УДК 531.011

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ БИВЕКТОРНОГО ФОРМАЛИЗМА В ГАМИЛЬТОНОВОЙ МЕХАНИКЕ

Морозов Е. А.[a,1], Морозова А. Р.[a,2], Морозова Л. Е.[b,3]

[a] Чайковский филиал Пермского национального исследовательского политехнического университета, г. Чайковский, 617760, Россия.
[b] Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова, г. Ижевск, 426069, Россия.

Строится бивекторный формализм гамильтоновой механики. На основе принципа детерминированности определяется расширенное аффинное пространство импульсов, координат и времени. Присоединенное к нему пространство рассматривается как прямая сумма ковариантного пространства импульсов и контравариантного пространства координат и времени, после чего определяется бивекторное пространство импульсов, координат и времени. Полученное точечно-бивекторное соответствие позволяет определить, соответствующее ему, расширенное фазовое пространство и поток. При этом оказывается, что бивекторный аналог динамических уравнений Гамильтона имеет форму динамического уравнения Ньютона для потенциального поля. Рассматривается бивекторный вариант канонических преобразований, которые определяют геометрию бивекторного фазового пространства. Использование ковариантных и контравариантных векторных пространств, а также основных тензорных операций позволяет значительно упростить алгебру преобразований в доказательствах.

Ключевые слова: Механика Гамильтона, уравнения Гамильтона, фазовое пространство, канонические преобразования.

ON THE USE OF BIVECTOR FORMALIZM IN HAMILTONIAN MECHANICS

Morozov E. A.[a,1], Morozova A. R.[a,2], Morozova L. E.[b,3]

[a] Tchaikovsky Branch of Perm National Research Polytechnic University, Tchaikovsky, 617760, Russia.
[b] Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, 426069, Russia.

A bivector formalism of Hamiltonian mechanics is constructed. The extended affine space of impulses, coordinates, and time is determined based on the determinism principle. The space attached to it is considered as a direct sum of the covariant space of pulses and the contravariant space of coordinates and time, after which the bivector space of pulses, coordinates and time is determined. The resulting point-bivector correspondence allows us to determine the corresponding extended phase space and flow. It turns out that the bivector analog of the dynamic Hamilton equations has the form of the dynamic Newton equation for the potential field. We consider a bivector variant of canonical transformations that define the geometry of a bivector phase space. The use of covariant and contravariant vector spaces, as well as basic tensor operations, makes it possible to significantly simplify the transformation algebra in proofs.

Keywords: Hamilton mechanics, Hamilton equations, phase space, canonical transformations.

PACS: 04.50.Kd
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2020.2.64-70

[1]E-mail: morothov@yandex.ru
[2]E-mail: morothova0711@yandex.ru
[3]E-mail: luvial@mail.ru

Введение

Гамильтонов формализм [1] является эффективным средством исследования динамических систем как аналитическими, так и численными методами. Среди численных методов, укажем канонический метод численного интегрирования [2], в основу которого положены канонические преобразования фазового пространства.

В теории уравнения Гамильтона могут быть получены, как следствие, уравнений Лагранжа преобразованием Лежандра. При другом подходе используется аппарат дифференциальных форм [1].

При численном интегрировании уравнений Гамильтона и компьютерного моделирования динамических систем более эффективным является геометрический подход. В этом случае фазовое пространство необходимо рассматривать как бивекторное пространство координат, импульсов и времени. При этом координаты и время, рассматриваются как контравариантные величины, а импульсы как ковариантные величины. Это позволяет эффективно использовать операцию тензорного свертывания, используя суммирование по немому индексу, при выводе формул [3].

Целью настоящей работы является построение бивекторного формализма Гамильтоновой механики. Для достижения поставленной цели мы решим следующие задачи. Построим бивекторный аналог фазового пространства динамической системы. Представим бивекторный аналог уравнений Гамильтона. Определим геометрию полученного пространства в форме канонических преобразований.

1. Фазовое пространство

Согласно принципу детерминированности Ньютона положение материальной точки в пространстве в любой момент времени, однозначно определено, если известны её положение и импульс, в какой-либо момент времени.

Математическая формализация этого утверждения достигается заданием расширенного фазового пространства координат, импульсов и времени [1]. Фазовое пространство определяется как аффинное (точечное) [4] множество A^7, с присоединенными к нему векторными пространствами $\mathbf{R}^7$, как прямой суммы пространства импульсов $\mathbf{R}^3_p$, конфигураций $\mathbf{R}^3_x$ и времени $\mathbf{R}_t$. При этом импульсы задаются ковариантными векторами, а радиус-векторы и время контравариантными величинами [1]. В соответствии с этим, базисные элементы $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$, $\boldsymbol{e}^3 \in \mathbf{R}^3_p$ будем нумеровать верхним индексом, а элементы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3 \in \mathbf{R}^3_x$, $\boldsymbol{e}_0 \in \mathbf{R}_t$, соответственно, нижним индексом.

Пусть $\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}^3 \in \mathbf{R}^3_p$, $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 \in \mathbf{R}^3_x$, $\boldsymbol{e}_0 \in \mathbf{R}_t$ базисы $\mathbf{R}^7$. Центрируем аффинное пространство A^7, выбирая точку $O \in A^7$ за начало отсчета. Отнеся к ней базисные векторы линейного пространства $\mathbf{R}^7$, получим репер $O\,\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}^3$, $\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ пространства $A^7 = A^3_x \oplus A^3_p \oplus A_t$. Аффинное пространство A^7 является математической формализацией расширенного фазового пространства материальной точки.

Положение каждой точки определяется координатным представлением радиус-вектора в репере $O\,\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}^3$, $\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}^1 p_1 + \boldsymbol{e}^2 p_2 + \boldsymbol{e}^3 p_3 + \boldsymbol{e}_1 x^1 + \boldsymbol{e}_2 x^2 + \boldsymbol{e}_3 x^3 + \boldsymbol{e}_0 t = \boldsymbol{e}^i p_i + \boldsymbol{e}_i x^i + \boldsymbol{e}_0 t^0, \tag{1}$$

где $p_i = p_i(t)$, $x^i = x^i(t)$, $t^0 = t$ дифференцируемые функции времени $t \in \mathbf{R}$.

В выражении (1) используем тензорную запись, подразумевая суммирование по буквенному индексу, если он записан дважды один раз вверху, другой внизу. Индексы суммирования всегда будут принимать значения $1, 2, 3$. Эта запись будем использовать в дальнейшем, не расписывая выражение в компонентах. Кроме того выражение (1) удобно рассматривать как операцию свёртывания тензора p_i, x^i, t^0 с базисными элементами репера $\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}^3$, $\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$.

Скорость материальной точки в расширенном фазовом пространстве, определяется производной

$$\boldsymbol{v} = \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{e}^i \dot{p}_i + \boldsymbol{e}_i \dot{\mathbf{x}}^i + \boldsymbol{e}_0 \tag{2}$$

Определим ансамбль Гиббса — совокупность материальных точек, которые занимают в начальный момент времени некоторую область Γ пространства A^7 и подчиняются одному и тому же закону движения. Задание положения всех точек ансамбля Гиббса определяет тело ансамбля $\Gamma \in A^7$. Исследование геометрии тела ансамбля Гиббса в аффинном пространстве определяет задачу гамильтоновой механики.

Бивекторное фазовое пространство построим следующим образом. Имея репер $O\,\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}^3$, $\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$, определим для его элементов операцию внешнего умножения $\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}^j$.

При этом считаем

$$i = j \;\Rightarrow\; \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}^j \neq 0, \qquad i \neq j \;\Rightarrow\; \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}^j \neq 0, \qquad \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}^j = -\boldsymbol{e}^j \wedge \boldsymbol{e}_i.$$

Линейно независимые элементы $O\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}_0 \wedge \boldsymbol{e}^i$, $\boldsymbol{e}^i \wedge \boldsymbol{e}_i$ будем рассматривать как правый ориентированный репер линейного пространства бивекторов. Каждый базисный элемент репера, очевидно, определяет ориентированную плоскость с попарно взятыми направляющими векторами $\boldsymbol{e}^i$, $\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_0$. Найдем бивекторное представление точек аффинного пространства, для этого составим внешний квадрат радиус-вектора каждой точки A^7

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{r} = \left[\left(p_i \boldsymbol{e}^i + x^i \boldsymbol{e}_i + t\boldsymbol{e}_0\right) \wedge\right]^2. \tag{3}$$

В выражении (3), внешнему умножению подлежат как базисные векторы, так и координаты векторов. В соответствии с алгеброй внешнего умножения, считаем $p_i \wedge x^i = -x^i \wedge p_i$, $t^0 \wedge p_i = -p_i \wedge t^0$, $x^i \wedge t^0 = -t^0 \wedge x^i$. Выполняя умножение (3) и приводя результат к реперу $O\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}_0 \wedge \boldsymbol{e}^i$, $\boldsymbol{e}^i \wedge \boldsymbol{e}_i$, получим бивектор

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{e}^i \wedge \boldsymbol{e}_i \; p_i \wedge x^i + \boldsymbol{e}_0 \wedge \boldsymbol{e}^i \; t \wedge p_i + \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_0 \; x^i \wedge t, \tag{4}$$

который однозначно определяет каждую точку пространства A^7. Если бивектор (4) выражает положение движущейся точки ансамбля, то координатные элементы будут параметрическими дифференцируемыми функциями времени.

Аналогично, используя фазовую скорость (2), образуем бивектор фазовой скорости

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{e}^i \wedge \boldsymbol{e}_i \; \dot{p}_i \wedge \dot{x}^i + \boldsymbol{e}_0 \wedge \boldsymbol{e}^i \; \boldsymbol{e}_0 \wedge \dot{p}_i + \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_0 \; \dot{x}^i \wedge \boldsymbol{e}_0, \tag{5}$$

где символом $\boldsymbol{e}_0$ обозначена контравариантная единица.

Представление положения и скорости материальных точек ансамбля Γ в виде бивекторов точечного аффинного пространства A^7 позволяет развить бивекторный формализм в механике Гамильтона.

Итак, кинематика материальной точки определяется бивекторам (4) и скоростью (5).

2. Динамические уравнения

Для определения фазовых траекторий рассмотрим функцию вида

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}^i p_i + \boldsymbol{e}_i x^i + \boldsymbol{e}_0 H, \tag{6}$$

где $H = H\left(p_1, p_2, p_3, x^1, x^2, x^3, t\right)$ непрерывная дифференцируемая функция импульсов координат и, вообще говоря, времени, – так называемая функция Гамильтона.

Оператор внешней кососимметрической производной определим в форме

$$\boldsymbol{e}\nabla\wedge = \left(\boldsymbol{e}^i \nabla_i + \boldsymbol{e}_i \nabla^i + \boldsymbol{e}^0 \nabla_0\right) \wedge, \tag{7}$$

где используем сокращенную запись $\boldsymbol{e}^i\nabla_i \equiv \boldsymbol{e}^i\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\boldsymbol{e}_i\nabla^i \equiv \boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial p_i}$, $\boldsymbol{e}^0\nabla_0 \equiv \boldsymbol{e}^0\frac{\partial}{\partial t}$.

Подействуем оператором (7) на функцию (6). Принимая во внимание кососимметрические свойства внешнего произведения, найдем бивектор

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{e}^0 \wedge \boldsymbol{e}^i\left(-\nabla_i H + \nabla_0 p_i\right) + \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}^0\left(\nabla^i H - \nabla_0 x^i\right), \tag{8}$$

в репере $O\boldsymbol{e}^i \wedge \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}^0 \wedge \boldsymbol{e}^i$, $\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}^0$. Бивектор (8), по смыслу, является аналогом вектора силы.

Сформулируем основной закон.

Бивекторная скорость материальной точки равна действующему на неё бивектору сил

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varphi}. \tag{9}$$

Условие (9) определяет всю геометрию фазового ансамбля. Покажем это.

Расписывая (9) в развернутом виде, имеем

$$\boldsymbol{e}^i \wedge \boldsymbol{e}_i\ \dot{p}_i \wedge \dot{x}^i + \boldsymbol{e}^0 \wedge \boldsymbol{e}^i\ 1 \wedge \dot{p}_i + \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}^0\ \dot{x}^i \wedge 1 = \boldsymbol{e}^0 \wedge \boldsymbol{e}^i\left(-\nabla_i H + \nabla_0 p_i\right) + \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}^0\left(\nabla^i H - \nabla_0 x^i\right). \tag{10}$$

Из равенства (10) следуют основные уравнения гамильтоновой механики [1]

$$\dot{p}_i = -\nabla_i H + \nabla^0 p_i, \qquad \dot{x}^i = \nabla^i H - \nabla^0 x^i, \qquad \dot{p}_i \wedge \dot{x}^i = 0 \tag{11}$$

Если явная зависимость координат и импульсов материальных точек от времени отсутствует, то $\nabla^0 p_i = 0$, $\nabla^0 x^i = 0$, и первая пара уравнений (11) приобретает форму динамических уравнений Гамильтона [1]

$$\dot{p}_i = -\nabla_i H, \qquad \dot{x}^i = \nabla^i H. \tag{12}$$

Если в начальный момент времени $t^0 = 0$ для каждой точки ансамбля Γ определены начальные координаты x_0^i, и импульсы p_0^i, то интегральное преобразования вида

$$p_i = p_{i0} - \int\limits_0^t \nabla^i H d\tau, \qquad x^i = x_0^i + \int\limits_0^t \nabla_i H d\tau \tag{13}$$

точек ансамбля образуют группу диффеоморфизмов фазового ансамбля или поток [1].

Бивекторный инвариант, выраженный третьим уравнением (11) определяет основные интегральные инварианты фазового ансамбля [1]. В частности отсюда следует, что сумма проекций площадей фазового ансамбля на плоскости реперные плоскости $O\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}_0 \wedge \boldsymbol{e}^i$, $\boldsymbol{e}^i \wedge \boldsymbol{e}_i$

$$\iint\limits_{\Gamma} dp_i \wedge dx^i = inv,$$

остается постоянным.

Инвариантом будет также внешний куб фазовой скорости

$$\left(\boldsymbol{e}^i \wedge \boldsymbol{e}_i\ dp_i \wedge dx^i \wedge\right)^3 = \boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2 \wedge \boldsymbol{e}^3 \wedge \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 dp_1 \wedge dp_2 \wedge dp_3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = inv. \tag{14}$$

Интеграл (14) по области фазового пространства занимаемого ансамблем Γ в любой момент времени, определяет закон сохранения фазового объема для потока

$$\int\limits_{\Gamma} ... \int\limits_{\Gamma} p_1 \wedge dp_2 \wedge dp_3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = inv. \tag{15}$$

Выражение (15) составляет содержание известной теоремы Лиувилля [1].

Итак, основное уравнение (9) определяет динамику ансамбля частиц.

3. Геометрия фазового пространства

Пусть в фазовом пространстве определены скалярные функции $f = f\left(p_i, x^i\right)$, $g = g\left(p_i, x^i\right)$.

Бивекторным градиентом этих функций назовем бивектор

$$\nabla^i \wedge \nabla_i (f, g) = \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}^i \left(\nabla^i f \nabla_i g - \nabla_i f \nabla^i g\right) = \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}^i \nabla^i f \wedge \nabla_i g. \tag{16}$$

Выражение в скобках принято называть скобкой Пуассона [1].

Возникает вопрос: как изменяется бивекторный градиент, если осуществить преобразование фазовых переменных?

Чтобы решить эту проблему, предположим, что новые переменные выражены взаимно однозначными непрерывно дифференцируемыми функциями

$$P_j = P_j\left(p_i, x^i\right), \quad X^j = X^j\left(p_i, x^i\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad p_i = p_i\left(P_j, X^j\right), \quad x^i = x^i\left(P_j, X^j\right). \tag{17}$$

Преобразования (17) можно рассматривать как переход от аффинных координат к каким-либо криволинейным координатам [3].

Осуществим замену переменных (17) в выражении градиента (16). Для чего введем промежуточное дифференцирование по новым переменным.

$$\begin{aligned}\nabla^i \wedge \nabla_i (f, g) = &\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}^i \left[\left(\nabla^i P_j \nabla^j f + \nabla^i X^j \nabla_j f\right)\left(\nabla_i P_j \nabla^i g + \nabla_i X^j \nabla_i g\right) - \right.\\ &\left. - \left(\nabla_1 P_j \nabla^j f + \nabla_1 X^j \nabla_j f\right)\left(\nabla^i P_j \nabla^j g + \nabla^i X^j \nabla_j g\right)\right].\end{aligned} \tag{18}$$

Раскрывая скобки и осуществляя перегруппировку слагаемых, приводим выражение (18) к виду

$$\nabla^i \wedge \nabla_i (f, g) = \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}^i \left(\nabla^i P_j \cdot \nabla_i X^j - \nabla_i P_j \cdot \nabla^i X^j\right)\left(\nabla^j f \nabla_j g - \nabla_j f \nabla^j g\right) \tag{19}$$

Пусть M точка фазового пространства, в котором берётся бивекторный градиент. Примем составляющие бивекторного градиента координатных функций в выражении (19) за базисные элементы локального бивекторного репера $M\boldsymbol{\varepsilon}_j \wedge \boldsymbol{\varepsilon}^j$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j \wedge \boldsymbol{\varepsilon}^j = \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}^i \left(\nabla^i P_j \cdot \nabla_i X^j - \nabla_i P_j \cdot \nabla^i X^j\right).$$

После этого бивекторные градиенты, вычисленные в старых и новых бивекторных координатах, будут иметь вид

$$\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}^i \left(\nabla^i f \nabla_i g - \nabla_i f \nabla^i g\right) = \boldsymbol{\varepsilon}_j \wedge \boldsymbol{\varepsilon}^j \left(\nabla^j f \nabla_j g - \nabla_j f \nabla^j g\right),$$

где базисные векторы принадлежат к локальным базисам.

Если на преобразование (17) наложить условие

$$\left(\nabla^i P_j \cdot \nabla_i X^j - \nabla_i P_j \cdot \nabla^i X^j\right) = \delta_i^j, \tag{20}$$

то бивекторный градиенты скалярных функций фазовых переменных инвариант этого преобразования. В механике Гамильтона они называются каноническими преобразованиями [1].

Канонические преобразования оставляют инвариантными основное динамическое уравнения (9). Иными словами, если выполнено условие (20), то уравнения Гамильтона в новых координатах сохраняют прежний вид.

Действительно, выполняя внешнее умножение уравнений (12) на контравариантные единицы $\boldsymbol{e}^i$, $\boldsymbol{e}_i$, получим тензорные уравнения

$$\boldsymbol{e}^i \wedge \dot{p}_i = -\boldsymbol{e}^i \wedge \nabla_i H, \qquad \dot{x}^i \wedge \boldsymbol{e}_i = \nabla^i H \wedge \boldsymbol{e}_i.$$

Свертывая тензоры с базисными бивекторами, имеем уравнения для бивекторных градиентов

$$\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}^i\, \boldsymbol{e}^i \wedge \dot{p}_i = -\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}^i\; \boldsymbol{e}^i \wedge \left(\nabla_i H + \nabla^0 p_i\right), \qquad \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}^i\; \dot{x}^i \wedge \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}^i \left(\nabla^i H - \nabla^0 x^i\right) \wedge \boldsymbol{e}_i. \quad (21)$$

Если осуществлено преобразование фазовых переменных (17) при условии их каноничности (20), то в новых переменных уравнение (21) будет иметь тот же вид, т.е.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i \wedge \boldsymbol{\varepsilon}^i\; \boldsymbol{e}^i \wedge \dot{p}_i = -\boldsymbol{\varepsilon}_i \wedge \boldsymbol{\varepsilon}^i\; \boldsymbol{e}^i \wedge \left(\nabla_i H + \nabla^0 p_i\right), \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_i \wedge \boldsymbol{\varepsilon}^i \dot{x}^i \wedge \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_i \wedge \boldsymbol{\varepsilon}^i \left(\nabla^i H - \nabla^0 x^i\right) \wedge \boldsymbol{e}_i, \quad (22)$$

что и требовалось доказать.

Подчеркнем, что мы рассмотрели преобразование переменных, оставаясь в рамках аффинной геометрии.

Итак, основное динамическое уравнение инвариантно относительно канонических преобразований.

Заключение

Мы построили бивекторный аналог фазового пространства и соответствующие кинематические величины. Представили основное бивекторное уравнение и показали, что оно полностью определяет динамику ансамбля или поток. Определили геометрию полученного пространства в форме канонических преобразований фазового пространства.

Таким образом, в работе разработан бивекторный формализм уравнений Гамильтоновой механики.

Список литературы

1. Арнольд В.И. *Математические методы классической механики.* М.: Наука, 1974. 432 с.

2. Ефимов И.Н., Морозов Е.А., Морозова А.Р. Канонические алгоритмы численного интегрирования уравнений движения заряженных частиц. *Журнал технической физики.* 2017. № 2. С. 170–174.

3. Морозов Е.А., Морозов А.Р., Морозова Л.Е. Об использовании ковариантных и контравариантных векторных пространств в механике. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2018. № 3. С. 31–37.

4. Рашевский К.Р. *Риманова геометрия и тензорный анализ.* М.: Наука, 1967. 664 с.

References

1. Arnold V.I. *Mathematical methods of classical mechanics.* Moscow, Nauka Publ., 1974. 432 p. (in Russ.)

2. Efimov I.N., Morozov E.A., Morozova A.R. Canonical algorithms for numerical integration of charged particle motion equations. *Zhurnal tehnicheskoj fiziki*, 2017, vol. 62, no. 2, pp. 196–200. (In Russ.)

3. Morozov E.A., Morozova A.R., Morozova L.E. On the use of covariant and contravariant vector spaces in mechanics. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2018, no. 3, pp. 31–37. (In Russ.)

4. Rashevsky R.K. *Riemannian geometry and tensor analysis.* Moscow, Nauka Publ., 1967. 664 p. (in Russ.)

Авторы

Морозов Евгений Александрович, доктор технических наук, профессор, Чайковский филиал Пермского национального исследовательского политехнического университета, ул. Ленина, 73, г. Чайковский, 617760, Россия.

E-mail: morothov@yandex.ru

Морозова Амина Рафкатовна, кандидат технических наук, доцент, Чайковский филиал Пермского национального исследовательского политехнического университета, ул. Ленина, д. 73, г. Чайковский, 617760, Россия.
E-mail: morothova0711@yandex.ru

Морозова Людмила Евгеньевна, к.ф.-м.н., доцент, Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова, ул. Студенческая, 7, г. Ижевск, 426069, Россия.
E-mail: luvial@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Морозов Е. А., Морозова А. Р., Морозова Л. Е. Об использовании бивекторного формализма в гамильтоновой механике. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2020. № 2. С. 64—70.

Authors

Morozov Evgenii Aleksandrovich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Tchaikovsky Branch of Perm National Research Polytechnic University, Lenina st., 73, Tchaikovsky, 617760, Russia.
E-mail: morothov@yandex.ru

Morozova Amina Rafkatovna, Candidate of Technical sciences, Associate Professor, Tchaikovsky Branch of Perm National Research Polytechnic University, Lenina st., 73, Tchaikovsky, 617760, Russia.
E-mail: morothova0711@yandex.ru

Morozova Lyudmila Evgen'evna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Studencheskaya st., 7, Izhevsk, 426069, Russia.
E-mail: luvial@mail.ru

Please cite this article in English as:
Morozov E. A., Morozova A. R., Morozova L. E. On the use of bivector formalizm in Hamiltonian mechanics. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2020, no. 2, pp. 64–70.