 197–200. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(83\)90875-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)90875-4)
9. Kofman L.A., Sahni V. Some self-consistent solutions of the Einstein equations with one-loop quantum gravitational corrections: $G_{ik} = 8\pi G \langle T_{ik} \rangle_{vac}$. *Physics Letters A*, 1986, vol. 117, pp. 275–278. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(86\)90388-9](https://doi.org/10.1016/0375-9601(86)90388-9)
10. Anderson P.R., Hiscock W.A. and Samuel D.A. Stress-energy tensor of quantized scalar fields in static spherically symmetric spacetimes. *Physical review. D, Particles and fields*, 1995, vol. 51, pp. 4337–4358. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.51.4337>
11. Howard K.W. and Candelas P. Quantum stress tensor in Schwarzschild space-time. *Physical Review Letters*, 1984, vol. 53, pp. 403–406. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.53.403>
12. Candelas P. Vacuum polarization in Schwarzschild spacetime. *Physical Review D*, 1980, vol. 21, no. 8, pp. 2185–2202. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.21.2185>
13. Fawcett M.S. The Energy-Momentum Tensor near a Black Hole. *Communications in Mathematical Physics*, 1983, vol. 89, pp. 103–115. <https://doi.org/10.1007/BF01219528>
14. Jensen B.P. and Ottewill A. Renormalized electromagnetic stress tensor in Schwarzschild spacetime. *Physical Review D*, 1989, vol. 39, pp. 1130–1138. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.39.1130>
15. Jensen B.P., Mc Laughlin J.G. and Ottewill A.C. Anisotropy of the quantum thermal state in schwarzschild space-time. *Physical Review D*, 1992, vol. 45, pp. 3002–3005. <https://doi.org/10.1103/PHYSREVD.45.3002>
16. Anderson P.R., Hiscock W.A. and Loran D.J. Semiclassical stability of the extreme Reissner-Nordström black hole. *Physical review letters*, 1995, vol. 74, pp. 4365–4368. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.74.4365>
17. Bezerra de Mello E.R., Bezerra V.B. and Khusnutdinov N.R. Vacuum polarization of a massless spinor field in global monopole spacetime. *Physical Review D*, 1999, vol. 60, pp. 063506–063514. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.60.063506>
18. Frolov V.P. and Zel'nikov A.I. Vacuum polarization by a massive scalar field in Schwarzschild spacetime. *Physics Letters B*, 1982, vol. 115, pp. 372–374. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(82\)90520-2](https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)90520-2)
19. Frolov V.P. and Zel'nikov A.I. Vacuum polarization of massive fields in Kerr spacetime. *Physics Letters B*, 1983, vol. 123, pp. 197–199. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(83\)90421-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)90421-5)
20. Frolov V.P. and Zel'nikov A.I. Vacuum polarization of massive fields near rotating black holes. *Physical Review D*, 1984, vol. 29, pp. 1057–1066. <https://doi.org/10.1103/PHYSREVD.29.1057>
21. Herman R. Method for calculating the imaginary part of the Hadamard Elementary function $G^{(1)}$ in static, spherically symmetric spacetimes. *Physical Review D*, 1998, vol. 58, pp. 084028–084038. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.58.084028>
22. Matyjasek J. Stress-energy tensor of neutral massive fields in the Reissner-Nordstrom spacetime. *Physical Review D*, 2000, vol. 61, pp. 124019–124028. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.61.124019>
23. Koyama H., Nambu Y. and Tomimatsu A. Vacuum polarization of massive scalar fields on the black hole horizon. *Modern Physics Letters A*, 2000, vol. 15, pp. 815–824. <https://doi.org/10.1142/S0217732300000803>
24. Matyjasek J. Vacuum polarization of massive scalar fields in the spacetime of the electrically charged nonlinear black hole. *Physical Review D*, 2001, vol. 63, pp. 084004–084014. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.63.084004>

25. Page D.N. Thermal stress tensors in static Einstein spaces. *Physical Review D*, 1982, vol. 25, pp. 1499–1509. <https://doi.org/10.1103/PHYSREVD.25.1499>
26. Brown M.R. and Ottewill A.C. Effective actions and conformal transformations. *Physical Review D*, 1985, vol. 31, pp. 2514–2520. <https://doi.org/10.1103/PHYSREVD.31.2514>
27. Brown M.R., Ottewill A.C. and Page D.N. Conformally invariant quantum field theory in static Einstein space-times. *Physical Review D*, 1986, vol. 33, pp. 2840–2850. <https://doi.org/10.1103/PHYSREVD.33.2840>
28. Zannias T. Renormalized thermal stress tensor for arbitrary static space-times. *Physical Review D*, 1984, vol. 30, pp. 1161–1167. <https://doi.org/10.1103/PHYSREVD.30.1161>
29. Frolov V.P. and Zel'nikov A.I. Killing approximation for vacuum and thermal stress-energy tensor in static space-times. *Physical Review D*, 1987, vol. 35, pp. 3031–3044. <https://doi.org/10.1103/PHYSREVD.35.3031>
30. Groves P.B., Anderson P.R. and Carlson E.D. Method to compute the stress-energy tensor for the massless spin 1/2 field in a general static spherically symmetric spacetime. *Physical Review D*, 2002, vol. 66, pp. 124017–124037. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.66.124017>
31. Owen Pavel Fernández Piedra. Vacuum polarization of the quantized massive scalar field in the global monopole spacetime II: the renormalized quantum stress energy tensor. *Physical Review D*, 2019, vol. 99, pp. 125007–125017. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.125007>
32. Nakazawa N. and Fukuyama T. On the energy-momentum tensor at finite temperature in curved space-time. *Nuclear Physics B*, 1985, vol. 252, pp. 621–634. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(85\)90465-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(85)90465-1)
33. Christensen S.M. Vacuum expectation value of the stress tensor in an arbitrary curved background: The covariant point-separation method. *Physical Review D*, 1976, vol. 14, pp. 2490–2501. <https://doi.org/10.1103/PHYSREVD.14.2490>
34. Christensen S.M. Regularization, renormalization, and covariant geodesic point separation. *Physical Review D*, 1978, vol. 17, pp. 946–963. <https://doi.org/10.1103/PHYSREVD.17.946>
35. Bezerra V.B., Bezerra De Mello E.R., Khusnutdinov N.R., and Sushkov S.V. Vacuum polarization of a massive scalar field in a wormhole spacetime. *Physical Review D*, 2010, vol. 81, pp. 084034–084039. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.084034>
36. Bateman H. and Erdelyi F. *Higher Transcendental Functions Vol. I*, New York: McGraw-Hill, 1953, 292 p.

References

1. Morris M.S. and Thorne K.S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *American Journal of Physics*, 1988, vol. 56, no. 5, pp. 395–399. <https://doi.org/10.1119/1.15620>
2. Sushkov S.V. A selfconsistent semiclassical solution with a throat in the theory of gravity. *Physics Letters A*, 1992, vol. 164, pp. 33–37. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(92\)90901-W](https://doi.org/10.1016/0375-9601(92)90901-W)
3. Hochberg D., Popov A. and Sushkov S. V. Self-consistent wormhole solutions of semiclassical gravity. *Physical Review Letters*, 1997, vol. 78, no. 11, pp. 2050–2053. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.2050>
4. Popov A. Long throat of a wormhole created from vacuum fluctuations. *Classical and Quantum Gravity*, 2005, vol. 22, no. 24, pp. 5223–5230. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/22/24/002>
5. Starobinsky A.A. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Physics Letters B*, 1980, vol. 91, pp. 99–102. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(80\)90670-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(80)90670-X)
6. Mamayev S.G. Mostepanenko V.M. Isotropic cosmological models determined by vacuum quantum effects. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1980, vol. 78, pp. 20–27.
7. Kofman L.A., Sakhni V. Starobinskii A.A. Anisotropic cosmological model created by quantum polarization of vacuum. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1983, vol. 58, pp. 1090–1095.
8. Kofman L.A., Sahni V. A new self-consistent solution of the Einstein equations with one-loop quantum-gravitational corrections. *Physics Letters B*, 1983, vol. 127, pp. 197–200. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(83\)90875-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)90875-4)
9. Kofman L.A., Sahni V. Some self-consistent solutions of the Einstein equations with one-loop quantum gravitational corrections: $G_{ik} = 8\pi G \langle T_{ik} \rangle_{vac}$. *Physics Letters A*, 1986, vol. 117, pp. 275–278. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(86\)90388-9](https://doi.org/10.1016/0375-9601(86)90388-9)

10. Anderson P.R., Hiscock W.A. and Samuel D.A. Stress-energy tensor of quantized scalar fields in static spherically symmetric spacetimes. *Physical review. D, Particles and fields*, 1995, vol. 51, pp. 4337–4358. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.51.4337>
11. Howard K.W. and Candelas P. Quantum stress tensor in Schwarzschild space-time. *Physical Review Letters*, 1984, vol. 53, pp. 403–406. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.53.403>
12. Candelas P. Vacuum polarization in Schwarzschild spacetime. *Physical Review D*, 1980, vol. 21, no. 8, pp. 2185–2202. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.21.2185>
13. Fawcett M.S. The Energy-Momentum Tensor near a Black Hole. *Communications in Mathematical Physics*, 1983, vol. 89, pp. 103–115. <https://doi.org/10.1007/BF01219528>
14. Jensen B.P. and Ottewill A. Renormalized electromagnetic stress tensor in Schwarzschild spacetime. *Physical Review D*, 1989, vol. 39, pp. 1130–1138. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.39.1130>
15. Jensen B.P., Mc Laughlin J.G. and Ottewill A.C. Anisotropy of the quantum thermal state in schwarzschild space-time. *Physical Review D*, 1992, vol. 45, pp. 3002–3005. <https://doi.org/10.1103/PHYSREVD.45.3002>
16. Anderson P.R., Hiscock W.A. and Loranz D.J. Semiclassical stability of the extreme Reissner-Nordström black hole. *Physical review letters*, 1995, vol. 74, pp. 4365–4368. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.74.4365>
17. Bezerra de Mello E.R., Bezerra V.B. and Khusnutdinov N.R. Vacuum polarization of a massless spinor field in global monopole spacetime. *Physical Review D*, 1999, vol. 60, pp. 063506–063514. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.60.063506>
18. Frolov V.P. and Zel'nikov A.I. Vacuum polarization by a massive scalar field in Schwarzschild spacetime. *Physics Letters B*, 1982, vol. 115, pp. 372–374. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(82\)90520-2](https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)90520-2)
19. Frolov V.P. and Zel'nikov A.I. Vacuum polarization of massive fields in Kerr spacetime. *Physics Letters B*, 1983, vol. 123, pp. 197–199. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(83\)90421-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)90421-5)
20. Frolov V.P. and Zel'nikov A.I. Vacuum polarization of massive fields near rotating black holes. *Physical Review D*, 1984, vol. 29, pp. 1057–1066. <https://doi.org/10.1103/PHYSREVD.29.1057>
21. Herman R. Method for calculating the imaginary part of the Hadamard Elementary function $G^{(1)}$ in static, spherically symmetric spacetimes. *Physical Review D*, 1998, vol. 58, pp. 084028–084038. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.58.084028>
22. Matyjasek J. Stress-energy tensor of neutral massive fields in the Reissner-Nordstrom spacetime. *Physical Review D*, 2000, vol. 61, pp. 124019–124028. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.61.124019>
23. Koyama H., Nambu Y. and Tomimatsu A. Vacuum polarization of massive scalar fields on the black hole horizon. *Modern Physics Letters A*, 2000, vol. 15, pp. 815–824. <https://doi.org/10.1142/S0217732300000803>
24. Matyjasek J. Vacuum polarization of massive scalar fields in the spacetime of the electrically charged non-linear black hole. *Physical Review D*, 2001, vol. 63, pp. 084004–084014. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.63.084004>
25. Page D.N. Thermal stress tensors in static Einstein spaces. *Physical Review D*, 1982, vol. 25, pp. 1499–1509. <https://doi.org/10.1103/PHYSREVD.25.1499>
26. Brown M.R. and Ottewill A.C. Effective actions and conformal transformations. *Physical Review D*, 1985, vol. 31, pp. 2514–2520. <https://doi.org/10.1103/PHYSREVD.31.2514>
27. Brown M.R., Ottewill A.C. and Page D.N. Conformally invariant quantum field theory in static Einstein space-times. *Physical Review D*, 1986, vol. 33, pp. 2840–2850. <https://doi.org/10.1103/PHYSREVD.33.2840>
28. Zannias T. Renormalized thermal stress tensor for arbitrary static space-times. *Physical Review D*, 1984, vol. 30, pp. 1161–1167. <https://doi.org/10.1103/PHYSREVD.30.1161>
29. Frolov V.P. and Zel'nikov A.I. Killing approximation for vacuum and thermal stress-energy tensor in static space-times. *Physical Review D*, 1987, vol. 35, pp. 3031–3044. <https://doi.org/10.1103/PHYSREVD.35.3031>
30. Groves P.B., Anderson P.R. and Carlson E.D. Method to compute the stress-energy tensor for the massless spin 1/2 field in a general static spherically symmetric spacetime. *Physical Review D*, 2002, vol. 66, pp. 124017–124037. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.66.124017>
31. Owen Pavel Fernández Piedra. Vacuum polarization of the quantized massive scalar field in the global monopole spacetime II: the renormalized quantum stress energy tensor. *Physical Review D*, 2019, vol. 99, pp. 125007–125017. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.125007>
32. Nakazawa N. and Fukuyama T. On the energy-momentum tensor at finite temperature in curved space-time. *Nuclear Physics B*, 1985, vol. 252, pp. 621–634. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(85\)90465-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(85)90465-1)

33. Christensen S.M. Vacuum expectation value of the stress tensor in an arbitrary curved background: The covariant point-separation method. *Physical Review D*, 1976, vol. 14, pp. 2490–2501. <https://doi.org/10.1103/PHYSREVD.14.2490>
34. Christensen S.M. Regularization, renormalization, and covariant geodesic point separation. *Physical Review D*, 1978, vol. 17, pp. 946–963. <https://doi.org/10.1103/PHYSREVD.17.946>
35. Bezerra V.B., Bezerra De Mello E.R., Khusnutdinov N.R., and Sushkov S.V. Vacuum polarization of a massive scalar field in a wormhole spacetime. *Physical Review D*, 2010, vol. 81, pp. 084034–084039. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.084034>
36. Bateman H. and Erdelyi F. *Higher Transcendental Functions Vol. I*. New York: McGraw-Hill, 1953, 292 p.

Авторы

Дмитрий Сергеевич Лисенков, ассистент кафедры геометрии, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, 35, г. Казань, 420008, Россия.

E-mail: lesman1985@gmail.com

Аркадий Александрович Попов, д.ф.-м.н., заведующий кафедры геометрии, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, 35, г. Казань, 420008, Россия.

E-mail: apopov@kpfu.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Лисенков Д. С., Попов А. А. Поляризация вакуума квантованного скалярного поля при ненулевой температуре на фоне кротовой норы с бесконечно короткой горловиной. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2022. № 39. С. 43–53.

Authors

Lisenkov Dmitriy Sergeevich, Assistant of the Department of Geometry, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: lesman1985@gmail.com

Popov Arkadiy Alexandrovich, doctor of science, associate professor, Head of Department of Geometry, geometry department, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: apopov@kpfu.ru

Please cite this article in English as:

Lisenkov D. S., Popov A. A. Vacuum polarization of a quantized scalar field in the thermal state on the short-throat flat-space wormhole background. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2022, no. 39, pp. 43–53.