$\text{ удк } 5530.12 + 531.51 + 517.944 + 519.713 + 514.774 + 519.711.3 + 551.5.001.57 + 517.957 \\ \text{ }$

© Игнатьев Ю. Г., 2022

ГРАВИТАЦИОННО-СКАЛЯРНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С АСИММЕТРИЧНЫМ СКАЛЯРНЫМ ХИГГСОВЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ФЕРМИОНОВ

Игнатьев Ю. Г.^{а,1}

^а Казанский федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия.

Сформулирована математическая модель эволюции плоских возмущений в космологической двухкомпонентной статистической системе полностью вырожденных скалярно заряженных фермионов с асимметричным скалярным Хиггсовым взаимодействием. Построена полная замкнутая система дифференциальных уравнений, описывающих невозмущенное состояние однородной и изотропной системы, и система самосогласованных эволюционных уравнений малых возмущений. Найдены и исследованы решения системы эволюционных уравнений в коротковолновом приближении. Показано, что в такой системе возникают неустойчивые коротковолновые моды возмущений. Выявлены и определены области неустойчивости коротковолновых возмущений и установлено соответствие модели ранее изученным моделям.

Ключевые слова: скалярно заряженная плазма, космологическая модель, скалярные поля, асимметричный скалярный дублет, гравитационная устойчивость, коротковолновое приближение.

GRAVITATIONAL-SCALAR UNSTABILITY OF A COSMOLOGICAL MODEL BASED ON A TWO-COMPONENT STATISTICAL SYSTEM WITH ASYMMETRIC SCALAR HIGGS FERMION INTERACTION

Ignat'ev Yu. G.^{a,1}

^a Kazan Federal University, Kazan, 420008, Russia.

A mathematical model is formulated for the evolution of plane perturbations in a cosmological two-component statistical system of completely degenerate scalarly charged fermions with an asymmetric scalar Higgs interaction. A complete closed system of differential equations describing the unperturbed state of a homogeneous and isotropic system and a system of self-consistent evolutionary equations of small perturbations are constructed. Solutions of the system of evolutionary equations are found and studied in the short-wavelength approximation. It is shown that unstable short-wavelength perturbation modes arise in such a system. The regions of instability of short-wave disturbances are identified and determined, and the correspondence of the model to the previously studied models is established.

Keywords: scalarly charged plasma, cosmological model, scalar fields, asymmetric scalar doublet, gravitational stability, shortwave approximation.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S, 52.27.Ny, 02.60.Cb, 07.05.Tp, 04.25.-g DOI: 10.17238/issn2226-8812.2022.1.64-89

Введение

В последние годы в связи с одновременным прямым экспериментальным обнаружением в 2016 г. гравитационных волн и Черных Дыр [1], [2] и последующим их исследованием были подтверждены, в частности, более ранние косвенные наблюдения по орбитам звезд сверхмассивной

¹E-mail: yurii.ignatev.1947@yandex.ru

Черной Дыры в центре нашей Галактики с массой порядка $4 \cdot 10^6 M_{\odot}$ (см., например, [3], [4]), а также существование сверхмассивных Черных Дыр в центрах галактик и квазаров с массами в диапазоне $10^9 \div 10^{11} M_{\odot}$, как, например, сверхмассивная Черная Дыра SDSS J140821.67+025733.2 в центре квазара SDSS J140821, имеющая массу $1.96 \cdot 10^{11} M_{\odot}$.

Считается, что сверхмассивные Черные Дыры с массой ~ $10^9 M_{\odot}$ являются центральными объектами светящихся квазаров, наблюдаемых при красных смещениях z > 6, но их астрофизическое происхождение остается не до конца понятным. В настоящее время открыто более 200 квазаров с z > 6 и несколько объектов с z > 7. Квазар с наибольшим красным смещением при z = 7.5, что соответствует возрасту Вселенной в 650 млн лет, имеет абсолютную светимость $1, 4 \cdot 10^{47}$ erg/sec, при этом оценка массы по скорости движения газа в квазаре дает величину $1, 6\pm 0, 4 \cdot 10^9 M_{\odot}$ [5]. Эти наблюдательные данные ставят вопрос о механизме образования и быстрого роста таких объектов в ранней Вселенной.

Результаты численного моделирования [6] налагают ряд ограничений на параметры образования сверхмассивных Черных дыр. Так, например, показано, что легкие зародыши Черных Дыр с массой $M \leq 10^3 M_{\odot}$ даже при сверхкритической аккреции не могут вырасти до масс порядка $10^8 M_{\odot}$ на z = 6. Для образования сверхмассивных Черных Дыр с массами $10^8 \div 10^9 M_{\odot}$ необходимы более тяжелые зародыши $M \sim 10^4 \div 10^6 M_{\odot}$ и богатые газом галактики, содержащие квазары. Однако, в настоящее время нет достаточно убедительных моделей появления таких тяжелых зародышей в ранней Вселенной. Кроме того, было обнаружено, что пространственная плотность светящихся квазаров быстро уменьшается с увеличением красного смещения, причем эта тенденция усиливается за пределами $z = 5 \div 6$ [7].

Интерес к механизмам образования сверхмассивных Черных Дыр с учетом факта доминирующего присутствия их в составе квазаров, вызван, в частности, тем обстоятельством, что такие Черные Дыры формируются в составе квазаров на достаточно ранних стадиях эволюции Вселенной, до образования звезд. Это обстоятельство, в частности, открывает возможность формирования сверхмассивных Черных Дыр в условиях, когда существенное влияние на этот процесс могут оказать скалярные поля и барионная темная материя. В связи с этим отметим работы [8], [9] и [10], в которых рассматривается возможность существование скалярных гало и скалярных волос в окрестности сверхмассивных Черных Дыр.

В [11] на основе исследования систем скалярно заряженных вырожденных фермионов с фантомным взаимодействием было сформулировано следующее предположение: 1). холодная полностью вырожденная Ферми - система с очень большими эффективными массами скалярно заряженных фермионов может стать хорошей моделью темной материи; 2). на определенном этапе космологической эволюции гравитационные неустойчивости в нерелятивистской материи могут привести к возникновению обособленных областей с темной материей; 3). стандартные куперовские механизмы в Ферми - системах с отталкиванием одноименно заряженных частиц могут привести к образованию бозонов из пар фермионов и, тем самым, – к сверхтекучести областей темной материи; 4). при росте эффективных масс фермионов в растущем скалярном поле выше планковского значения массивные фермионы могут могут образовать устойчивые первичные Черные Дыры в варианте со сверхтекучими квази-бозонами с нулевым спином.

В [12] – [13] на основе развитой теории неустойчивости однокомпонентной системы скалярно заряженных вырожденных фермионов с синглетным Хиггсовым скалярным взаимодействием в так называемом жестком ВКБ -приближении было подтверждено предположение о неустойчивости коротковолновых возмущений. Эти предварительные исследования показали необходимость всестороннего и более глубокого изучения статистических систем скалярно заряженных частиц.

Далее, в [14] были предложены две наиболее простых модели взаимодействия фермионов с асимметричным скалярным дублетом: в первой модели такое взаимодействие осуществляется двумя типами разносортных фермионов, один из которых является источником канонического скалярного поля, а второй – фантомного (модель \mathfrak{M}_1); во второй модели имеется один сорт фер-

мионов, обладающих парным зарядом — каноническим и фантомным (модель \mathfrak{M}_2). Там же был проведен и качественный анализ динамической систем модели \mathfrak{M}_1 . В работе [15] было проведено численное моделирование космологической модели \mathfrak{M}_1 , на основе которого выявлены особенности этой модели, в частности, возможность существования фаз космологического сжатия, осцилляции параметра Хаббла, а также возможность вселенных с конечным временем жизни.

Заметим, во-первых, что в случае космологической модели, основанной на классическом вакуумном скалярном синглете параметр Хаббла является невозрастающей функцией времени $(H \leq 0)^1$. При этом инфляционные решения H = Const возможны лишь при постоянных значениях потенциала скалярного поля, соответствующих точкам устойчивого равновесия динамической системы. Однако, оказываются, что такие решения устойчивы лишь по отношению к бесконечно малым возмущениям. Как показано в [16], а также более детально – в [17] и [18], даже очень малые, но конечные, отклонения значения скалярного потенциала от равновесного значения приводит к неустойчивости инфляционных решений и к переходу космологической модели на стадию сжатия. Добавление в космологическую систему фантомного поля стабилизирует эту неустойчивость и поддерживает режим устойчивого космологического расширения [16]. Поэтому, несмотря на известные энергетические и квантовополевые проблемы с синглетным фантомным полем (см., например, обсуждение этого вопроса в [18], а также цитированную там литературу), мы включаем фантомное поле в исследуемую ниже модель. При этом переход к синглетной модели, основанной на чисто классическом либо чисто фантомном поле, управляется параметрами модели, которые для теоретической полноты сохраняются нами произвольными, что позволяет выявлять особенности воздействия компонент модели на ее свойства.

Во-вторых, заметим, что мы рассматриваем модель без излучения, в которой материя представляется холодной вырожденной системой скалярно заряженных фермионов и соответствующими этим зарядам скалярными Хиггсовыми полями. Такую холодную систему фермионов можно рассматривать в качестве модели темной материи на ранних стадиях эволюции Вселенной. В данной работе мы исследуем гравитационную устойчивость модели \mathfrak{M}_1 двухкомпонентной статистической системы с асимметричным скалярным взаимодействием фермионов, снимая условие жесткого ВКБ -приближения [12] – [13], и проведем сравнение с результатами предыдущих исследований.

A. Математическая модель двухкомпонентной системы вырожденных фермионов с асимметричным скалярным Хиггсовым взаимодействием

В [14] показано, как на основе Лагранжева формализма из микроскопических уравнений движения скалярно заряженных частиц можно получить макроскопическую модель статистической системы скалярно заряженных частиц, описываемую макроскопическими потоками. В данной статье мы воспользуемся результатами, полученными в [14].

Ниже мы будем рассматривать космологическую модель, основанную на двухкомпонентной вырожденной статистической системе скалярно заряженных фермионов и асимметричном скалярном Хиггсовом дублете, состоящем из канонического скалярного поля Φ и фантомного поля φ [14]. Согласно [14] динамические массы m_z и m_ζ фермионов z и ζ с зарядами e_z и e_ζ по отношению к каноническому полю Φ и фантомному полю φ описываются формулами:

$$m_z = e_z \Phi, \quad m_\zeta = e_\zeta \varphi.$$
 (1.1)

Функция Лагранжа L_s не взаимодействующих между собой скалярных Хиггсовых полей асимметричного скалярного дублета есть

$$L_{s} \equiv L_{\Phi} + L_{\varphi} = \frac{1}{16\pi} (g^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} - 2V(\Phi)) + \frac{1}{16\pi} (-g^{ik} \varphi_{,i} \varphi_{,k} - 2\mathcal{V}(\varphi)),$$
(1.2)
(1.3)

¹см., например, [16].

где

$$V(\Phi) = -\frac{\alpha}{4} \left(\Phi^2 - \frac{m^2}{\alpha} \right)^2; \qquad \mathcal{V}(\Phi) = -\frac{\beta}{4} \left(\varphi^2 - \frac{\mathfrak{m}^2}{\beta} \right)^2 \tag{1.4}$$

– потенциальные энергии соответствующих скалярных полей, α, β – константы их самодействия,
 m, m – их массы квантов. Тензор энергии - импульса скалярных полей относительно функции Лагранжа (1.2) есть:

$$T^{i}_{(s)k} \equiv T^{i}_{(\Phi)\ k} + T^{i}_{(\varphi)\ k} = \frac{1}{16\pi} \left(2\Phi^{,i}\Phi_{,k}\delta^{i}_{k}\Phi_{,j}\Phi^{,j} + 2V(\Phi)\delta^{i}_{k} \right) + \frac{1}{16\pi} \left(-2\varphi^{,i}\varphi_{,k}\delta^{i}_{k}\varphi_{,j}\varphi^{,j} + 2\mathcal{V}(\varphi)\delta^{i}_{k} \right),$$
(1.5)

Далее, тензор энергии - импульса равновесной статистической системы равен:

$$T^{i}_{(p)k} = (\varepsilon_p + p_p)u^{i}u_k - \delta^{i}_k p, \qquad (1.6)$$

где u^i – вектор макроскопической скорости статистической системы.

Уравнения Эйнштейна для системы "скалярные поля+частицы" имеют вид:

$$R_k^i - \frac{1}{2}\delta_k^i R = 8\pi T_k^i + \delta_k^i \Lambda_0, \qquad (1.7)$$

где

$$T_k^i = T_{(s)k}^i + T_{(p)k}^i,$$

Λ₀ – затравочное значение космологической постоянной, связанное с ее наблюдаемым значением Λ, получающимся при изъятии постоянных слагаемых в потенциальной энергии, соотношением:

$$\Lambda = \Lambda_0 - \frac{1}{4} \sum_r \frac{m_r^4}{\alpha_r}.$$
(1.8)

Строгими макроскопическими следствиями кинетической теории являются уравнения nepeноса, в том числе закон сохранения некоторого векторного тока, соответствующего микроскопическому закону сохранения в реакциях некоторого фундаментального заряда Q с мультизарядами частиц $q_{(a)}^r$ –

$$\nabla_i \sum_{a} q^r_{(a)} n^i_{(a)} = 0, \tag{1.9}$$

а также законы сохранения энергии - импульса статистической системы:

$$\nabla_k T_p^{ik} - \sum_r \sigma^r \nabla^i \Phi_r = 0, \qquad (1.10)$$

где σ^r – плотность скалярных зарядов по отношению к полю Φ_r [19].

Из соотношения нормировки вектора скорости вытекает известное тождество

$$u_{,i}^{k}u_{k} \equiv 0, \tag{1.11}$$

которое позволяет привести законы сохранения энергии - импульса (1.10) к виду уравнений идеальной гидродинамики

$$(\varepsilon_p + p_p)u^{i}{}_{,k}u^{k} = (g^{ik} - u^{i}u^{k})\left(p_{p,k} + \sum_{r}\sigma^{r}\Phi_{r,k}\right);$$
(1.12)

$$\nabla_k[(\varepsilon_p + p_p)u^k] = u^k \left(p_{p,k} + \sum_r \sigma^r \Phi_{r,k} \right), \tag{1.13}$$

а законы сохранения фундаментальных заряда \mathbf{Q}^r (1.9) к виду

$$\nabla_k \rho^r u^k = 0; \quad (r = \overline{1, N}), \tag{1.14}$$

где

$$\rho^r \equiv \sum_a q^r_{(a)} n_{(a)} \tag{1.15}$$

– кинематическая плотность скалярного заряда статистической системы по отношению к скалярному полю Φ_r .

Макроскопические скаляры для двухкомпонентной статистической системы вырожденных фермионов принимают вид:

$$\varepsilon_p = \frac{e_z^4 \Phi^4}{8\pi^2} F_2(\psi_z) + \frac{e_\zeta^4 \varphi^4}{8\pi^2} F_2(\psi_\zeta); \qquad (1.16)$$

$$p_p = \frac{e_z^4 \Phi^4}{24\pi^2} (F_2(\psi_z) - 4F_1(\psi_z)) + \frac{e_\zeta^4 \varphi^4}{24\pi^2} (F_2(\psi_\zeta) - 4F_1(\psi_\zeta));$$
(1.17)

$$\sigma^{z} = \frac{e_{z}^{4} \Phi^{3}}{2\pi^{2}} F_{1}(\psi_{z}); \qquad \sigma^{\zeta} = \frac{e_{\zeta}^{4} \varphi^{3}}{2\pi^{2}} F_{1}(\psi_{\zeta}), \qquad (1.18)$$

где σ^z и σ^ζ – плотности скалярных зарядов e_z и e_ζ и

$$\psi_z = \frac{\pi_z}{|e_z \Phi|}; \qquad \psi_\zeta = \frac{\pi_\zeta}{|e_\zeta \varphi|}. \tag{1.19}$$

Для сокращения письма введены функции $F_1(\psi)$ и $F_2(\psi)$:

$$F_1(\psi) = \psi \sqrt{1 + \psi^2} - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2}); \qquad (1.20)$$

$$F_2(\psi) = \psi \sqrt{1 + \psi^2} (1 + 2\psi^2) - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2}).$$
(1.21)

Функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$, во-первых, являются нечетными:

$$F_1(-x) = -F_1(x); \quad F_2(-x) = -F_2(x),$$
 (1.22)

а, во-вторых, имеют следующие асимптотики

$$F_1(x)|_{x\to 0} \simeq \frac{2}{3} x^3; F_2(x)|_{x\to 0} \simeq \frac{8}{3} x^3;$$

$$(F_2(x) - 4F_1(x))|_{x\to 0} \simeq \frac{8}{5} x^5;$$
(1.23)

$$F_1(x)|_{x \to \pm \infty} \simeq x|x|; \quad F_2(x)|_{x \to \pm \infty} \simeq 2x^3|x|. \tag{1.24}$$

Выпишем также полезные для дальнейшего выражения для производных функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$:

$$F_1'(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}}; \quad F_2'(x) = 8x^2\sqrt{1+x^2}; \quad \frac{d}{dx}x^3\sqrt{1+x^2} = 3x^2\sqrt{1+x^2} + \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}}.$$
 (1.25)

Наконец, уравнения скалярных полей для двухкомпонентной системы принимают вид:

$$\Box \Phi + m^2 \Phi - \alpha \Phi^3 = -\frac{4}{\pi^2} e_z^4 \Phi^4 F_1(\psi_z), \qquad (1.26)$$

$$-\Box\varphi + \mathfrak{m}^{2}\varphi - \beta\varphi^{3} = -\frac{4}{\pi^{2}}e_{\zeta}^{4}\varphi^{4}F_{1}(\psi_{\zeta}).$$
(1.27)

В. Линейные плоские возмущения космологической модели

В.1. Невозмущенное изотропное однородное основное состояние

В качестве фоновой рассмотрим пространственно плоскую метрику Фридмана

$$ds_0^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) \equiv dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$
(2.1)

где космологическое время t связано с временной переменной η соотношением

$$t = \int a(\eta) d\eta, \tag{2.2}$$

а в качестве фонового решения рассмотрим однородное изотропное распределение материи, в котором все термодинамические функции и скалярные поля зависят только от времени:

S0:
$$\Phi = \Phi(t); \ \varphi = \varphi(t); \ \pi_z = \pi_z(t); \ \pi_\zeta = \pi_\zeta(t); \ u^i = u^i(t).$$
 (2.3)

Нетрудно убедиться, что

$$u^i = \delta^i_4 \tag{2.4}$$

обращает уравнения (1.12) в тождества, а система уравнений (1.13) – (1.14) сводится к 3-м материальным уравнениям:

$$\dot{\varepsilon}_p + 3\frac{a}{a}(\varepsilon_p + p_p) = \sigma^z \dot{\Phi} + \sigma^\zeta \dot{\varphi}; \qquad (2.5)$$

$$\dot{n}_z + 3\frac{\dot{a}}{a}n_z = 0, \tag{2.6}$$

$$\dot{n}_{\zeta} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_{\zeta} = 0. \tag{2.7}$$

где $\dot{\phi} \equiv d\phi/dt$. В [14] показано, что система уравнений (2.5) – (2.7) имеет простые решения:

$$a\pi_z = \text{const}; \qquad a\pi_\zeta = \text{const.}$$
 (2.8)

C учетом (2.8) и (1.1) запишем безразмерные функции ψ_z и ψ_ζ (1.19) в явном виде:

$$\psi_z = \frac{\pi_z^0}{a|e_z\Phi|} e^{-\xi}, \quad \psi_\zeta = \frac{\pi_\zeta^0}{a|e_\zeta\varphi|} e^{-\xi} \quad (\pi_{(a)}^0 = \pi_{(a)}(0)), \tag{2.9}$$

где мы перешли к новой переменной $\xi(t)$

$$\xi = \ln a, \tag{2.10}$$

полагая здесь и в дальнейшем

$$\xi(0) = 0. \tag{2.11}$$

Далее, тензор энергии - импульса скалярного поля в невозмущенном состоянии также принимает вид тензора энергии - импульса идеальной изотропной жидкости:

$$T_s^{ik} = (\varepsilon_s + p_s)u^i u^k - p_s g^{ik}, \qquad (2.12)$$

причем:

$$\varepsilon_s = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{2} \frac{\dot{\Phi}^2 - \dot{\varphi}^2}{a^2} + V(\Phi) + \mathcal{V}(\varphi) \right); \tag{2.13}$$

$$p_s = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{2} \frac{\dot{\Phi}^2 - \dot{\varphi}^2}{a^2} - V(\Phi) - \mathcal{V}(\varphi) \right), \tag{2.14}$$

так что:

$$\varepsilon_s + p_s = \frac{\mathrm{e}}{8\pi} \frac{\dot{\Phi}^2 - \dot{\varphi}^2}{a^2}.$$
(2.15)

Уравнения невозмущенных скалярных полей (1.26) – (1.27) в метрике Фридмана принимают вид:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + m^2\Phi - \alpha\Phi^3 = -8\pi a^2\sigma^z, \qquad (2.16)$$

$$\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} - \mathfrak{m}^2\varphi + \beta\varphi^3 = 8\pi a^2\sigma^\zeta \tag{2.17}$$

где плотности скалярных зарядов σ^z и σ^ζ описываются выражениями (1.18), в которые необходимо подставить значения функций ψ_z и ψ_ζ (2.9).

Наконец, независимые уравнения Эйнштейна нулевого приближения имеют вид (см. [14]):

$$\dot{H} = -\frac{\Phi^2}{2} + \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{4}{3\pi} e_z^4 \Phi^4 \psi_z^3 \sqrt{1 + \psi_z^2} - \frac{4}{3\pi} e_\zeta^4 \varphi^4 \psi_\zeta^3 \sqrt{1 + \psi_\zeta^2}; \qquad (2.18)$$

$$3H^2 - \Lambda - \frac{\dot{\Phi}^2}{2} + \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{m^2 \Phi^2}{2} + \frac{\alpha \Phi^4}{4} - \frac{\mathfrak{m}^2 \varphi^2}{2} + \frac{\beta \varphi^4}{4} - \frac{e_z^4 \Phi^4}{\pi} F_2(\psi_z) - \frac{e_\zeta^4 \varphi^4}{\pi} F_2(\psi_\zeta) = 0.$$
(2.19)

где $H(\eta)$ – параметр Хаббла,

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \equiv \dot{\xi}.$$
 (2.20)

Таким образом, уравнения (2.16), (2.17), (2.22) и (2.20) относительно функций $\xi(t)$, H(t), $\Phi(t)$ составляют полную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих исследуемую невозмущенную космологическую модель. При этом уравнение (2.19), как показано, например, в [14], является первым интегралом этой системы, с помощью которого необходимо определять начальное значение параметра Хаббла при решении задачи Коши. Система уравнений (2.16), (2.17), (2.22), (2.19) и (2.20) исследовалась методами качественной теории дифференциальных уравнений в [14] и численными методами в работе [15].

Заметим, что указанную систему уравнений проще исследовать во временном масштабе физического времени t (2.2), поскольку относительно этой переменной полная автономная система уравнений космологической модели принимает наиболее простой вид [14]:

$$\dot{\xi} = H; \ \dot{\Phi} = Z; \ \dot{\varphi} = z; \tag{2.21}$$

$$\dot{H} = -\frac{Z^2}{2} + \frac{z^2}{2} - \frac{4}{3\pi} e_z^4 \Phi^4 \psi_z^3 \sqrt{1 + \psi_z^2} - \frac{4}{3\pi} e_\zeta^4 \varphi^4 \psi_\zeta^3 \sqrt{1 + \psi_\zeta^2};$$
(2.22)

$$\dot{Z} = -3HZ - m^2 \Phi + \Phi^3 \left(\alpha - \frac{4e_z^4}{\pi} F_1(\psi_z) \right);$$
(2.23)

$$\dot{z} = -3Hz + \mathfrak{m}^2 \varphi - \varphi^3 \left(\beta - \frac{4e_{\zeta}^4}{\pi} F_1(\psi_{\zeta})\right), \qquad (2.24)$$

причем выражение для первого интеграла (2.19) можно переписать в форме

$$3H^2 - \Lambda - \frac{Z^2}{2} + \frac{z^2}{2} - \frac{m^2 \Phi^2}{2} + \frac{\alpha \Phi^4}{4} - \frac{\mathfrak{m}^2 \varphi^2}{2} + \frac{\beta \varphi^4}{4} - \frac{e_z^4 \Phi^4}{\pi} F_2(\psi_z) - \frac{e_\zeta^4 \varphi^4}{\pi} F_2(\psi_\zeta) = 0.$$
(2.25)

С. Уравнения первого порядка по возмущениям

В дальнейшем, мы будем использовать и временную переменную η для адекватности стандартной теории возмущений Лифшица (см., например, [21]). В дальнейшем всюду с помощью f'будем обозначать производную по временной переменной η . При этом необходимо учитывать простые правила дифференцирования

$$\dot{\phi} = \frac{1}{a}\phi'; \ \ddot{\phi} = \frac{1}{a^2}\phi'' - \frac{a'}{a^3}\phi', \Rightarrow \phi' = a\dot{\phi}; \ \phi'' = a^2\ddot{\phi} + a\dot{a}\dot{\phi}$$

и соотношение $\xi' = aH$.

С.1. Продольные возмущения

Метрику с гравитационными возмущениями запишем в виде (см., например, [21]):

$$ds^2 = ds_0^2 - a^2(\eta)h_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}; \qquad (3.1)$$

$$ds_0^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2).$$
(3.2)

Обращаем внимание на конформный множитель $-a^2(\eta)$ перед ковариантными амплитудами возмущений, который пропадает для смешанных компонент возмущений h^{α}_{β} . При этом ковариантные возмущения метрики равны:

$$\delta g_{\alpha\beta} = -a^2(t)h_{\alpha\beta}.\tag{3.3}$$

Далее:

$$h^{\alpha}_{\beta} = h_{\gamma\beta} g^{\alpha\gamma}_0 \equiv -\frac{1}{a^2} h_{\alpha\beta}; \qquad (3.4)$$

$$h \equiv h_{\alpha}^{\alpha} \equiv g_0^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = -\frac{1}{a^2} (h_{11} + h_{22} + h_{33}).$$
(3.5)

В дальнейшем будем рассматривать лишь продольные возмущения метрики, имея ввиду задачу о гравитационной устойчивости плоских возмущений, для определенности направляя волновой вектор вдоль оси *Oz*. В этой системе координат

$$h_{11} = h_{22} = \frac{1}{3} [\lambda(t) + \frac{1}{3} \mu(t)] e^{inz};$$

$$h = \mu(t) e^{inz}; \quad h_{12} = h_{13} = h_{23} = 0;$$

$$h_{33} = \frac{1}{3} [-2\lambda(t) + \mu(t)] e^{inz}.$$
(3.6)

Как видно из предыдущих формул, материя в нашей модели полностью определяется четырьмя скалярными функциями – $\Phi(z,\eta)$, $\varphi(z,\eta)$, $\pi_z(z,\eta)$ и $\pi_\zeta(z,\eta)$ и вектором скорости $u^i(z,\eta)$. Следуя [12], разложим эти функции в ряд по малости возмущений относительно соответствующих функций на фоне метрики Фридмана (3.2):²

$$\Phi(z,\eta) = \Phi(\eta) + \delta\Phi(\eta)e^{inz}; \qquad \varphi(z,\eta) = \varphi(\eta) + \delta\varphi(\eta)e^{inz};$$

$$\pi_z(z,t) = \pi_z(\eta)(1+\delta_z(\eta)e^{inz}); \qquad \pi_\zeta(z,t) = \pi_\zeta(\eta)(1+\delta_\zeta(\eta)e^{inz});$$

$$\sigma^z(z,\eta) = \sigma^z(\eta) + \delta\sigma^z(\eta)e^{inz}; \qquad \sigma^\zeta(z,\eta) = \sigma^\zeta(\eta) + \delta\sigma^\zeta(\eta)e^{inz};$$

$$u^i = \frac{1}{a}\delta_4^i + \delta_3^i v(\eta)e^{inz},$$

(3.7)

где $\delta \Phi(\eta), \, \delta \varphi(\eta), \, \delta_z(\eta), \, \delta_\zeta(\eta), \, s_z(\eta), \, s_\zeta(\eta)$ и $v(\eta)$ – функции первого порядка малости по сравнению с их невозмущенными значениями.

С.2. Уравнения возмущений скалярных полей

Разлагая в ряд Тейлора уравнения поля (1.26) - (1.27) по малости возмущений, получим уравнения для возмущений скалярных полей первого порядка $\delta \Phi$, $\delta \varphi$:

$$\delta \Phi'' + 2\frac{a'}{a}\delta \Phi' + \left[n^2 + a^2(m^2 - 3\alpha\Phi^2)\right]\delta \Phi + \frac{1}{2}\Phi'\mu' = -8\pi a^2\delta\sigma^z;$$
(3.8)

$$\delta\varphi'' + 2\frac{a'}{a}\delta\varphi' + \left[n^2 - a^2(\mathfrak{m}^2 + 3\beta\varphi^2)\right]\delta\varphi + \frac{1}{2}\varphi'\mu' = 8\pi a^2\delta\sigma^{\zeta}.$$
(3.9)

Эти уравнения отличаются от аналогичных для возмущений вакуумных скалярных полей лишь членом с источником скалярного поля в правой части и знаками в кинетических членах для фантомного поля (см. [20]).

С.3. Уравнения для гравитационных возмущений

Разлагая теперь уравнения Эйнштейна (1.7) в ряд Тейлора по порядкам возмущений (некоторые детали см. в [12], [20]), получим следующие независимые уравнения для гравитационных

 $^{^2 {\}bf 3}$ амечание. Чтобы не загромождать формулы лишними индексами мы примем для невозмущенных величин $S_0(t)$

следующие переименования $S_0 = S(t)$.

возмущений возмущений первого порядка μ, λ :

$$v = \frac{in}{8\pi a^3 (\varepsilon + p)_p} \left(\delta \Phi \Phi' - \delta \varphi \varphi' + \frac{1}{3} (\lambda' + \mu') \right); \qquad (3.10)$$

$$8\pi a^2 \delta \varepsilon_p = \frac{a'}{a} \mu' - \Phi' \delta \Phi' + \varphi' \delta \varphi' + \frac{n^2}{3} (\lambda + \mu) - a^2 (m^2 - \alpha \Phi^2) \Phi \delta \Phi - a^2 (\mathfrak{m}^2 - \beta \varphi^2) \varphi \delta \varphi; \qquad (3.11)$$

$$\lambda'' + 2\frac{a'}{a}\lambda' - \frac{1}{3}n^2(\lambda + \mu) = 0; \qquad (3.12)$$

$$\mu'' + 2\frac{a'}{a}\mu' + \frac{1}{3}n^2(\lambda + \mu) + 3\delta\Phi'\Phi' - 3\delta\varphi'\varphi' - - 3a^2[\Phi\delta\Phi(m^2 - \alpha\Phi^2) + \varphi\delta\varphi(m^2 - \beta\varphi^2) - 8\pi\delta p_p] = 0.$$
(3.13)

Можно показать (см., например, [14]), что дифференциально - алгебраическими следствиями уравнений (3.10) – (3.13) являются уравнения для возмущений скалярного поля (3.8) –(3.9) и уравнения движения первого приближения вырожденной материи. Последние, очевидно, являются излишними, так как возмущения скорости и плотности энергии материи непосредственно определяются уравнениями (3.10) и (3.11). Из оставшихся уравнений мы выберем 4 независимые: (3.8), (3.9), (3.12) и (3.13) для того, чтобы максимальным образом приблизить математическую модель к стандартной теории Лифшица. При этом уравнение (3.12) совпадает с соответствующим уравнением теории Лифшица, а уравнение (3.13) отличается от соответствующего уравнения работы [20] лишь материальным членом δp_p и добавлением аналогичного члена для фантомного поля.

Заметим, что в отсутствие фермионной системы $\varepsilon_p = \delta \varepsilon_p = p_p = \delta p_p = 0$ выражение в скобках правой части (3.10) обращается в нуль и дает уравнение на возмущения полей и метрики, как и уравнение (3.11) вместо определения возмущения плотности энергии фермионной компоненты становится уравнением на эти возмущения. В [20] показано, что не все уравнения на возмущения вакуумных скалярных полей и возмущений метрики независимы, а в [22] найдены ВКБ - решения соответствующих уравнений для возмущений классического скалярного поля. Поскольку система уравнений для возмущений вакуумных скалярных полей принципиально отличается от системы уравнений для возмущений полей с источниками, в дальнейшем мы будем предполагать обязательное наличие фермионной компоненты и, тем самым, – выполнение условий:

$$\varepsilon_p \neq 0; \qquad \delta \varepsilon_p \neq 0.$$
 (3.14)

Вводя новую переменную для гравитационных возмущений

$$\nu = \lambda + \mu \tag{3.15}$$

и складывая обе части уравнений (3.12) и (3.13), получим вместо этих двух уравнений новую систему уравнений относительно переменных λ и ν

$$\lambda'' + 2\frac{a'}{a}\lambda' - \frac{1}{3}n^2\nu = 0; \quad (3.16)$$

$$\nu'' + 2\frac{a'}{a}\nu' + \frac{1}{3}n^2\nu + 3\delta\Phi'\Phi' - 3\delta\varphi'\varphi' - 3a^2[\Phi\delta\Phi(m^2 - \alpha\Phi^2) + \varphi\delta\varphi(\mathfrak{m}^2 - \beta\varphi^2) - 8\pi\delta p_p] = 0. \quad (3.17)$$

Для замыкания системы уравнений необходимо найти связи между возмущениями макроскопических скаляров, с одной стороны, и возмущений скалярных и гравитационных полей, – с другой.

С.4. Возмущения фермионной компоненты

Найдем теперь указанную выше явную связь макроскопических скаляров вырожденной Ферми - материи с возмущениями скалярного и гравитационных полей. Учитывая формулы (1.6), верные для идеальной жидкости (см. [21]), и представляя возмущения импульса Ферми в виде

$$\delta \pi_z \equiv \pi_z \delta_z(\eta) e^{inz}; \qquad \delta \pi_\zeta \equiv \pi_\zeta \delta_\zeta(\eta) e^{inz}, \tag{3.18}$$

запишем возмущение макроскопических скаляров в первом по возмущениям приближении:

$$\delta n_z = 3n_z(t)\delta_z(t)e^{inz}; \quad \delta \psi_z = \psi_z(\eta)\gamma_z(\eta)e^{inz}; \delta n_\zeta = 3n_\zeta(t)\delta_\zeta(t)e^{inz}; \quad \delta \psi_\zeta = \psi_\zeta(\eta)\gamma_\zeta(\eta)e^{inz},$$
(3.19)

где согласно (1.19)

$$\psi_{z}(\eta) = \frac{\pi_{z}(\eta)}{|e_{z}\Phi(\eta)|}; \ \psi_{\zeta}(\eta) = \frac{\pi_{\zeta}(\eta)}{|e_{\zeta}\varphi(\eta)|}; \ n_{z}(t) = \frac{\pi_{z}^{3}(\eta)}{\pi^{2}}; \ n_{\zeta}(t) = \frac{\pi_{\zeta}^{3}(\eta)}{\pi^{2}}$$
(3.20)

и введены возмущения приведенного импульса Φ ерми p_f/m для каждого сорта фермионов

$$\gamma_z(\eta) = \delta_z(\eta) - \frac{\delta\Phi(\eta)}{\Phi(\eta)}; \quad \gamma_\zeta(\eta) = \delta_\zeta(\eta) - \frac{\delta\varphi(\eta)}{\varphi(\eta)}.$$
(3.21)

Кроме того, из законов сохранения зарядов e_z и e_{ζ} (1.12) с учетом (3.7) мы можем получить законы сохранения числа каждого сорта фермионов в первом порядке теории возмущений

$$\frac{1}{2}\mu' + 3\delta'_z + inv = 0, \qquad \frac{1}{2}\mu' + 3\delta'_\zeta + inv = 0,$$

откуда сразу следует:

$$\delta_z = \delta_\zeta \equiv \delta; \tag{3.22}$$

$$\frac{1}{2}\mu' + 3\delta' + inv = 0, \qquad (3.23)$$

т.е., относительные возмущения импульса Ферми вырожденных фермионов совпадают. При этом уравнение (3.23) является альтернативным (3.10) определением скорости возмущений v. Заметим, что оба эти уравнения получены как законы сохранения из уравнений переноса – уравнение (3.23) получается из закона сохранения заряда, а уравнение (3.10) – из закона сохранения энергииимпульса статистической системы. В [14] показано, как закон сохранения энергии фермионов получается из закона сохранения заряда. Таким образом, скорость возмущений v(η) определяется алгебраически через любую из указанных формул. Итак, формулы (3.24) принимают вид:

$$\gamma_z(\eta) = \delta(\eta) - \frac{\delta\Phi(\eta)}{\Phi(\eta)}; \quad \gamma_\zeta(\eta) = \delta(\eta) - \frac{\delta\varphi(\eta)}{\varphi(\eta)}.$$
(3.24)

Далее, с учетом дифференциальных тождеств (1.25) найдем выражения для возмущений макроскопических скаляров фермионов (в соответствие с замечанием на стр. 71 ниже мы опускаем экспоненциальный множитель e^{inz}):

$$\delta\sigma^{z} = \frac{e_{z}^{4}\Phi^{3}}{2\pi^{2}} \left[\left(3F_{1}(\psi_{z}) - \frac{\psi_{z}^{3}}{\sqrt{1+\psi_{z}^{2}}} \right) \frac{\delta\Phi}{\Phi} + \frac{\psi_{z}^{3}}{\sqrt{1+\psi_{z}^{2}}} \delta \right];$$
(3.25)

$$\delta\sigma^{\zeta} = \frac{e_{\zeta}^4\varphi^3}{2\pi^2} \bigg[\bigg(3F_1(\psi_{\zeta}) - \frac{\psi_{\zeta}^3}{\sqrt{1+\psi_{\zeta}^2}} \bigg) \frac{\delta\varphi}{\varphi} + \frac{\psi_{\zeta}^3}{\sqrt{1+\psi_{\zeta}^2}} \delta \bigg];$$
(3.26)

$$\delta\varepsilon_p = \frac{e_z^4 \Phi^3}{2\pi^2} F_1(\psi_z) \delta\Phi + \frac{e_\zeta^4 \varphi^3}{2\pi^2} F_1(\psi_\zeta) \delta\varphi + \frac{1}{\pi^2} \left(e_z^4 \Phi^4 \psi_z^3 \sqrt{1 + \psi_z^2} + e_\zeta^4 \varphi^4 \psi_\zeta^3 \sqrt{1 + \psi_\zeta^2} \right) \delta; \tag{3.27}$$

$$\delta p_p = \frac{e_z^4 \Phi^3}{2\pi^2} F_3(\psi_z) \delta \Phi + \frac{e_\zeta^4 \varphi^3}{2\pi^2} F_3(\psi_\zeta) \delta \varphi + \frac{1}{3\pi^2} \left(e_z^4 \Phi^4 \frac{\psi_z^4}{\sqrt{1+\psi_z^2}} + e_\zeta^4 \varphi^4 \frac{\psi_\zeta^4}{\sqrt{1+\psi_\zeta^2}} \right) \delta, \tag{3.28}$$

где

$$F_3(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \ge 0.$$

В итоге, все возмущения макроскопических скаляров для вырожденной плазмы полностью определяются тремя функциями возмущений: δΦ(η), δφ(η) и δ(η).

Таким образом, подставляя выражения для макроскопических скаляров (3.25) – (3.28) в уравнения скалярных полей (3.8), (3.9) и уравнения Эйнщтейна (3.11), (3.16) и (3.17), мы получим искомую замкнутую систему пяти обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно пяти функций возмущений: $\delta \Phi(\eta)$, $\delta \varphi(\eta)$, $\lambda(\eta)$, $\mu(\eta)$, $\delta(\eta)$. При этом специфика переменной $\delta(\eta)$ заключается в том, что эта переменная входит в уравнения линейным алгебраическим образом, что позволяет, в принципе, исключить ее через одно из уравнений и, тем самым, свести исследуемую систему к системе четырех дифференциальных уравнений относительно четырех функций $\delta \Phi(\eta)$, $\delta \varphi(\eta)$, $\lambda(\eta)$, $\mu(\eta)$. Проще всего это сделать, подставляя выражение (3.27) в уравнение Эйнштейна (3.11), найденное выражение для $\delta(\eta)$ подставить в скаляры s^z (3.25), s^{ζ} (3.26), δp_p (3.28), а затем в исследуемые уравнения (3.8), (3.9) и (3.17). Мы, однако, не будем выписывать полученные таким образом уравнения вследствие их чрезвычайно громоздкого и малополезного вида.

D. ВКБ-приближение

D.1. ВКБ-приближение, размерность

Проведем размерностный анализ исследуемой динамической системы (3.8), (3.9), (3.11), (3.12) и (3.13). Из (1.1) следует, что величины $q^r \Phi_r$ имеют размерность массы³

$$[e_r\Phi] = [e_{\zeta}] = [m] = \left[\frac{1}{\ell}\right],\tag{4.1}$$

где [A] означает размерность величины A, а ℓ здесь и в дальнейшем означает масштаб длины. Далее

$$[\eta] = [x, y, z] = [\ell]; \quad [a(\eta)] = [1]; \quad [n] = \left\lfloor \frac{1}{\ell} \right\rfloor.$$
(4.2)

Тогда, например, из уравнения Эйнштейна (2.19) следует:

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell^2} \end{bmatrix}; \quad [\Phi, \varphi] = [1]; \quad [\alpha, \beta] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell^2} \end{bmatrix}; \quad [e_r, e_\zeta] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell^{1/2}} \end{bmatrix}.$$
(4.3)

Далее, из определения (3.1) следует, что возмущения метрики являются безразмерными функциями, как и возмущения скалярных полей. Из определения возмущения импульса Ферми (3.18) следует, что $\delta(\eta)$ также безразмерная функция. Таким образом, все возмущения безразмерны:

$$[\mu] = [\lambda] = [\nu] = [\delta\Phi] = \delta[\varphi] = [\delta] = [1].$$
(4.4)

Будем полагать характерный масштаб неоднородности фона порядка $\ell = \eta$:

$$\frac{a'}{a} \sim \frac{1}{\eta}; \quad \frac{\Phi'}{\Phi} \sim \frac{1}{\eta}; \quad \frac{\varphi'}{\varphi} \sim \frac{1}{\eta}.$$
(4.5)

Исследуем сформулированную математическую модель космологической эволюции возмущений (3.8), (3.9), (3.11), (3.12) и (3.13) в коротковолновом секторе возмущений (см., например, [21])

$$n\eta \gg 1 \Rightarrow \delta \Phi' \sim n\delta \Phi \gg \frac{a'}{a} \delta \Phi \sim \frac{1}{\eta} \delta \Phi;, \quad \delta \varphi' \sim n\delta \varphi \gg \frac{a'}{a} \delta \varphi. \sim \frac{1}{\eta} \delta \Phi; \tag{4.6}$$

и т.д.

В соответствие с методом ВКБ представим решения уравнений $f(\eta)$ в форме

$$f = \tilde{f}(\eta) \cdot e^{i \int u(\eta) d\eta}; \quad (|u| \sim n \gg 1),$$
(4.7)

где $\tilde{f}(\eta)$ и $u(\eta)$ – слабоменяющиеся наряду с масштабным фактором функции *амплиуды* и *эйконала* возмущения.

 $^{^{3}}$ Напоминаем, что мы используем планковскую систему единиц $G=c=1=\hbar$ [14].

D.2. ВКБ-решения волновых уравнений

Для того, чтобы не возвращаться всякий раз к вопросу ВКБ-приближения, продемонстрируем технику решения уравнений в ВКБ-приближении на примере нахождения ВКБ-решений волнового уравнения относительно скалярной функции $\Psi(z, \eta)$

$$\Box \Psi = 0. \tag{4.8}$$

В дальнейшем мы будем обращаться к полученным ниже ВКБ-решениям волновых уравнений, как к базовым. Представляя Ψ в форме (4.7), получим из (4.8) уравнение:

$$\Box \Psi = \frac{1}{a^2} \left[(n^2 - u^2) \tilde{\Psi} + iu' \tilde{\Psi} + 2iu \tilde{\Psi}' + \tilde{\Psi}'' + 2\frac{a'}{a} (iu \tilde{\Psi} + \tilde{\Psi}') \right] e^{i \int u(\eta) d\eta} = 0.$$
(4.9)

Отделяя порядки ВКБ-приближения в (4.9) и ограничиваясь первым приближением ВКБ, получим уравнения:

0-й порядок
$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{a^2} (n^2 - u^2) \tilde{\Psi} = 0; \\ 1-й порядок \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \frac{1}{a^2} \left(u' \tilde{\Psi} + 2u \tilde{\Psi}' + 2 \frac{a'}{a} u \tilde{\Psi} \right) = 0. \end{array} \right|$$

Из уравнения нулевого приближения найдем $u = \pm n$. Подставляя это решение в уравнение первого приближения, найдем $\tilde{\Psi} = \text{const}/a(\eta)$ и, таким образом, найдем ВКБ-решение волнового уравнения (4.8)

$$\Psi(z,\eta) \simeq \frac{\Psi_n^0}{a} \mathrm{e}^{in(z\pm\eta)},\tag{4.10}$$

которое описывает запаздывающую и опережающую волну, распространяющиеся со скоростью света.

Рассмотрим теперь волновое уравнение для массивного вакуумного скалярного поля

$$\Box \Psi + m^2(\eta) \Psi = 0. \tag{4.11}$$

где массивный член также является медленно меняющейся величиной $m' \sim m/\eta$. Поступая аналогично предыдущему, получим вместо (4.9) следующее уравнение

$$\Box \Psi + m^2 \Phi = \frac{1}{a^2} \left[(n^2 - u^2 + a^2 m^2) \tilde{\Psi} + i u' \tilde{\Psi} + 2i u \tilde{\Psi}' + \tilde{\Psi}'' + 2 \frac{a'}{a} (i u \tilde{\Psi} + \tilde{\Psi}') \right] e^{i \int u(\eta) d\eta} = 0.$$
(4.12)

Учитывая тот факт, что величина $a(\eta)m(\eta)$ с увеличением времени может стать порядка и даже больше n, мы должны удержать этот член в уравнении нулевого порядка. Таким образом, имеем уравнения в первом ВКБ-приближении

0-й порядок
$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2}(n^2 - u^2 + a^2m^2)\tilde{\Psi} = 0; \\ 1-й порядок \end{vmatrix} \frac{1}{a^2}\left(u'\tilde{\Psi} + 2u\tilde{\Psi}' + 2\frac{a'}{a}u\tilde{\Psi}\right) = 0,$$

откуда для нулевого ВКБ-приближении найдем:

$$u = \pm \sqrt{n^2 + a^2 m^2}.$$
 (4.13)

Подставляя решение (4.13) в уравнение первого ВКБ-приближения, легко найдем

$$\Psi(z,\eta) \simeq \frac{\Psi_n^0}{a(n^2 + a^2m^2)^{1/4}} e^{inz \pm i \int \sqrt{n^2 + a^2m^2} d\eta}.$$
(4.14)

Поскольку частотой волны ω в полученном решении служит подынтегральное выражение в экспоненте (4.14), определим стандартным образом⁴ фазовую v_f и групповую v_g скорость волны:

$$v_f = \frac{\omega(n)}{n} = \sqrt{1 + \frac{a^2 m^2}{n^2}} > 1; \qquad v_g = \frac{\partial \omega(n)}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2 m^2}{n^2}}} < 1.$$
 (4.15)

D.3. ВКБ-решения для уравнений связи

Заметим, что, в отличие от переменных $\delta\Phi(\eta)$, $\delta\varphi(\eta)$, $\lambda(\eta)$ и $\nu(\eta)$ переменная $\delta(\eta)$ входит в динамические уравнения лишь алгебраически, что позволяет сократить число динамических функций до четырех. Для нахождения $\delta(\eta)$ можно воспользоваться уравнением Эйнштейна (3.11), в левую часть которого необходимо подставить выражение $\delta\varepsilon_p$ из (3.27). и согласно ВКБ-приближению отбросить в этом уравнении связи малые величины порядка n/ℓ_0 . В результате при выполнении условий (3.14) получим алгебраическую связь:

$$\delta = \frac{\frac{n^2}{3}\nu - a^2[(\varepsilon_p^{\Phi} + m^2\Phi - \alpha\Phi^3)\delta\Phi + (\varepsilon_p^{\varphi} + \mathfrak{m}^2\varphi - \beta\varphi^3)\delta\varphi]}{8\pi a^2\varepsilon_p^{\delta}}$$

$$\equiv \frac{n^2}{24\pi a^2\varepsilon_p^{\delta}}\nu - \Delta_{\Phi}\delta\Phi - \Delta_{\varphi}\delta\varphi; \ (\delta\varepsilon_p \neq 0),$$
(4.16)

где введены обозначения:

$$\varepsilon_p^{\delta} = \frac{1}{\pi^2} \left(e_z^4 \Phi^4 \psi_z^3 \sqrt{1 + \psi_z^2} + e_\zeta^4 \varphi^4 \psi_\zeta^3 \sqrt{1 + \psi_\zeta^2} \right) > 0;$$

$$\varepsilon_p^{\Phi} = \frac{e_z^4 \Phi^3}{2\pi^2} F_1(\psi_z); \quad \varepsilon_p^{\varphi} = \frac{e_\zeta^4 \varphi^3}{2\pi^2} F_1(\psi_\zeta); \quad \Delta_{\Phi} = \frac{\varepsilon_p^{\Phi}}{8\pi\varepsilon_p^{\delta}}; \quad \Delta_{\varphi} = \frac{\varepsilon_p^{\varphi}}{8\pi\varepsilon_p^{\delta}}.$$
(4.17)

Заметим, что все коэффициенты в линейной связи $\delta(\nu, \delta\Phi, \delta\varphi)$ являются безразмерными величинами, при этом величины ε_p^{δ} , ε_p^{Φ} и ε_p^{φ} имеют размерность ℓ^{-2} .

Далее, полученное выражение для δ (4.16) мы должны подставить в выражения для возмущений скалярных плотностей заряда s^z (3.25) и s^{ζ} (3.26), а также в выражение для возмущения давления статистической системы (3.28). Полученные таким образом выражения мы должны, в свою очередь, подставить в соответствующие уравнения для возмущений скалярных полей (3.8) и (3.9) и уравнение Эйнштейна для возмущений (3.17). Таким образом, получим, например:

$$\delta\sigma^{z} = \frac{e_{z}^{4}\Phi^{3}\psi_{z}^{2}}{48\pi^{3}a^{2}\varepsilon_{p}^{\delta}\sqrt{1+\psi_{z}^{2}}}n^{2}\nu + S_{\Phi}^{z}\delta\Phi + S_{\varphi}^{z}\delta\varphi; \qquad (4.18)$$

$$S_{\Phi}^{z} = \frac{e_{z}^{4}\Phi^{2}}{2\pi^{2}} \left(3F_{1}(\psi_{z}) - \frac{\psi_{z}^{3}}{\sqrt{1+\psi_{z}^{2}}} - \frac{\psi_{z}^{2}}{\sqrt{1+\psi_{z}^{2}}} \Delta_{\Phi} \right); \quad S_{\varphi}^{z} = -\frac{e_{z}^{4}\Phi^{2}\psi_{z}^{2}}{2\pi^{2}\sqrt{1+\psi_{z}^{2}}} \Delta_{\varphi};$$

$$\delta\sigma^{\zeta} = \frac{e_{\zeta}^{4}\varphi^{3}\psi_{z}^{2}}{48\pi^{3}a^{2}\varepsilon_{p}^{\delta}\sqrt{1+\psi_{\zeta}^{2}}} n^{2}\nu + S_{\Phi}^{\zeta}\delta\Phi + S_{\varphi}^{\zeta}\delta\varphi; \qquad (4.19)$$

$$S_{\varphi}^{\zeta} = \frac{e_{\zeta}^{4}\varphi^{2}}{2\pi^{2}} \left(3F_{1}(\psi_{\zeta}) - \frac{\psi_{\zeta}^{3}}{\sqrt{1 + \psi_{\zeta}^{2}}} - \frac{\psi_{\zeta}^{2}}{\sqrt{1 + \psi_{\zeta}^{2}}} \Delta_{\varphi} \right); \quad S_{\Phi}^{\zeta} = -\frac{e_{\zeta}^{4}\varphi^{2}\psi_{\zeta}^{2}}{2\pi^{2}\sqrt{1 + \psi_{\zeta}^{2}}} \Delta_{\Phi};$$

$$\delta p_{p} = \frac{p_{p}^{\delta} n^{2}}{24\pi^{3} a^{2} \varepsilon_{p}^{\delta}} \nu + P^{\Phi} \delta \Phi + P^{\varphi} \delta \varphi; \qquad (4.20)$$

$$p_{p}^{\delta} = \frac{1}{\pi^{2}} \left(\frac{e_{z}^{4} \Phi^{4} \psi_{z}^{4}}{\sqrt{1 + \psi_{z}^{2}}} + \frac{e_{\zeta}^{4} \varphi^{4} \psi_{\zeta}^{4}}{\sqrt{1 + \psi_{\zeta}^{2}}} \right) > 0; \quad P^{\Phi} = \frac{e_{z}^{4} \Phi^{3}}{2\pi^{2}} F_{1}(\psi_{z}) - p_{p}^{\delta} \Delta_{\Phi}; \quad P^{\varphi} = \frac{e_{\zeta}^{4} \varphi^{3}}{2\pi^{2}} F_{1}(\psi_{\zeta}) - p_{p}^{\delta} \Delta_{\varphi}.$$

⁴см., например, [21]

Заметим, что все коэффициенты в линейной связях $\delta\sigma^{z,\zeta}(\nu,\delta\Phi,\delta\varphi)$ и $\delta p_p(\nu,\delta\Phi,\delta\varphi)$ имеют размерность ℓ^{-2} . а p_p^{δ} является безразмерной величиной.

D.3.1 Асимптотические значения функций (4.17) – (4.20)

В дальнейшем нам понадобятся асимптотические значения функций (4.17) – (4.20) в *нере-лятивистском* ($\psi_r \rightarrow 0$) и *ультрарелятивистском* ($\psi_r \rightarrow \infty$) пределах. Заметим, что эти пределы эквивалентны также большим и малым, соответственно, значениям зарядов, или малым и большим, соответственно, значениям импульсов Ферми. Используя соответствующие асимптотики функций (1.23) и (1.24), получим следующие асимптотики.

Нерелятивистский предел $\psi_{ m r} ightarrow 0 ightarrow$ большие заряды $|{ m e_r}| \gg \pi_{ m r}$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p}^{\delta} &\simeq \frac{2}{\pi^{2}} (|e_{z}\Phi|\pi_{z}^{3} + |e_{\zeta}\varphi|\pi_{\zeta}^{3}); \ p_{p}^{\delta} &\simeq \frac{2}{\pi^{2}} (\pi_{z}^{4} + \pi_{\zeta}^{4}); \ \varepsilon_{p}^{\Phi} &\simeq \frac{|e_{z}|}{3\pi^{2}} \mathrm{sgn}(\Phi)\pi_{z}^{3}; \ \varepsilon_{p}^{\varphi} &\simeq \frac{|e_{\zeta}|}{3\pi^{2}} \mathrm{sgn}(\varphi)\pi_{\zeta}^{3}; \\ \Delta_{\Phi} &\simeq \frac{|e_{z}|\mathrm{sgn}(\Phi)\pi_{z}^{3}}{24\pi(\pi_{z}^{3}|e_{z}\Phi| + \pi_{\zeta}^{3}|e_{\zeta}\varphi|)}; \ \Delta_{\varphi} &\simeq \frac{|e_{\zeta}|\mathrm{sgn}(\varphi)\pi_{\zeta}^{3}}{24\pi(\pi_{z}^{3}|e_{z}\Phi| + \pi_{\zeta}^{3}|e_{\zeta}\varphi|)}; \ S_{\Phi}^{z} &\simeq -\frac{|e_{z}|^{3}\pi_{z}^{5}}{596\pi^{3}} \frac{\mathrm{sgn}(\Phi)}{\pi_{z}^{3}|e_{z}\Phi| + \pi_{\zeta}^{3}|e_{\zeta}\varphi|}; \\ S_{\varphi}^{\zeta} &\simeq -\frac{|e_{\zeta}|^{3}\pi_{\zeta}^{5}}{596\pi^{3}} \frac{\mathrm{sgn}(\varphi)}{\pi_{z}^{3}|e_{z}\Phi| + \pi_{\zeta}^{3}|e_{\zeta}\varphi|}; \ S_{\Phi}^{\zeta} &\simeq -\frac{e_{\zeta}^{2}|e_{z}|\pi_{\zeta}^{2}\pi_{z}^{3}}{4\pi^{2}} \mathrm{sgn}(\Phi); \ S_{\varphi}^{z} &\simeq -\frac{e_{z}^{2}|e_{\zeta}|\pi_{z}^{2}\pi_{\zeta}^{3}}{4\pi^{2}} \mathrm{sgn}(\varphi); \\ P^{\Phi} &\simeq \frac{|e_{z}|\pi_{z}^{3}}{3\pi^{2}} \mathrm{sgn}(\Phi): \ P^{\varphi} &\simeq \frac{|e_{\zeta}|\pi_{\zeta}^{3}}{3\pi^{2}} \mathrm{sgn}(\varphi) (4.21) \end{aligned}$$

Ультрарелятивистский предел $\psi_{
m r} o \infty \leftrightarrow$ малые заряды $|{
m e_r}| \ll \pi_{
m r}$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p}^{\delta} &\simeq \frac{1}{\pi^{2}} (\pi_{z}^{4} + \pi_{\zeta}^{4}); \ p_{p}^{\delta} &\simeq \frac{1}{\pi^{2}} (|e_{z}\Phi|\pi_{z}^{3} + |e_{\zeta}\varphi|\pi_{\zeta}^{3}); \ \varepsilon_{p}^{\Phi} &\simeq \frac{e_{z}^{2}\Phi}{2\pi^{2}}\pi_{z}^{2}; \ \varepsilon_{p}^{\varphi} &\simeq \frac{e_{\zeta}^{2}\varphi}{2\pi^{2}}\pi_{\zeta}^{2}; \\ \Delta_{\Phi} &\simeq \frac{e_{z}^{2}\Phi\pi_{z}^{2}}{2(\pi_{z}^{4} + \pi_{\zeta}^{4})}; \ \Delta_{\varphi} &\simeq \frac{e_{\zeta}^{2}\varphi\pi_{\zeta}^{2}}{2(\pi_{z}^{4} + \pi_{\zeta}^{4})}; \ S_{\Phi}^{z} &\simeq \frac{|e_{z}^{3}|\Phi\pi_{z}}{4\pi^{2}(\pi_{z}^{4} + \pi_{\zeta}^{4})}; \ S_{\varphi}^{\zeta} \frac{|e_{\zeta}^{3}|\varphi\pi_{\zeta}}{4\pi^{2}(\pi_{z}^{4} + \pi_{\zeta}^{4})}; \\ S_{\Phi}^{\zeta} &\simeq -\frac{|e_{\zeta}^{3}\varphi|e_{z}^{2}\Phi\pi_{\zeta}\pi_{z}^{2}}{4\pi^{2}(\pi_{z}^{4} + \pi_{\zeta}^{4})}; \ P^{\Phi} &\simeq \frac{e_{z}^{2}\Phi\pi_{z}^{3}}{2\pi^{2}}: P^{\varphi} &\simeq \frac{e_{\zeta}^{2}\varphi\pi_{\zeta}^{3}}{2\pi^{2}}. \end{aligned}$$
(4.22)

D.4. Уравнения для возмущений в терминах ВКБ

Представляя, например, $\delta \Phi(\eta)$ в форме (4.7), найдем:

$$\delta\Phi(\eta) = \delta\tilde{\Phi}(\eta) \cdot e^{i\int u(\eta)d\eta}; \quad \delta\Phi' = \left[\delta\tilde{\Phi}' + iu\delta\tilde{\Phi}\right] e^{i\int u(\eta)d\eta};$$

$$\delta\Phi'' = \left[\delta\tilde{\Phi}'' + 2iu\delta\tilde{\Phi}' + iu'\delta\tilde{\Phi} - u^2\delta\tilde{\Phi}\right] e^{i\int u(\eta)d\eta}$$
(4.23)

Подставляя полученные выражения для возмущений макроскопических скаляров (4.18) – (4.20) в уравнения для возмущений скалярных (3.8), (3.9) и гравитационных полей (3.16) и затем подставляя возмущения $\delta \Phi$, $\delta \varphi$, ν и λ в форме (4.7) в переформулированную систему (3.8), (3.9), (3.16) и (3.17), с учетом соотношений (4.23) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитуд $\delta \tilde{\Phi}$, $\delta \tilde{\varphi}$, $\tilde{\nu}$, $\tilde{\lambda}$ и функции эйконала $u(\eta)$.

$$[n^{2} - u^{2} + a^{2}(m^{2} - 3\alpha\Phi^{2} + 8\pi S_{\Phi}^{z})]\delta\tilde{\Phi} + \frac{e_{z}^{4}\Phi^{3}\psi_{z}^{2}}{6\pi^{2}\varepsilon_{p}^{\delta}\sqrt{1 + \psi_{z}^{2}}}n^{2}\tilde{\nu} - 8\pi a^{2}S_{\varphi}^{z}\delta\tilde{\varphi}$$
(4.24)
+ $i[2u\delta\tilde{\Phi}' - u'\delta\tilde{\Phi} + 2\frac{a'}{a}u\delta\tilde{\Phi} - \frac{1}{2}\Phi'u(\tilde{\lambda} - \tilde{\nu})] + \left[\delta\tilde{\Phi}'' + 2\frac{a'}{a}\delta\tilde{\Phi}' - \frac{1}{2}\Phi'\tilde{\mu}'\right] = 0;$

$$[n^{2} - u^{2} - a^{2}(\mathfrak{m}^{2} - 3\beta\varphi^{2} + 8\pi S_{\varphi}^{\zeta})]\delta\tilde{\varphi} - \frac{e_{\zeta}^{4}\varphi^{3}\psi_{\zeta}^{2}}{6\pi^{2}\varepsilon_{p}^{\delta}\sqrt{1 + \psi_{\zeta}^{2}}}n^{2}\tilde{\nu} + 8\pi a^{2}S_{\Phi}^{\zeta}\delta\tilde{\Phi}$$

$$+i[2u\delta\tilde{\varphi}' - u'\delta\tilde{\varphi} + 2\frac{a'}{a}u\delta\tilde{\varphi} - \frac{1}{2}\varphi'u(\tilde{\lambda} - \tilde{\nu})] + \left[\delta\tilde{\varphi}'' + 2\frac{a'}{a}\delta\tilde{\varphi}' - \frac{1}{2}\varphi'\tilde{\mu}'\right] = 0;$$

$$(4.25)$$

$$-u^{2}\tilde{\lambda} - \frac{1}{3}n^{2}\tilde{\nu} + i\left[2u\tilde{\lambda}' - u'\tilde{\lambda} + 2\frac{a'}{a}u\tilde{\lambda}\right] + \left[\tilde{\lambda}'' + 2\frac{a'}{a}\tilde{\lambda}'\right] = 0;$$

$$(4.26)$$

$$\left[n^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{p_p^{\delta}}{\varepsilon_p^{\delta}}\right) - u^2\right] \tilde{\nu} - 3a^2 [\Phi(m^2 - \alpha \Phi^2) - 8\pi P^{\Phi}] \delta \tilde{\Phi} - 3a^2 [\varphi(\mathfrak{m}^2 - \beta \varphi^2) - 8\pi P^{\varphi}] \delta \tilde{\varphi}$$
(4.27)

$$+i\left[2u\tilde{\nu}'-u'\tilde{\nu}+2\frac{a'}{a}u\tilde{\nu}+3u\delta\tilde{\Phi}\Phi'-3u\delta\tilde{\varphi}\varphi\right]+\left[\tilde{\mu}''+2\frac{a'}{a}\tilde{\mu}'+3\Phi'\delta\tilde{\Phi}'-3\varphi'\delta\tilde{\varphi}'\right]=0.$$
(4.28)

Е. Решение уравнений для возмущений методом ВКБ

Е.1. Дисперсионное уравнение: нулевой порядок ВКБ

Уравнения (4.24) – (4.27) в нулевом порядке ВКБ представляют систему однородных алгебраических уравнений относительно амплитуд возмущений:

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\Phi} \\ \tilde{\varphi} \\ \tilde{\lambda} \\ \tilde{\nu} \end{bmatrix} = 0, \tag{5.1}$$

где А – квадратная матрица размерности 4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} n^{2} - u^{2} + a^{2}(m^{2} - 3\alpha\Phi^{2} + 8\pi S_{\Phi}^{z}) & -8\pi a^{2}S_{\varphi}^{z} & 0 & \frac{e_{z}^{4}\Phi^{3}\psi_{z}^{2}}{6\pi^{2}\varepsilon_{p}^{\delta}\sqrt{1+\psi_{z}^{2}}}n^{2} \\ 8\pi a^{2}S_{\Phi}^{\zeta} & n^{2} - u^{2} - a^{2}(\mathfrak{m}^{2} - 3\beta\varphi^{2} + 8\pi S_{\varphi}^{\zeta}) & 0 & -\frac{e_{\zeta}^{4}\varphi^{3}\psi_{\zeta}^{2}}{6\pi^{2}\varepsilon_{p}^{\delta}\sqrt{1+\psi_{\zeta}^{2}}}n^{2} \\ 0 & 0 & -u^{2} & -\frac{1}{3}n^{2} \\ -3a^{2}[\Phi(m^{2} - \alpha\Phi^{2}) - 8\pi P^{\Phi}] & -3a^{2}[\varphi(\mathfrak{m}^{2} - \beta\varphi^{2}) - 8\pi P^{\varphi}] & 0 & \left(\frac{1}{3} + \frac{p_{p}^{\delta}}{\varepsilon_{p}^{\delta}}\right)n^{2} - u^{2} \end{bmatrix}.$$
(5.2)

Необходимым и достаточным условием нетривиальной разрешимости системы (5.1) является равенство нулю определителя матрицы **A**:

$$\det(\mathbf{A}(u,n)) = 0. \tag{5.3}$$

Решением дисперсионного уравнения (5.3) являются 8 симметричных функций эйконала $\pm u_{(k)}(n,\eta)$, $(k = \overline{1..4})^5$, последовательная подстановка которых в уравнения (5.1) даст нам фундаментальное решение $(\tilde{\Phi}_i(n), \tilde{\varphi}_i(n), \tilde{\lambda}_i(n), \tilde{n}u_i(n))$. Полученные алгебраические решения затем необходимо подставить в дифференциальные уравнения первого порядка ВКБ -приближения для определения зависимости решений от временной переменной.

Поскольку третий столбец матрицы **A** содержит лишь один ненулевой элемент $a_{31} = -u^2$, то, во-первых, дисперсионное уравнение (5.3) можно представить в виде

$$u^2 \det(\bar{\mathbf{A}}) = 0, \tag{5.4}$$

где $\bar{\mathbf{A}}$ – квадратная матрица размерности 3:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} n^2 - u^2 + a^2(m^2 - 3\alpha\Phi^2 + 8\pi S_{\Phi}^z) & -8\pi a^2 S_{\varphi}^z & \frac{e_z^4 \Phi^3 \psi_z^2}{6\pi^2 \varepsilon_p^{\delta} \sqrt{1 + \psi_z^2}} n^2 \\ 8\pi a^2 S_{\Phi}^{\zeta} & n^2 - u^2 - a^2(\mathfrak{m}^2 - 3\beta\varphi^2 + 8\pi S_{\varphi}^{\zeta}) & -\frac{e_{\zeta}^4 \varphi^3 \psi_{\zeta}^2}{6\pi^2 \varepsilon_p^{\delta} \sqrt{1 + \psi_{\zeta}^2}} n^2 \\ -3a^2 [\Phi(m^2 - \alpha\Phi^2) - 8\pi P^{\Phi}] & -3a^2 [\varphi(\mathfrak{m}^2 - \beta\varphi^2) - 8\pi P^{\varphi}] & \left(\frac{1}{3} + \frac{p_p^{\delta}}{\varepsilon_p^{\delta}}\right) n^2 - u^2 \end{bmatrix}.$$
(5.5)

 $^{^{5}}$ различным знакам u соответствую запаздывающие и опережающие волны

Во-вторых, из уравнения (5.4) сразу найдем тривиальное решение

$$u_{(3)}^{\pm} = 0. \tag{5.6}$$

Этому решению согласно (5.1) и (5.2) в нулевом приближении ВКБ соответствует произвольная функция $\tilde{\lambda}(\eta)$

$$(5.6) \Rightarrow \forall \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}; \quad \delta \tilde{\Phi} = \delta \tilde{\varphi} = \tilde{\nu} = 0. \tag{5.7}$$

Такая же нулевая мода появляется и в теории гравитационной неустойчивости Лифшица [23], [21], если эту теорию переформулировать в терминах ВКБ. Как показано в [23], эта мода исключается допустимыми преобразованиями координат. В дальнейшем мы будем опускать нулевую моду.

Дисперсионное уравнение для остальных мод возмущений ($\delta \Phi_i(n), \delta \tilde{\varphi}_i(n)$ и $\tilde{\nu}_i(n)$) относительно u^2 имеет вид

$$\det(\bar{\mathbf{A}}) = 0,\tag{5.8}$$

где

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} n^2 - u^2 + \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13}n^2 \\ \gamma_{21} & n^2 - u^2 + \gamma_{22} & \gamma_{23}n^2 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33}n^2 - u^2 \end{bmatrix};$$
(5.9)

и введены обозначения:

$$\gamma_{11} \equiv +a^{2}(m^{2} - 3\alpha\Phi^{2} + 8\pi S_{\Phi}^{z}); \qquad \gamma_{22} \equiv -a^{2}(\mathfrak{m}^{2} - 3\beta\varphi^{2} + 8\pi S_{\varphi}^{\zeta}); \qquad \gamma_{33} \equiv \frac{1}{3} + \frac{p_{p}^{\delta}}{\varepsilon_{p}^{\delta}};$$

$$\gamma_{12} \equiv -8\pi a^{2}S_{\varphi}^{z}; \qquad \gamma_{13} \equiv \frac{e_{z}^{4}\Phi^{3}\psi_{z}^{2}}{6\pi^{2}\varepsilon_{p}^{\delta}\sqrt{1 + \psi_{z}^{2}}}; \qquad \gamma_{21} \equiv 8\pi a^{2}S_{\Phi}^{\zeta}; \qquad (5.10)$$

$$\gamma_{31} \equiv -3a^{2}[\Phi(m^{2} - \alpha\Phi^{2}) - 8\pi P^{\Phi}]; \quad \gamma_{32} \equiv -3a^{2}[\varphi(\mathfrak{m}^{2} - \beta\varphi^{2}) - 8\pi P^{\varphi}]; \quad \gamma_{23} \equiv -\frac{e_{\zeta}^{4}\varphi^{3}\psi_{\zeta}^{2}}{6\pi^{2}\varepsilon_{p}^{\delta}\sqrt{1 + \psi_{z}^{2}}}.$$

Вычисляя определитель матрицы $\bar{\mathbf{A}}$ (5.9) и вводя переменную

$$x \equiv \frac{u^2}{n^2} \sim 1,\tag{5.11}$$

получим дисперсионное уравнение для остальных мод колебаний в форме полинома по четным степеням *n*:

$$Det(\bar{\mathbf{A}}) = (x-1)^2 (\gamma_{33} - x)n^6 + (\gamma_{11} + \gamma_{22})(x-1)(\gamma_{33} - x)n^4 + [-(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21})(x-\gamma_{33}) + (\gamma_{13}\gamma_{31} + \gamma_{23}\gamma_{32}]n^2 - (\gamma_{11}\gamma_{23}\gamma_{32} + \gamma_{13}\gamma_{21}\gamma_{32} + (\gamma_{12}\gamma_{23}\gamma_{31} - \gamma_{13}\gamma_{22}\gamma_{31} = 0.$$
(5.12)

В общем случае решение дисперсионного уравнения (5.12) относительно u^2 для остальных мод возмущений ($\delta \tilde{\Phi}_i(n)$, $\delta \tilde{\varphi}_i(n)$ и $\tilde{\nu}_i(n)$) конечно, формально можно найти с помощью формулы Кардана, но результат этот будет чрезвычайно громоздким и не пригодным для исследования.

Е.2. ВКБ-решение дисперсионного уравнения

Будем полагать в дальнейшем справедливыми следующие порядки величин в приближении ВКБ, учитывая возможность распространения результатов на достаточно большие времена:

$$n^2 \gg e_{(a)}^4; \ n^2 \gtrsim a^2 \{ m^2 \Phi, \alpha \Phi^3, \mathfrak{m}^2 \varphi, \beta \varphi^3 \}, \qquad a^2 \{ m^2, \mathfrak{m}^2 \} \gg e_{(a)}^4.$$
 (5.13)

Таким образом, члены левой части дисперсионного уравнения (5.12) имеют следующие порядки в рамках ВКБ-приближения по убывающим степеням *n*: [**n**⁶, **n**⁴*a*²*m*²**Φ**, **n**²*a*⁴*m*⁴**Φ**², **n**⁰*a*⁴*m*⁴**Φ**²]. Поэтому вследствие (5.13) в ВКБ-приближении мы должны отбросить член дисперсионного уравнения с нулевой степенью n. Кроме того, мы должны отбросить и второй член в квадратных скобках (5.12), так как он мал по сравнению с коэффициентом при n^4 . В результате дисперсионное уравнение (5.12) сводится к произведению линейного и квадратного уравнений относительно u^2 :

$$\begin{aligned} (\gamma_{33} - x)[(x - 1)^2 n^4 + (\gamma_{11} + \gamma_{22})(x - 1)n^2 + (\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21})] &= 0 \Rightarrow \gamma_{33} - x = 0; \\ (x - 1)^2 n^4 + (\gamma_{11} + \gamma_{22})(x - 1)n^2 + (\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21}) &= 0 \Rightarrow x^2 n^4 - \Upsilon x + \Gamma = 0, \end{aligned}$$
(5.14)

где введены обозначения:

$$\Gamma \equiv n^4 - n^2(\gamma_{11} + \gamma_{22}) + \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21}, \qquad (5.15)$$

$$\Upsilon \equiv 2n^2 - (\gamma_{11} + \gamma_{22}). \tag{5.16}$$

Теперь все коэффициенты дисперсионного уравнения имеют одинаковый порядок в рамках ВКБ - приближения (5.13).

Таким образом, имеем решение дисперсионного уравнения в ВКБ - приближении:

$$u_{(0)}^2 = 0;$$
 $u_{(1)}^2 = n^2 \gamma_{33} = n^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{p_p^o}{\varepsilon_p^\delta}\right);$ (5.17)

$$u_{(2\pm)}^{2} = \frac{1}{2} \left(\Upsilon \pm \sqrt{\Upsilon^{2} - 4\Gamma} \right) \equiv n^{2} - \frac{1}{2} (\gamma_{11} + \gamma_{22}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\gamma_{11} + \gamma_{22})^{2} + 4\gamma_{12}\gamma_{21}}.$$
 (5.18)

Таким образом, $u_{(1)}^2 \ge 0$, этим значениям соответствуют два значения эйконала:

$$u_{(1)}^{\pm} = \pm n \ \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{p_p^{\delta}}{\varepsilon_p^{\delta}}},\tag{5.19}$$

соответствующие запаздывающей и опережающим волнам. Далее $u_{(2\pm)}^2$ согласно теореме Виета для квадратного уравнения (5.14):

$$u_{(2+)}^2 \cdot u_{(2-)}^2 = n^2 \Gamma; \qquad u_{(2+)}^2 + u_{(2-)}^2 = n^2 \Upsilon.$$
 (5.20)

– при $\Gamma > 0 \ u_{(2+)}^2 u_{(2-)}^2 > 0$ – квадраты эйконала имеют либо одинаковый знак, либо комплексно сопряженные; при $\Gamma < 0 \ u_{(2+)}^2 u_{(2-)}^2 < 0 \Rightarrow$ квадраты эйконала имеют противоположные знаки, либо противоположные по знаку вещественные части и одинаковые мнимые. Вторая возможность, как это видно из решения (5.18), отпадает. Поэтому при $\Gamma < 0$ решения (5.18) действительны и имеют противоположные знаки, положительным решениям в этом случае соответствует пара действительны значений $u_{(2+)}^{\pm}$ - действительные, отрицательным – пара мнимых значений $u_{(2-)}^{\pm}$.

Проведя несложный анализ, придем к следующему выводу.

Утверждение 1. При выполнении условий ВКБ (5.13) дисперсионное уравнение (5.3) имеет следующие решения:

$$u_{(0)}^{\pm} = 0; \quad u_{(1)}^{\pm} = \pm n \ \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{p_p^{\delta}}{\varepsilon_p^{\delta}}};$$
 (5.21)

$$u_{(2\pm)}^{\pm} = \pm \sqrt{n^2 - \frac{1}{2}(\gamma_{11} + \gamma_{22}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\gamma_{11} + \gamma_{22})^2 + 4\gamma_{12}\gamma_{21}}},$$
(5.22)

где верхние знаки соответствуют знакам перед внешним радикалом, нижние — знаком перед внутренним.

При этом:

1. При одновременном выполнении условий

$$\Gamma > 0, \Upsilon > 0 \Leftrightarrow n^4 - n^2(\gamma_{11} + \gamma_{22}) + \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21} > 0, \quad 2n^2 - (\gamma_{11} + \gamma_{22}) > 0$$
(5.23)

решения $u_{(2\pm)}^{\pm}$ – действительные или комплексно сопряженные;

2. При одновременном выполнении условий

$$\Gamma > 0, \Upsilon < 0 \Leftrightarrow n^4 - n^2(\gamma_{11} + \gamma_{22}) + \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21} > 0, \quad 2n^2 - (\gamma_{11} + \gamma_{22}) < 0$$
(5.24)

решения $u_{(2\pm)}^{\pm}$ – мнимые;

3. При выполнении условия

$$\Gamma < 0 \Leftrightarrow n^4 - n^2(\gamma_{11} + \gamma_{22}) + \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21} < 0$$
(5.25)

решение $u^\pm_{(2+)}$ – действительные, а $u^\pm_{(2-)}$ – мнимые.

Е.З. Первый и второй порядки

Зависимости амплитуд найденных мод от временной переменной определяются решениями дифференциальных уравнений первого порядка по ВКБ-приближению. В первом порядке ВКБ имеем из (4.24) – (4.27) следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$2u\delta\tilde{\Phi}' - u'\delta\tilde{\Phi} + 2\frac{a'}{a}u\delta\tilde{\Phi} - \frac{1}{2}\Phi' u(\tilde{\lambda} - \tilde{\nu}) = 0;$$
(5.26)

$$2u\delta\tilde{\varphi}' - u'\delta\tilde{\varphi} + 2\frac{a'}{a}u\delta\tilde{\varphi} - \frac{1}{2}\varphi' u(\tilde{\lambda} - \tilde{\nu})] = 0;$$
(5.27)

$$2u\tilde{\lambda}' - u'\tilde{\lambda} + 2\frac{a'}{a}u\tilde{\lambda} = 0; \qquad (5.28)$$

$$2u\tilde{\nu}' - u'\tilde{\nu} + 2\frac{a'}{a}u\tilde{\nu} + 3u\delta\tilde{\Phi}\Phi' - 3u\delta\tilde{\varphi}\varphi = 0.$$
(5.29)

Заметим, во-первых, что решение дисперсионного уравнения $u_{(3)}^{\pm} = 0$ обращает в тождества эти уравнения, во-вторых, что уравнение (5.28) легко интегрируется, поскольку содержит полный диф-ференциал:

$$u^2 a^2 \dot{\lambda} = C_1. \tag{5.30}$$

Вследствие указанного обстоятельства в ряде случаев необходимо удержать члены второго порядка по параметру ВКБ. Таким образом, получим уравнения:

$$\delta\tilde{\Phi}'' + 2\frac{a'}{a}\delta\tilde{\Phi}' - \frac{1}{2}\Phi'\tilde{\mu}' = 0; \qquad (5.31)$$

$$\delta\tilde{\varphi}'' + 2\frac{a'}{a}\delta\tilde{\varphi}' - \frac{1}{2}\varphi'\tilde{\mu}' = 0; \qquad (5.32)$$

$$\tilde{\lambda}'' + 2\frac{a'}{a}\tilde{\lambda}' = 0; \qquad (5.33)$$

$$\tilde{\mu}^{\prime\prime} + 2\frac{a^{\prime}}{a}\tilde{\mu}^{\prime} + 3\Phi^{\prime}\delta\tilde{\Phi}^{\prime} - 3\varphi^{\prime}\delta\tilde{\varphi}^{\prime} = 0.$$
(5.34)

В эти уравнения не входит функция эйконала, поэтому мы сразу можем получить в случае u = 0 вместо (5.30) решение:

$$\tilde{\lambda} = \frac{C_1}{a^2}.\tag{5.35}$$

Поскольку при $u \neq 0$ мы получили явное решение для $\tilde{\lambda}$ (5.30), мы можем упростить систему уравнений (5.26) – (5.29), вычитая уравнение (5.29) из уравнения (5.28) и возвращаясь затем к

переменной $\tilde{\mu} = \tilde{\lambda} - \tilde{\nu}$:

$$2u\delta\tilde{\Phi}' - u'\delta\tilde{\Phi} + 2\frac{a'}{a}u\delta\tilde{\Phi} - \frac{1}{2}\Phi' u\tilde{\mu} = 0; \qquad (5.36)$$

$$2u\delta\tilde{\varphi}' - u'\delta\tilde{\varphi} + 2\frac{a'}{a}u\delta\tilde{\varphi} - \frac{1}{2}\varphi' u\tilde{\mu} = 0;$$
(5.37)

$$2u\tilde{\mu}' - u'\tilde{\mu} + 2\frac{a'}{a}u\tilde{\mu} - 3u\delta\tilde{\Phi}\Phi' + 3u\delta\tilde{\varphi}\varphi = 0.$$
(5.38)

Заметим, что уравнения (5.36) – (5.38) можно записать в следующей более компактной форме:

$$\frac{d}{d\eta}\frac{a\delta\tilde{\Phi}}{\sqrt{u}} = \frac{a\Phi'}{4\sqrt{u}}\tilde{\mu}; \quad \frac{d}{d\eta}\frac{a\delta\tilde{\varphi}}{\sqrt{u}} = \frac{a\varphi'}{4\sqrt{u}}\tilde{\mu}; \quad \frac{d}{d\eta}\frac{a\tilde{\mu}}{\sqrt{u}} = -\frac{3a}{2\sqrt{u}}(\Phi'\delta\tilde{\Phi}' - \varphi'\delta\tilde{\varphi}'). \tag{5.39}$$

Дальнейшее упрощение уравнений (5.39) на амплитуды возмущений $\tilde{\mu} = \tilde{\lambda} - \tilde{\nu}$ не представляется возможным, аналитическое их исследование вследствие, во-первых, отсутствия в них малых или больших параметров и, во-вторых, отсутствия аналитических фоновых решений для функций $a(\eta), \Phi(\eta), \varphi(\eta)$ также безрезультативно. Эти слабо меняющиеся со временем функции возможно найти лишь численными методами. Но, в принципе, это и не особенно нужно, так как основную информацию о поведении возмущений $\mu(\eta, z), \ \delta \Phi(\eta, z), \ \delta \varphi(\eta, z)$ несут шесть функций эйконала $u_{(1)}^{\pm}, u_{(2\pm)}^{\pm}$. Заметим лишь, что в случае постоянных значений невозмущенных потенциалов скалярных полей Φ, φ уравнения (5.39) легко интегрируются:

$$\delta \tilde{\Phi} = \frac{C_2 \sqrt{u}}{a}; \quad \delta \tilde{\varphi} = \frac{C_3 \sqrt{u}}{a}; \quad \tilde{\mu} = \frac{C_4 \sqrt{u}}{a}, \qquad (\Phi = \Phi_0, \ \varphi = \varphi_0). \tag{5.40}$$

F. Анализ ВКБ-решений

F.1. Области неустойчивости

Вследствие линейности возмущений окончательные выражения для возмущений согласно формуле (4.7) и найденным значениям функций эйконала (5.21) – (5.22) можно записать в форме:

$$f = e^{inz} \sum_{\pm} \tilde{f}^{\pm}_{(1)}(\eta) e^{i \int u^{\pm}_{(1)}(\eta) d\eta} + e^{inz} \sum_{\pm} \sum_{\pm} \tilde{f}^{\pm}_{(2)\pm}(\eta) e^{i \int u^{\pm}_{(2)\pm}(\eta) d\eta},$$
(6.1)

где $\tilde{f}^{\pm}_{(1)}(\eta)$ и $\tilde{f}^{\pm}_{(2)\pm}(\eta)$ – медленно меняющиеся амплитуды возмущений $\mu(\eta, z)$, $\delta\Phi(\eta, z)$, $\delta\varphi(\eta, z)$, соответствующие перечисленным выше модам колебаний $u^{\pm}_{(1)}, u^{+}_{(2\pm)}$. Поскольку согласно (4.17) и (4.20) $\varepsilon^{\delta}_{p} > 0$ $p^{\delta}_{p} > 0$, то $u^{\pm}_{(1)}$ – действительные функции, поэтому они соответствуют запаздывающим и опережающим волнам со слабо меняющейся амплитудой. Таким образом, согласно утверждению 1 неустойчивые моды могут соответствовать лишь функциям эйконала $u^{\pm}_{(2)\pm}(\eta)$ в области их комплексных значений. Пусть

$$u_{(2)\pm}^{\pm}(\eta) = \omega(n,\eta) \pm i\vartheta(n,\eta), \qquad (\omega(n,\eta),\vartheta(n,\eta) \in \mathbb{R}), \tag{6.2}$$

тогда этим значениям функции эйконала соответствуют затухающие и растущие моды колебаний с амплитудами:

$$\tilde{f}^{-}(\eta)\mathrm{e}^{-\int\vartheta(n,\eta)d\eta}, \ \tilde{f}^{+}(\eta)\mathrm{e}^{+\int\vartheta(n,\eta)d\eta}.$$
(6.3)

Растущая мода колебаний \tilde{f}^+ соответствует неустойчивости однородного невозмущенного состояния космологической модели.

Таким образом, согласно утверждению 1 и формулам (5.10) исследуемая космологическая система неустойчива в следующих областях:

$$\Omega_1(n,\eta): \qquad n^4 - n^2(\gamma_{11} + \gamma_{22}) + \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21} < 0; \qquad (6.4)$$

$$\Omega_2(n,\eta): \quad n^4 - n^2(\gamma_{11} + \gamma_{22}) + \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21} > 0, \quad 2n^2 - (\gamma_{11} + \gamma_{22}) < 0.$$
(6.5)

Исследуем знаки функций Γ и Υ , определяя знаки решений уравнения $\Gamma(n^2) = 0$ относительно n^2 с помощью теоремы Виета. Поступая таким образом, найдем области неустойчивости:

$$\Omega_1(n,\eta): \{(\gamma_{11} - \gamma_{22})^2 + 4\gamma_{12}\gamma_{21} > 0, \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21} > 0, \gamma_{11} + \gamma_{22} > 0\}; \quad n_-^2 < n_+^2; \quad (6.6)$$

$$\Omega_{2}(n,\eta): \begin{cases}
\left\{ (\gamma_{11} - \gamma_{22})^{2} + 4\gamma_{12}\gamma_{21} > 0, \\
\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21} > 0, \gamma_{11} + \gamma_{22} > 0 \right\}, & n^{2} < \frac{1}{2}(\gamma_{11} + \gamma_{22}); \\
\left\{ (\gamma_{11} - \gamma_{22})^{2} + 4\gamma_{12}\gamma_{21} < 0, \\
\gamma_{11} + \gamma_{22} > 0 \right\}, & \{n^{2} < n_{-}^{2}\} \cup \{n^{2} > n_{+}^{2}\}.
\end{cases}$$
(6.7)

где

$$n_{\pm}^{2} = \frac{1}{2} \bigg[\gamma_{11} + \gamma_{22} \pm \sqrt{(\gamma_{11} - \gamma_{22})^{2} + 4\gamma_{12}\gamma_{22}} \bigg].$$
(6.8)

К найденным условиям неустойчивости невозмущенного состояния необходимо добавить условия ВКБ-приближения (4.6), ограничивающие волновое число *n* снизу

$$n^2 \gg 1; \quad n\eta \gg 1; \quad n^4 \gg a^2 \{m^2 \Phi, \alpha \Phi^3, \mathfrak{m}^2 \varphi, \beta \varphi^3\}.$$
 (6.9)

F.2. Предельные случаи

F.2.1 Случай вакуумных скалярных полей

Этот случай соответствует пределу $\psi_z \to 0, \psi_\zeta \to 0$. Согласно асимптотическим формулам (4.21) в этом случае

$$\frac{p_p^{\delta}}{\varepsilon_p^{\delta}} \to 0; \ S_{\Phi}^z \to 0; \ S_{\varphi}^z \to 0; \ S_{\Phi}^{\zeta} \to 0; \ S_{\varphi}^{\zeta} \to 0; \ P^{\Phi} \to 0; \ P^{\varphi} \to 0; \ \varepsilon^{\Phi} \to 0; \ \varepsilon^{\varphi} \to 0.$$

Таким образом, согласно (5.10) получим для случая вакуумного скалярного дублета:

$$\begin{split} \gamma_{11} &\simeq +a^2 (m^2 - 3\alpha \Phi^2); \quad \gamma_{22} \simeq -a^2 (\mathfrak{m}^2 - 3\beta \varphi^2); \quad \gamma_{33} \simeq \frac{1}{3}; \\ \gamma_{12} \simeq 0; \qquad \gamma_{13} \simeq 0; \qquad \gamma_{21} \simeq 0; \\ \gamma_{31} \simeq -3a^2 \Phi (m^2 - \alpha \Phi^2); \quad \gamma_{32} \simeq -3a^2 \varphi (\mathfrak{m}^2 - \beta \varphi^2); \quad \gamma_{23} \simeq 0. \end{split}$$

Согласно (5.21) и (5.22) получим решения дисперсионного уравнения для случая вакуумного дублета:

$$u_{(0)}^{\pm} = 0; \quad u_{(1)}^{\pm} = \pm \frac{n}{\sqrt{3}}; \quad (\psi_z \to 0, \ \psi_{\zeta} \to 0)$$
 (6.10)

$$u_{(2+)}^{\pm} = \pm \sqrt{n^2 - a^2(m^2 - \mathfrak{m}^2 - 3\alpha\Phi^2 + 3\beta\varphi^2)}.$$
(6.11)

В частности, в жестком ВКБ - приближении $n^2 \gg a^2 \{m^2, \mathbf{m}^2\}$ мы получим отсюда $u_{(2+)}^{\pm} \simeq \pm n$, т.е., получим результаты работы [22], в котором как раз и рассматривалось жесткое ВКБ - приближение для вакуумного классического поля Хиггса. На более поздних временах космологическая модель, основанная на вакуумном скалярном дублете, неустойчива в области:

$$1/\eta^2 \ll n^2 < a^2(m^2 - \mathfrak{m}^2 - 3\alpha\Phi^2 + 3\beta\varphi^2).$$
(6.12)

В частности, в случае стационарного (инфляционного) особого решения [16]

$$\alpha \Phi^2 = m^2; \qquad \beta \varphi^2 = \mathfrak{m}^2$$

получим из (6.12)

$$1/\eta^2 \ll n^2 < 2a^2(-m^2 + \mathfrak{m}^2), \tag{6.13}$$

откуда видно, что неустойчивость стационарного особого решения в космологической модели, основанной на вакуумном асимметричном скалярном дублете может возникнуть на поздних временах $a\mathfrak{m}\gg 1$ лишь при условии

$$\mathfrak{m}^2 > m^2, \tag{6.14}$$

т.е., лишь при наличии фантомного поля и превышении массы фантомных бозонов массы классических бозонов.

Заметим, что поскольку при выполнении условия (6.13) соответствующая мода колебаний в формуле (6.1) имеет чисто мнимую функцию эйконала $u(\eta)$, то в данном случае при развитии неустойчивости возмущения имеют вид стоячих растущих со временем волн, т.е., в момент возникновения неустойчивости фазовая скорость волны обращается в нуль.

F.2.2 Случай фермионов с нулевыми скалярными зарядами

Этот случай соответствует пределу $\psi_z \to \infty, \psi_\zeta \to \infty$. Согласно асимптотическим формулам (4.22) в этом случае все коэффициенты в формулах (4.22), включая $p_p^{\delta}/\varepsilon_p^{\delta}$, стремятся к нулю. В результате, мы получаем для функций эйконала формулы предыдущего случая (6.10) – (6.11). этот, казалось, бы странный результат, имеет простое объяснение. Действительно, согласно формулам (3.27), (3.28) и (4.16) возмущения фермионной компоненты в этом случае стремятся к нулю $\delta\varepsilon_p \to 0$, $\delta p_p \to 0$, поэтому с точки зрения теории возмущений мы получаем формально одинаковые результаты. Разница заключается, однако в том, что невозмущеные фоновые величины $a(t), \Phi(t)$ и $\varphi(t)$ в этих случаях определяются различными уравнениями. Действительно, в рассматриваемом случае $\psi_a \to \infty$ согласно определениям (1.16), (1.17) и (1.18) с использованием асимптотических формул (1.24), получим асимптотики для макроскопических скаляров в невозмущенном состоянии:

$$\varepsilon_p \simeq \frac{\pi_z^4 + \pi_\zeta^4}{4\pi^2} = 3p_p; \quad \sigma^z \simeq \frac{e_z^2 \pi_z^2}{2\pi^2} \Phi \simeq 0; \quad \sigma^\zeta \simeq \frac{e_\zeta^2 \pi_\zeta^2}{2\pi^2} \varphi \simeq 0, \quad (\psi_a \to \infty).$$
(6.15)

Для предыдущего же случая $\psi_a \to 0$, используя асимптотические формулы (1.23), получим⁶:

$$\varepsilon_p \simeq \frac{1}{3\pi^2} (|e_z \Phi| \pi_z^3 + |e_\zeta \varphi| \pi_\zeta^3); \quad p_p; \simeq \frac{1}{15\pi^2} \left(\frac{\pi_z^5}{|e_z \Phi|} + \frac{\pi_\zeta^5}{|e_\zeta \varphi|} \right);$$
$$\sigma^z \simeq \frac{|e_z| \pi_z^3}{3\pi^2} \operatorname{sgn}(\Phi); \quad \sigma^\zeta \simeq \frac{|e_\zeta| \pi_\zeta^3}{3\pi^2} \operatorname{sgn}(\varphi), \quad (\psi_a \to 0).$$
(6.16)

Таким образом, фоновые функции a(t), $\Phi(t)$ и $\varphi(t)$, входящие в выражения (6.10) – (6.11) различны для рассмотренных выше случаев $\psi_a \to \infty$ и $\psi_a \to 0$, в последнем случае они определяются космологической моделью с вакуумным скалярным дублетом и нейтральной нерелятивистской жидкостью.

F.3. Численное моделирование областей неустойчивости

При произвольных значениях параметров модели, в отличие от рассмотренных выше предельных случаев, исследование областей неустойчивости аналитическими методами не представляется возможным. Поэтому обратимся к численным методам исследования представленной модели. При этом в данной статье мы не будем интегрировать численными методами уравнения невозмущенного состояния космологической модели (2.16) – (2.22), так как эта задача сама по себе достаточно сложная, а ее решения обнаруживают большое разнообразие типов поведения в зависимости от параметров модели и начальных условий [15]. К этой задаче мы вернемся в ближайшем будущем.

 $^{^6{\}rm B}$ полученные асимптотическме формулы необходимо подставить $\pi_a=\pi_a^0/a.$

В этой статье мы ограничимся численным моделированием областей неустойчивости, т.е., областей, определяемых неравенством $u_{(2)}^2 < 0$, рассматривая значения функций $a(\eta) = \exp \xi(\eta)$, $\Phi(\eta)$ и $\varphi(\eta)$ как некоторые заданные параметры задачи на данный момент космологического времени η_0 . Такой подход позволяет определить общие закономерности вне зависимости от конкретных особенностей эволюции фоновых функций. Ниже представлены результаты численного моделирования областей неустойчивости для модели с параметрами

$$\pi_z = 1; \ e_z = 1; \ m = 1; \ \alpha = 1; \ \pi_{\zeta} = 1; \ e_{\zeta} = 1; \ \mu = 1; \ \beta = 1,$$
 (6.17)

200

– при этом изменялись лишь значения фоновых величин $\xi = \ln a, \Phi, \varphi$.



 u^{2} u^{2

Рис. 1. Зависимость $u^2(n)$ (5.18) в случае классического синглета $\Phi = 1, \varphi = 0, \xi = 0$ (сплошная линия); $\xi = 1$ (штриховая); $\xi =$ 1.5 (штрих - пунктирная); $\xi = 2$ (пунктирная)

Рис. 2. Зависимость $u^2(n)$ (5.18) в случае фантомного синглета $\Phi = 0, \varphi = 1, \xi = 0$ (сплошная линия); $\xi = 1$ (штриховая); $\xi = 1.5$ (штрих - пунктирная); $\xi = 2$ (пунктирная)

На Рис. 1 и 2 показана зависимость квадрата функции эйконала $u_{(2)}^2(n)$ (5.18) от волнового числа n для двух крайних случаев модели – классического синглета ($\varphi = 0$) и фантомного синглета ($\Phi = 0$) при небольших значениях масштабного фактора $a = 1 \div 100$. Из представленных графиков, во-первых, видно, так как область неустойчивости модели соответствует значениям $u_{(2)}^2(n)$ на линиях при $u^2 < 0$, неустойчивой является модель, основанная именно на фантомном скалярном поле. Во-вторых, с увеличением масштабного фактора границы области неустойчивости сдвигаются в область бо'льших значений волнового числа n. При этом, однако, следует учитывать, что длина волны возмущений $\ell = 2\pi a(\eta)/n$ даже при постоянном n растет благодаря масштабному фактору. График на Рис. 2 как раз соответствует случаю $\ell_c \approx \text{Const}$, где ℓ_c – граничное значение длины волны неустойчивой моды, так что все колебания с $\ell < \ell_c$ неустойчивы. Однако, достоверность этого результата не высока, так как граничные значения волнового числа в этом случае $n \sim 5 \div 10$ не являются достаточно большими для обеспечения выполнения условия ВКБ приближения $n \gg 1$.

На Рис. 3 показана зависимость квадрата функции эйконала $u_{(2)}^2(n)$ (5.18) от волнового числа *n* для полного скалярного дублета ($\Phi = 1, \varphi = 1$). Из этих графиков видно, что с увеличением масштабного фактора, т.е., космологического времени, область неустойчивости расширяется в сторону бо'льших значений волнового числа *n*. Вместе с тем, увеличивается и инкремент нарастания амплитуды колебаний (т.е., скорости развития неустойчивости) $\gamma = -\Im(u(n))$ до значений порядка $2 \cdot 10^2$.



Рис. 3. Зависимость $u^2(n)$ (5.18) в случае скалярного дублета $\Phi = 1, \varphi = 1$ для больших значений масштабного фактора, $\xi = 7$ (сплошная линия); $\xi = 8$ (штриховая); $\xi = 9$ (штрих пунктирная); $\xi = 10 \ a \sim 2 \cdot 10^4$ (пунктирная).

Заключение

Таким образом, результаты данной работы, с одной стороны, подтверждают выводы работ [12] и [13], полученные в жестком ВКБ - приближении, относительно возможности гравитационной неустойчивости системы вырожденных скалярно заряженных фермионов на ранних стадиях эволюции Вселенной. С другой стороны, результаты исследования, во-первых, распространены на случай скалярного дублета, а, во-вторых, снимая ограничение жесткого ВКБ - приближения, в явном виде учитывают особенности Хиггсового взаимодействия и метрические факторы. Это позволило однозначно определить области неустойчивых мод возмущений и ограничить их, как снизу, так и сверху. В свою очередь, это дает возможность определить, как время формирования, так и характерные массы объектов, возникающих в процессе развития скалярно-гравитационной неустойчивости на ранних стадиях эволюции Вселенной. Однако, для достижения этой цели необходимо решить задачу, упоминавшуюся выше, – построить полную численную модель одновременной эволюции фоновых величин $a(\eta)$, $\Phi(\eta)$ и $\varphi(\eta)$ и величин теории возмущений в зависимости от фундаментальных параметров взаимодействия. К этой задаче мы надеемся вернуться в ближайшем будущем.

Заметим, во-первых, что природа исследуемой нами неустойчивости космологической модели отличается от природы стандартной гравитационной неустойчивости Джинса, заключающейся в нарушении бапланса сил притяжения и давления в области достаточно больших размеров возмущений и дающей степенной рост амплитуды неустойчивых мод [23]. В нашем случае неустойчивость имеет существенно *скалярно-гравитационную* природу, в которой при формировании определенных условий все коротковолновые моды возмущений становятся неустойчивыми. Кроме того, амплитуда неустойчивых мод растет по экспоненциальному закону. По-видимому, это объясняется особенностями взаимодействия фантомного скалярного поля со скалярно заряженными частицами. К этому вопросу мы намерены вернуться в будущем⁷. Во-вторых, заметим, что и в случае коротковолновых возмущений фантомное поле играет стабилизирующую роль, что можно легко увидеть из сравнения графиков на Рис. 1 и Рис. 2, – в случае фантомного синглета неустойчивые моды не возникают.

⁷Некоторые такие особенности описаны в работе [24].

Список литературы

1. Abbott B.P., (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) et al. Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence. *Phys. Rev. Lett.*, **116:6**, 102 (2016).

2. Abbott B.P. Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence. *Phys. Rev. Lett.*, **116:24** 241103 (2016).

3. Gillessen S., Eisenhauer F., Trippe S., Alexander T., Genzel R., Martins F., Ott T. Monitoring stellar orbits around the Massive Black Hole in the Galactic Center. *Astrophys.J.*, **692** 1075 (2009); arXiv:0810.4674 [astro-ph].

4. Doeleman S., Weintroub J., Alan E.E. Rogers et al. Event-horizon-scale structure in the supermassive black hole candidate at the Galactic Centre. *Nature*, **455** 78 (2008); arXiv:0809.2442 [astro-ph].

5. Fan X., Barth A., Banados E., Rosa G.D., Decarli R., Eilers A.-C. et al. Luminous Quasars and Their Host Galaxies. *Bulletin of the AAS*, **51(3)** (2019).

6. Trakhtenbrot B. What do observations tell us about the highest-redshift supermassive black holes? arXiv:2002.00972v2 [astro-ph.GA].

7. Zhu Q. et al. The Formation of the First Quasars. I. The Black Hole Seeds, Accretion and Feedback Models., arXiv:2012.01458v1 [astro-ph.GA].

8. Urena-Lopez L.A., Liddle A.R. Supermassive black holes in scalar field galaxy halos. *Phys. Rev.*, **D66** (2002) 083005; arXiv:astro-ph/0207493.

9. Cunha P.V.P., Herdeiro C.A.R., Radu E., Helgi F.R. Shadows of Kerr black holes with and without scalar hair. Internat. J. Mod. Phys. D, 25:9 (2016) 1641021.

10. Brax P., Cembranos J.A.R., Valageas P. Fate of scalar dark matter solitons around supermassive galactic black holes. *Phys. Rev.* D **101**, 023521 (2020); arXiv:1909.02614 [astro-ph.CO].

11. Ignat'ev Yu.G., Agathonov A.A., Ignatyev D.Yu. Statistical Cosmological Fermion Systems with Phantom Scalar Interaction of Particles. *Gravit. Cosmol.*, **24** 1 (2018); arXiv:1608.05020 [gr-qc].

12. Ignat'ev Yu.G., Stability of the cosmological system of degenerated scalar charged fermions and Higgs scalar fields. I. Mathematical model of linear plane perturbations. *Gravit. Cosmol.*, **27:1**, 30–35 (2021); arXiv:2103.13866 [gr-qc].

13. Ignat'ev Yu.G. Stability of the cosmological system of degenerated scalar charged fermions and Higgs scalar fields. II. The Evolution of Short-Wave Perturbations. *Gravit. Cosmol.*, **27:1**, 36–41 (2021); arXiv:2103.13867 [gr-qc].

14. Ignat'ev Yu.G., Ignat'ev D.Yu. Космологические модели на основе статистической системы скалярно заряженных вырожденных фермионов и асимметричного Хиггсова скалярного дублета. *Theoret. and Math. Phys.*, **209:1**, 142 (2021).

15. Ignat'ev Yu.G., Agathonov A.A., Ignatyev D.Yu. Cosmological evolution of a statistical system of degenerate scalar-charged fermions with an asymmetric scalar doublet. I. Two-component system of assorted charges. *Gravit. Cosmol.*, **27:4** (2021) (in publish).

16. Ignat'ev Yu.G., Kokh I.A. Complete cosmological model based on a asymmetric scalar Higgs doublet. *Theor. Math. Phys.*, **207:1** 514 (2021).

17. Игнатьев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Исследование полной модели космологической эволюции классического скалярного поля с Хиггсовым потенциалом. I-III. Изв. Вузов, Физика. 64:3, 136 (2021); 64:5, 151 (2021); 64:9 (в печати) (2021).

18. Ignat'ev Yu.G., Kokh I.A. Phase flows in the complete model of the cosmological evolution of the asymmetric scalar Higgs doublet. *Gravit. and Cosmol.*, **27:4** (2021) (in print).

19. Ignatyev (Ignat'ev) Yu.G., Agathonov A.A., Ignatyev D.Yu. Statistical Systems with Phantom Scalar Interaction in Gravitation Theory. II. Macroscopic Equations and Cosmological Models. *Gravit. Cosmol.*, **20**, 304 (2014).

20. Ignat'ev Yu.G. The Method of Self-Consistent Field and Macroscopical Einstein Equations for the Early Universe. *Theoret. and Math. Phys.*, **204(1)**, 927–946 (2020); arXiv:2004.14865 [gr-qc].

21. Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Pergamon Press. Oxford. New York. Toronto-Sydney. Paris. Frankfurt, 1971.

22. Ignat'ev Yu.G., Ignat'ev D.Yu. Short-Wave Approximation for Macroscopic Cosmology with Higgs Scalar Field. *Gravit. Cosmol.*, **26** (2020), pp. 249–258; arXiv:2007.04392 [gr-qc].

23. Лифшиц Е.М., Халатников И.М. Проблемы релятивистской космологии. Успехи физических наук. 1963. LXXX:3. С. 391-438.

24. Ignatyev (Ignat'ev) Yu.G. Cosmological evolution of the plasma with interparticle scalar interaction. III. Model with attraction of like-charged scalar particles. **55:11**, 1345 (2013).

References

1. Abbott B.P., (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) et al. Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence. *Phys. Rev. Lett.*, **116:6**, 102 (2016).

2. Abbott B.P. Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence. *Phys. Rev. Lett.*, **116:24** 241103 (2016).

3. Gillessen S., Eisenhauer F., Trippe S., Alexander T., Genzel R., Martins F., Ott T. Monitoring stellar orbits around the Massive Black Hole in the Galactic Center. *Astrophys.J.*, **692** 1075 (2009); arXiv:0810.4674 [astro-ph].

4. Doeleman S., Weintroub J., Alan E.E. Rogers et al. Event-horizon-scale structure in the supermassive black hole candidate at the Galactic Centre. *Nature*, **455** 78 (2008); arXiv:0809.2442 [astro-ph].

5. Fan X., Barth A., Banados E., Rosa G.D., Decarli R., Eilers A.-C. et al. Luminous Quasars and Their Host Galaxies. *Bulletin of the AAS*, **51(3)** (2019).

6. Trakhtenbrot B. What do observations tell us about the highest-redshift supermassive black holes? arXiv:2002.00972v2 [astro-ph.GA].

7. Zhu Q. et al. The Formation of the First Quasars. I. The Black Hole Seeds, Accretion and Feedback Models., arXiv:2012.01458v1 [astro-ph.GA].

Urena-Lopez L.A., Liddle A.R. Supermassive black holes in scalar field galaxy halos. *Phys. Rev.*, D66 (2002) 083005; arXiv:astro-ph/0207493.

9. Cunha P.V.P., Herdeiro C.A.R., Radu E., Helgi F.R. Shadows of Kerr black holes with and without scalar hair. Internat. J. Mod. Phys. D, 25:9 (2016) 1641021.

10. Brax P., Cembranos J.A.R., Valageas P. Fate of scalar dark matter solitons around supermassive galactic black holes. *Phys. Rev.* D **101**, 023521 (2020); arXiv:1909.02614 [astro-ph.CO].

11. Ignat'ev Yu.G., Agathonov A.A., Ignatyev D.Yu. Statistical Cosmological Fermion Systems with Phantom Scalar Interaction of Particles. *Gravit. Cosmol.*, **24** 1 (2018); arXiv:1608.05020 [gr-qc].

12. Ignat'ev Yu.G., Stability of the cosmological system of degenerated scalar charged fermions and Higgs scalar fields. I. Mathematical model of linear plane perturbations. *Gravit. Cosmol.*, **27:1**, 30–35 (2021); arXiv:2103.13866 [gr-qc].

13. Ignat'ev Yu.G. Stability of the cosmological system of degenerated scalar charged fermions and Higgs scalar fields. II. The Evolution of Short-Wave Perturbations. *Gravit. Cosmol.*, **27:1**, 36–41 (2021); arXiv:2103.13867 [gr-qc].

14. Ignat'ev Yu.G., Ignat'ev D.Yu. Cosmological models based on a statistical system of scalarly charged degenerate fermions and an asymmetric Higgs scalar doublet. *Theoret. and Math. Phys.*, **209:1**, 142 (2021).

15. Ignat'ev Yu.G., Agathonov A.A., Ignatyev D.Yu. Cosmological evolution of a statistical system of degenerate scalar-charged fermions with an asymmetric scalar doublet. I. Two-component system of assorted charges. *Gravit. Cosmol.*, **27:4** (2021) (in publish).

16. Ignat'ev Yu.G., Kokh I.A. Complete cosmological model based on a asymmetric scalar Higgs doublet. *Theor. Math. Phys.*, **207:1** 514 (2021).

17. Ignat'ev Yu.G., Samigullina A.R. Complete Model of Cosmological Evolution of a Classical Scalar Field with the Higgs Potential. I-III. Russian Physics Journal, 64:3, 136 (2021); 64:5, 151 (2021); 64:10 1808 (2022).

18. Ignat'ev Yu.G., Kokh I.A. Phase flows in the complete model of the cosmological evolution of the asymmetric scalar Higgs doublet. *Gravit. and Cosmol.*, **27:4** (2021) (in print).

19. Ignatyev (Ignat'ev) Yu.G., Agathonov A.A., Ignatyev D.Yu. Statistical Systems with Phantom Scalar Interaction in Gravitation Theory. II. Macroscopic Equations and Cosmological Models. *Gravit. Cosmol.*, **20**, 304 (2014).

20. Ignat'ev Yu.G. The Method of Self-Consistent Field and Macroscopical Einstein Equations for the Early Universe. *Theoret. and Math. Phys.*, **204(1)**, 927–946 (2020); arXiv:2004.14865 [gr-qc].

21. Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Pergamon Press. Oxford New York Toronto-Sydney Paris Frankfurt, 1971.

22. Ignat'ev Yu.G., Ignat'ev D.Yu. Short-Wave Approximation for Macroscopic Cosmology with Higgs Scalar Field. *Gravit. Cosmol.*, **26** (2020), pp. 249–258; arXiv:2007.04392 [gr-qc].

23. Lifshitz E.M., Khalatnikov I.M. Problems of relativistic cosmology. Sov. Phys. Usp. 6 495-522 (1964).

24. Ignatyev (Ignat'ev) Yu.G. Cosmological evolution of the plasma with interparticle scalar interaction. III. Model with attraction of like-charged scalar particles. **55:11**, 1345 (2013).

Авторы

Игнатьев Юрий Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор, НИЛ "Космология Институт физики, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия. E-mail: yurii.ignatev.1947@yandex.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Игнатьев Ю. Г. Гравитационно-скалярная неустойчивость космологической модели на основе двухкомпонентной статистической системы с асимметричным скалярным Хиггсовым взаимодействием фермионов. Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2022. № 38. С. 64—89.

Authors

Ignat'ev Yurii Gennadievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Physics, Kazan Federal University, Kremlyovskaya str., 35, Kazan, 420008, Russia. E-mail: yurii.ignatev.1947@yandex.ru

Please cite this article in English as:

Ignat'ev Yu. G. Gravitational-scalar unstability of a cosmological model based on a two-component statistical system with asymmetric scalar Higgs fermion interaction. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2022, no. 38, pp. 64–89.