

УДК 530.12; 531.51

© Гладуш В. Д., 2020

**СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ T- И R-РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ
5-МЕРНОЙ ТЕОРИИ КАЛУЦЫ-КЛЕЙНА И ЕЁ ОБОБЩЕНИЙ**Гладуш В. Д.^{a,1}^a Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, г. Днепр, 49010, Украина.

Строятся решения 5-мерной (5D) теории типа Калуцы-Клейна, которая описывается лагранжианом, зависящего от параметра ϵ . При $\epsilon = 1$ лагранжиан описывает теорию Калуцы-Клейна; при $\epsilon = 1/\sqrt{3}$ он представляет эффективный лагранжиан для низко энергетического предела теории суперструн; наконец, при $\epsilon = 0$, описывает теорию Эйнштейна-Максвелла с минимально связанным скалярным полем. Исходный 5D вариационный принцип Эйнштейна-Гильберта для метрики независимой от 5 координаты, после размерной редукции сводится к четырехмерному. Последующая ортогонализация и конформное отображение сводит действие к эйнштейновой форме, описывающей гравитационное, электромагнитное и скалярное взаимодействующие поля. Параметр ϵ формально вставляется в экспоненту, определяющую тип контактного взаимодействия между скалярным и электромагнитным полями. Последующая редукция к сферической симметрии приводит к действию, описывающему искомые конфигурации.

Мы ограничиваемся построением сферически-симметричных решений, полученных таким образом обобщённых 5D моделей, геометрия которых зависит только от временной (T-решения) или радиальной (R-решения) координаты. Для каждого случая мы переходим в конфигурационное пространство, получаем метрику этого пространства и уравнения Эйнштейна-Гамильтона-Якоби, с помощью которого находятся траектории в конфигурационном пространстве. Далее, восстанавливается эволюционная координата и строятся метрики и поля, рассматриваемых моделей, в координатном пространстве. Найденное T-решение соответствует космологической модели типа Кантовского-Сакса с топологией гиперцилиндра, со скалярным и электромагнитным полями, взаимодействующими между собой контактным образом. С другой стороны, при соответствующем выборе постоянных интегрирования, они отвечают внутренней области черной дыры. Оказывается, множество R-решений гораздо содержательнее T-решений, что приводит к необходимости построения соответствующей классификации R-решений. Изучается симметрия конфигурационного пространства R-моделей, строятся соответствующие решения и приводится их краткий анализ.

Ключевые слова: пятимерное пространство, теория Калуцы-Клейна, сферически-симметричные конфигурации, метод Гамильтона-Якоби, конфигурационное пространство.

**SPHERICALLY SYMMETRIC T- AND R-SOLUTIONS OF THE EQUATIONS OF
THE 5-DIMENSIONAL KALUZA-KLEIN THEORY AND ITS GENERALIZATIONS**Gladush V. D.^{a,1}^a Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, 49010, Ukraine.

Using the Hamilton–Jacobi technique, we find spherically symmetric solutions of the 5-dimensional (5D) Kaluza–Klein type theory with the generalized Lagrangian depending on the parameter ϵ . For $\epsilon = 1$, the Lagrangian describes the Kaluza–Klein theory; for $\epsilon = 1/\sqrt{3}$ it represents the effective Lagrangian for the low energy limit of superstring theory; finally, for $\epsilon = 0$, the Lagrangian describes the Einstein–Maxwell theory with a minimally coupled scalar field. We restrict ourselves to constructing 5D configurations, the geometry of which depends only on the time (T-solution) or radial (R-solution) coordinate. For each case, we go to the configuration space and obtain the metric of this space and the Einstein–Hamilton–Jacobi equation. With the help of this equation, the fields trajectories in the configuration space are found. Further, the evolutionary coordinate is restored, and the metrics and fields are constructed in the coordinate space for the models under consideration. The found T-solution corresponds to the cosmological model of the Kantovsky–Sachs type with the

¹E-mail: vgladush@gmail.com

hypercylinder topology, where scalar and electromagnetic fields interacting with each other in a contact manner. On the other hand, with an appropriate choice of the integration constants, they correspond to the inner region of the black hole. It turns out that the set of R-solutions is more meaningful than T-solutions, what leads to the need to construct an appropriate classification of R-solutions. Further, the symmetry of the configuration space of R-models is studied, and a brief analysis of solutions is given.

Keywords: five-dimensional space, Kaluza-Klein theory, spherically symmetric configurations, Hamilton-Jacobi method, configuration space.

PACS: 04.20.Jb, 04.50.+h

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2020.2.23-52

Введение

К настоящему времени можно констатировать, что пятимерная (5D) теория Калуцы-Клейна (КК) не приобрела, достаточно чёткого, установившегося статуса в современной физике и существует в нескольких версиях. Здесь следует упомянуть традиционные подходы (см., например, [1] и ссылки в ней). С другой стороны, в ряде работ (см. книгу [2] и ссылки в ней), придерживаются точки зрения о 5D относительности, как теории, в которой материя индуцирована 5D геометрией. Отметим замечательную связь последнего подхода с теорией бран [3]. Уместно также заметить то, что 5D КК теория широко рассматривается как низко энергетический предел теорий более высоких измерений, которые стремятся объединить гравитацию с внутренними взаимодействиями физики элементарных частиц. Таким образом, хотя 5D КК теория является не вполне реалистической теорией “природы”, она дает некоторое представление о более сложных теориях, такие как теория струн и супергравитация.

В связи с этим, по аналогии с [4], здесь рассматривается более общая, 5DG КК теория, которая описывается лагранжианом, зависящего от параметра ϵ . При $\epsilon = 1$ лагранжиан описывает 5D КК теорию; при $\epsilon = 1/\sqrt{3}$ он представляет эффективный лагранжиан для низко энергетического предела теории суперструн; наконец, при $\epsilon = 0$ этот лагранжиан описывает теорию Эйнштейна-Максвелла с минимально связанным скалярным полем.

Самая интересная особенность 5D КК теории - это то, что дифференциально-геометрический процесс размерной редукции 5D действия Эйнштейна-Гильберта естественным образом приводит к физической теории Эйнштейна-Максвелла со скалярным полем, который минимально взаимодействует с гравитацией и контактным образом с электромагнетизмом. Отметим важность скалярного поля в современной астрофизике и космологии. Например, скалярное поле было предложено в качестве кандидата для описания темной материи. Скалярные поля, предположительно, играют важную роль в объяснении кривых вращения объектов, наблюдаемых в галактиках [5], [6]. В космологии они использовались для объяснения крупномасштабной структуры Вселенной [7]. Таким образом, исследование 5DG КК (как и 5D КК) моделей, представляет интерес для изучения возможных проявления 5-мерия, эффектов связанных со скалярным полем, а также следствий низко энергетического предела теории суперструн.

Вследствие этого, 5D КК теория по-прежнему представляет интерес и привлекает много исследователей. В этой области построено большое количество точных решений и развиты различные подходы их построения и изучения. Мы упомянем лишь методы теории стационарных пространств 4D ОТО для построения решений с использованием внутренних симметрий уравнений (см. [8], [9], [10], [11] и др.), которые были перенесены на стационарные пространства 5D КК теории для нахождения решений с использованием внутренних симметрий уравнений (см., например, [12], [13], [4] и др.).

Простейшие сферически-симметричные (СС) конфигурации 5D КК теории приводят к таким интересным объектам, как черные дыры (ЧД), кротовые норы и открытые сингулярности.

В работах [14], [15] решения для СС систем строились с применением условия гармоничности радиальной координаты. В работе [16] для нахождения решения 5D КК уравнений для СС конфигурации использовался метод Гамильтона-Якоби. Прямым интегрированием уравнений 5D КК теории получено интересное решение для СС модели в [17]. Внутренняя симметрия уравнений 5D КК теории использовалась в работе [18] для построения и изучения СС моделей.

Здесь мы развиваем метод Гамильтона-Якоби для построения СС T - и R -решений (T - и R -конфигураций) уравнений 5DG КК теории с вырожденным лагранжианом, предложенный в [16]. Мы исходим из 5D вариационного принципа Эйнштейна-Гильберта для 5D КК теории, который после размерной редукции сводится к четырехмерному. Последующая ортогонализация и конформное отображение сводит действие к эйнштейновой форме, описывающей гравитационное, электромагнитное и скалярное взаимодействующие поля. Переход к обобщённым 5D моделям (5DG) осуществляется путем формальной подстановки параметра ϵ в экспоненту, определяющую тип контактного взаимодействия между скалярным и электромагнитным полями. Далее, методом Гамильтона-Якоби строятся решения в конфигурационном пространстве (КП), а затем осуществляется восстановление эволюционной координаты и последующий переход в координатное пространство. Отметим, что применение метода Гамильтона-Якоби для R - и T -конфигураций имеет свои особенности. В случае T -решений, при восстановлении временной зависимости, возникает необходимость решать задачу Коши с начальными данными. Для R -решений, где в качестве эволюционного параметра используется радиальная координата, необходимо задавать поведение полей на бесконечности, либо на границе модели. Оказывается, что множество R -решений гораздо содержательнее T -решений, что говорит о целесообразности построения классификации геодезических в КП и всех R -решений, а также проведения их сравнительного анализа.

1. Действие для сферически-симметричных 5DG моделей в теориях типа Калуцы-Клейна

Мы начинаем со стандартной 5D КК теории в пространство M^5 с 5D-метрикой

$${}^{(5)}ds^2 = G_{AB}dx^A dx^B = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + 2g_{\mu 4}dx^\mu dx^4 + g_{44}dz^2 \quad (1)$$

сигнатуры $\{0, -1, -1, -1, -1\}$, $\{A, B\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; $\{\mu, \nu\} = \{0, 1, 2, 3\}$, x^μ – пространственно-временные координаты, $x^4 = z$ – пятая пространственноподобная координата, $G_{AB} = G_{AB}(x^C)$.

Отметим, что 5D КК теория основана на следующих утверждениях:

1. Выполняется условие цилиндричности, согласно которому метрика (1) пространства M^5 допускает пространственноподобный вектор Киллинга ξ_5 . В подходящей системе координат, когда $\xi_5 = \partial/\partial z$, это приводит к независимости метрики от пятой координаты z , так что $G_{AB} = G_{AB}(x^\mu)$.
2. Выполняется условие замкнутости пространства M^5 по пятой координате z , при этом $0 \leq z \leq L$.
3. Метрические функции G_{AB} пространства M^5 подчиняется вариационному принципу, согласно которому

$$\delta S_5 = 0, \quad (2)$$

относительно вариаций δG_{AB} для 5D действия Эйнштейна-Гильберта

$$S_5 = -\frac{1}{4\pi L} \int d^5x \sqrt{G} {}^{(5)}R, \quad (3)$$

где ${}^{(5)}R$ – 5D скалярная кривизна, $G = \det|G_{AB}|$, $d^5x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$, $4\pi L$ – объём однородного пространства рассматриваемой СС T - или R -модели.

4. Четырехмерные физические величины вводятся при размерной редукции теории. Последняя осуществляется путём ортогонального 4+1-расщепления M^5 и всех величин на нём, с последующим конформным отображением на подходящее физическое пространство-время M^4 . Оно выбирается так, чтобы полученное редуцированное действие приобрело эйнштейнову форму.

В результате, 5D метрика (1) приводится к следующей 4+1-форме

$${}^{(5)}ds^2 = \frac{1}{V} {}^{(4)}ds^2 - V^2 (dz + A_\mu dx^\mu)^2, \quad (4)$$

где

$${}^{(4)}ds^2 = h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (5)$$

Множитель V^{-1} в (4) осуществляет необходимое конформное отображение 4D сечения на физическое четырёхмерное пространство-время с метрикой (5). При этом $G = V^{-1}\sqrt{-h}$, $h = \det |h_{\mu\nu}|$. После 4+1-расщепления 5D скалярной кривизны, интегрирования по z в пределах $0 \leq z \leq L$ и отбрасывания поверхностных слагаемых, 5D действие (3) сводится к 4D действию вида:

$$S_4 = -\frac{1}{4\pi l} \int d^4x \left[{}^{(4)}R - \frac{3}{2V^2} \left({}^{(4)}\nabla V \right)^2 + \frac{1}{4} V^3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \sqrt{-h}. \quad (6)$$

Здесь ${}^{(4)}R$ – 4D скалярная кривизна относительно физической метрики $h_{\mu\nu}$,

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$$

– тензор электромагнитного поля, $\left({}^{(4)}\nabla V \right)^2 = h^{\mu\nu} V_{,\mu} V_{,\nu}$, $V_{,\mu} = \partial V / \partial x^\mu$, $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$. Последующая замена $V = e^{-\psi/\sqrt{3}}$ приводит действие (6) к эйнштейновской форме [19], [20]:

$$S_4 = -\frac{1}{4\pi l} \int d^4x \left[{}^{(4)}R - \frac{1}{2} \left({}^{(4)}\nabla \psi \right)^2 + \frac{1}{4} e^{-\epsilon\sqrt{3}\psi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \sqrt{-h}. \quad (7)$$

При этом 5D метрика принимает вид

$${}^{(5)}ds^2 = e^{\psi/\sqrt{3}} {}^{(4)}ds^2 - e^{-2\psi/\sqrt{3}} (dz + A_\mu dx^\mu)^2. \quad (8)$$

В результате, действие приобретает естественный физический смысл. Оно описывает взаимодействующие скалярное ψ , электромагнитное $F_{\mu\nu}$ и гравитационное $h_{\mu\nu}$ поля. Причем, кроме обычного минимального взаимодействия скалярного и электромагнитного полей с гравитационным полем, оно содержит также контактное взаимодействие скалярного и электромагнитного полей, описываемое слагаемым: $e^{-\sqrt{3}\psi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, характерного для 5D КК теории. Отметим, что в отмеченное слагаемое в (7), мы формально ввели в экспоненту множитель ϵ , такой что $\epsilon = 0$ для конфигурации гравитационного, электромагнитного и скалярного (с минимальной связью) полей ОТО. При $\epsilon = 1$ действие (7) соответствует 5D КК теории; наконец, при $\epsilon = 1/\sqrt{3}$, действие содержит эффективный лагранжиан для низко энергетического предела теории суперструн.

Для последующей редукции 4D действия (7) к СС случаю перепишем 4D метрику (5) и скалярную кривизну ${}^{(4)}R$ в 2+2-расщепленной форме:

$${}^{(4)}ds^2 = \gamma_{ab} dx^a dx^b - R^2 d\sigma^2, \quad (9)$$

$${}^{(4)}R = {}^{(2)}R - \frac{4}{R} {}^{(2)}\Delta R - \frac{2}{R^2} ({}^{(2)}\nabla R)^2 - \frac{2}{R^2}, \quad (10)$$

где $d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\alpha^2$ – угловая часть метрики, ${}^{(2)}R$ – 2D скалярная кривизна относительно 2D метрики γ_{ab} , ${}^{(2)}\Delta R = \nabla^a \nabla_a R = \gamma^{ab} R_{;a;b}$ – 2D оператор Лапласа, $({}^{(2)}\nabla R)^2 = \gamma^{ab} R_{,a} R_{,b}$, $\{a, b\} = \{0, 1\}$. При этом

$$\sqrt{-h} = \sqrt{-\gamma} R^2 \sin \theta, \quad \gamma = \det |\gamma_{ab}|, \quad d^4x = d^2x d\theta d\alpha, \quad d^2x = dx^0 dr, \quad x^1 = r,$$

а 4D электромагнитное и скалярное поля сводятся к 2D полям:

$$A_\mu \Rightarrow A_a = \{A_0, A_r\}, \quad F_{\mu\nu} \Rightarrow F_{ab} \Rightarrow E = F_{01} = -F_{10} = A_{1,0} - A_{0,1}, \quad (11)$$

так что

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = F^{ab} F_{ab} = \frac{2}{\gamma} (F_{01})^2 = \frac{2}{\gamma} E^2, \quad \left({}^{(4)}\nabla \psi \right)^2 = \left({}^{(2)}\nabla \psi \right)^2 = \gamma^{ab} \psi_{,a} \psi_{,b}. \quad (12)$$

Здесь и далее $A_{,0} = \partial A / \partial x^0$ и $A_{,1} = \partial A / \partial x^1$. Интегрируя по углам и опуская поверхностный член, 4D действие (7) можно свести к 2D действию

$$S_2 = -\frac{1}{l} \int d^2x \left\{ \left[R^2 ({}^{(2)}R + (2({}^{(2)}\nabla R)^2 - 2) - \frac{1}{2} R^2 ({}^{(2)}\nabla\psi)^2 \right] \sqrt{-\gamma} - \frac{1}{2} R^2 e^{-\epsilon\sqrt{3}\psi} \frac{E^2}{\sqrt{-\gamma}} \right\}. \quad (13)$$

В рассматриваемом случае метрику (9), с помощью допустимых 2D преобразований $x^a = x^a(x^b)$, можно привести к диагональной форме

$${}^{(4)}ds^2 = f(x^0, x^1)(dx^0)^2 - h(x^0, x^1)(dx^1)^2 - R^2(x^0, x^1)d\sigma^2, \quad (14)$$

так что $\sqrt{-\gamma} = \sqrt{fh}$. Вычисление 2D скалярной кривизны для этой метрики приводит к результату

$${}^{(2)}R\sqrt{-\gamma} = \left(\frac{f_{,1}}{\sqrt{fh}} \right)_{,1} - \left(\frac{h_{,0}}{\sqrt{fh}} \right)_{,0}. \quad (15)$$

В итоге, с точностью до поверхностных членов, действие (13) можно переписать следующим образом

$$S_2 = \frac{1}{l} \int dx^0 dr \left\{ \frac{2}{\sqrt{fh}} \left[R_{,1}(fR)_{,1} - R_{,0}(hR)_{,0} + \frac{1}{4} R^2 e^{-\epsilon\sqrt{3}\psi} E^2 \right] + \frac{1}{2} R^2 \left(\sqrt{\frac{h}{f}} \psi_{,0}^2 - \sqrt{\frac{f}{h}} \psi_{,1}^2 \right) + 2\sqrt{fh} \right\}. \quad (16)$$

Это выражение, при $\epsilon = 1$, описывает редуцированное действие для СС конфигурации, вытекающее из действия (7) 5D КК теории. Когда $\epsilon = 0$ оно переходит в действие ОТО для СС конфигурации электромагнитного и скалярного полей с минимальной связью. При $\epsilon = 1/\sqrt{3}$ оно соответствует редукции к СС случаю эффективного действия (7) для низко энергетического предела теории суперструн.

В общем случае, конфигурации или решения построенные на основе действия (16), в дальнейшем, будем называть 5D обобщенными (5DG).

2. Сферически-симметричное 5DG T-решение

2.1. Действие и лагранжиан для 5DG T-конфигурации

Рассмотрим так называемые “T-решения”, когда 5D метрика допускает пространственноподобный вектор Киллинга, который, в подходящей системе координат, имеет вид: $\vec{\xi}_1 = \partial/\partial x^1 = \partial/\partial r$. Тогда метрические функции f, h, R и полевые величины ψ, E зависят только от временной координаты x^0 . Обозначая радиальную компоненту потенциала электромагнитного поля через $A_1 = \phi$, для 4D метрики (14) и напряженности электрического поля (11) имеем

$${}^{(4)}ds^2 = f(x^0)(dx^0)^2 - h(x^0)dr^2 - R^2(x^0)d\sigma^2, \quad (17)$$

$$E = F_{01} = A_{1,0} = \phi_{,0}. \quad (18)$$

При этом действие (16), после интегрирования по r , в пределах $-l/2 \leq r \leq l/2$, принимает вид

$$S_T = \int dx^0 \left\{ \frac{1}{\sqrt{fh}} \left[-2R_{,0}(Rh)_{,0} + \frac{1}{2} R^2 e^{-\epsilon\sqrt{3}\psi} \phi_{,0}^2 \right] + \frac{1}{2} R^2 \sqrt{\frac{h}{f}} \psi_{,0}^2 + 2\sqrt{fh} \right\}. \quad (19)$$

Для ортогонализации этого действия, перейдем к новым полевым переменным:

$$f = N^2 e^{-\lambda}, \quad h = e^\lambda, \quad R = e^{(\omega-\lambda)/2}. \quad (20)$$

Вследствие этого, метрику (17) и действие (19) можно переписать в виде

$${}^{(4)}ds^2 = e^{-\lambda} [N^2(dx^0)^2 - e^\omega d\sigma^2] - e^\lambda (dr)^2, \quad (21)$$

$$S_T = \int L_T dx^0 = \int dx^0 \left\{ \frac{1}{2N} \left[\lambda_{,0}^2 - \omega_{,0}^2 + e^{-\lambda - \epsilon\sqrt{3}\psi} \phi_{,0}^2 + \psi_{,0}^2 \right] e^\omega + 2N \right\}, \quad (22)$$

где L_T – лагранжиан Т-конфигурации, который описывает вырожденную динамическую систему. Его удобно записать следующим способом

$$L_T = N^{-1} \mathfrak{T} + 2N, \quad (23)$$

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} e^\omega \left(\lambda_{,0}^2 - \omega_{,0}^2 + e^{-\lambda - \epsilon\sqrt{3}\psi} \phi_{,0}^2 + \psi_{,0}^2 \right). \quad (24)$$

Полная система Лагранжа-Эйлера для данной функции Лагранжа состоит из связи

$$\frac{\delta L_T}{\delta N} = \frac{\partial L_T}{\partial N} = -\frac{\mathfrak{T}}{N^2} + 2 = 0 \quad (25)$$

и динамических уравнений $\delta L_T / \delta q^i = 0$, где $q^i = \{\lambda, \omega, \phi, \psi\}$ – полевые переменные, которые рассматриваются, как обобщенные координаты динамической системы.

В дальнейшем, для построения решений уравнений, вытекающих из лагранжиана (23), применяется метод Гамильтона-Якоби (ГЯ). В соответствии с этим, из лагранжиана L_T (23) находим импульсы. Отметим, что производная L_T по $N_{,0}$ приводит к первичной связи $P_N = \partial L_T / \partial N_{,0} = 0$. Остальные производные по скоростям дают:

$$P_\lambda = \frac{\partial L_T}{\partial \lambda_{,0}} = \frac{1}{N} e^\omega \lambda_{,0}, \quad (26)$$

$$P_\omega = \frac{\partial L_T}{\partial \omega_{,0}} = -\frac{1}{N} e^\omega \omega_{,0}, \quad (27)$$

$$P_\phi = \frac{\partial L_T}{\partial \phi_{,0}} = \frac{1}{N} e^{\omega - \lambda - b\sqrt{3}\psi} \phi_{,0}, \quad (28)$$

$$P_\psi = \frac{\partial L_T}{\partial \psi_{,0}} = -\frac{1}{N} e^\omega \psi_{,0}. \quad (29)$$

Преобразование Лежандра

$$H = P_\lambda \lambda_{,0} + P_\omega \omega_{,0} + P_\phi \phi_{,0} + P_\psi \psi_{,0} - L_T \quad (30)$$

приводит к следующей функции Гамильтона системы

$$H = N \left\{ \frac{1}{2} e^{-\omega} \left(P_\lambda^2 - P_\omega^2 + e^{\lambda + \epsilon\sqrt{3}\psi} P_\phi^2 + P_\psi^2 \right) - 2 \right\} = 0, \quad (31)$$

которая обращается в ноль, благодаря связи (25). Подставляя в гамильтонову связь (31) производные

$$P_\lambda = \frac{\partial S_T}{\partial \lambda}, \quad P_\omega = \frac{\partial S_T}{\partial \omega}, \quad P_\phi = \frac{\partial S_T}{\partial \phi}, \quad P_\psi = \frac{\partial S_T}{\partial \psi} \quad (32)$$

приходим к уравнению Эйнштейна-Гамильтона-Якоби (ЭГЯ)

$$\left(\frac{\partial S_T}{\partial \lambda} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_T}{\partial \omega} \right)^2 + e^{\lambda + \epsilon\sqrt{3}\psi} \left(\frac{\partial S_T}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_T}{\partial \psi} \right)^2 = 4e^\omega. \quad (33)$$

Это уравнение вытекает также из геодезического действия, которое получается из исходного действия (22) при исключении лагранжева множителя N .

Действительно, из связи (25) следует формула для $N = \sqrt{\mathfrak{T}/2}$, с помощью которой можно исключить N из функции Лагранжа (23). В результате, получаем новый лагранжиан $L_{\mathcal{T}} = 2\sqrt{2\mathfrak{T}}$. Вследствие этого, приходим к геодезическому действию

$$S_{\mathcal{T}} = S_T|_{(N=\sqrt{\mathfrak{T}/2})} = 2 \int dx^0 \sqrt{2\mathfrak{T}} = 2 \int dx^0 \sqrt{e^\omega \left(\lambda_{,0}^2 - \omega_{,0}^2 + e^{-\lambda - \epsilon\sqrt{3}\psi} \phi_{,0}^2 + \psi_{,0}^2 \right)}, \quad (34)$$

как значению действия S_T (22) на связи $N = \sqrt{\mathfrak{T}/2}$.

Предложенная процедура позволяет перейти от исходного действия (22) к геодезическому действию

$$S_{\mathcal{T}} = 2 \int \sqrt{e^{\omega} \left(d\lambda^2 - d\omega^2 + e^{-\lambda - \epsilon\sqrt{3}\psi} d\phi^2 + d\psi^2 \right)} = 2 \int d\Omega, \quad (35)$$

для динамической системы в КП полевых переменных $q^a = \{\lambda, \omega, \phi, \psi\}$ с метрикой

$$d\Omega_{\mathcal{T}}^2 = e^{\omega} \left(d\lambda^2 - d\omega^2 + e^{-\lambda - \epsilon\sqrt{3}\psi} d\phi^2 + d\psi^2 \right) > 0. \quad (36)$$

Отметим, что выражение (35) аналогично действию Якоби в классической механике [21]. Приведенная процедура использовалась в [22] при изучении некоторых классических и квантовых аспектов геометродинамики СС полевых систем Эйнштейна-Максвелла. Заметим, также, что континуальный вариант геодезического действия (34), (35) является важной конструкцией в квантовой гравитации [23], [24], [25].

Легко показать, что уравнения геодезических, которые вытекают из действия (35), вместе со связью эквивалентны уравнениям Эйнштейна. Соответствующие траектории можно найти из уравнения ГЯ, полученного из геодезического действия $S_{\mathcal{T}}$, которое совпадает с уравнением ЭГЯ (33), полученным из гамильтоновой связи (31) (см. [16], [22]). Это говорит об эквивалентности обоих подходов.

2.2. Полный интеграл уравнения ЭГЯ для 5DG T-конфигурации

Для построения решения перепишем уравнение ЭГЯ в терминах разделяющихся переменных. С этой целью выполним ортогональное преобразование

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{n^2} (\xi - \epsilon\sqrt{3}\eta), \\ \psi = \frac{1}{n^2} (\epsilon\sqrt{3}\xi + \eta), \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = \lambda + \epsilon\sqrt{3}\psi, \\ \eta = -\epsilon\sqrt{3}\lambda + \psi, \end{cases} \quad (37)$$

где

$$n^2 = 1 + 3\epsilon^2 = 1, 4, 2 \quad \text{при} \quad \epsilon = 0, 1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{соответственно.} \quad (38)$$

В результате этого преобразования "кинетическую часть" (24) лагранжиана (23) можно переписать следующим образом

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} e^{\omega} \left(\frac{1}{n^2} \xi_{,0}^2 + \frac{1}{n^2} \eta_{,0}^2 - \omega_{,0}^2 + e^{-\xi} \phi_{,0}^2 \right). \quad (39)$$

При этом, метрика (36) КП принимает вид

$$d\Omega_{\mathcal{T}}^2 = e^{\omega} \left(\frac{1}{n^2} d\xi^2 + \frac{1}{n^2} d\eta^2 - d\omega^2 + e^{-\xi} d\phi^2 \right) > 0, \quad (40)$$

а уравнение ЭГЯ (33) превращается в уравнение с явно разделяющимися переменными:

$$n^2 \left(\frac{\partial S_{\mathcal{T}}}{\partial \xi} \right)^2 + n^2 \left(\frac{\partial S_{\mathcal{T}}}{\partial \eta} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_{\mathcal{T}}}{\partial \omega} \right)^2 + e^{\xi} \left(\frac{\partial S_{\mathcal{T}}}{\partial \phi} \right)^2 = 4e^{\omega}. \quad (41)$$

Откуда следует, что решение можно искать в виде

$$S_{\mathcal{T}} = q\phi + g\eta + Y(\omega) + Z(\xi),$$

где q и g – постоянные, которые можно интерпретировать, как электрический и скалярный заряды. При этом функции $Y(\omega)$ и $Z(\xi)$ подчиняются уравнениям

$$n^2 \left(\frac{dZ(\xi)}{d\xi} \right)^2 + n^2 g^2 + q^2 e^{\xi} = \left(\frac{dY(\omega)}{d\omega} \right)^2 + 4e^{\omega} = a_{\mathcal{T}} > 0, \quad (42)$$

где $a_{\mathcal{T}}$ – постоянная разделения. Поскольку, первые два выражения в этой формуле являются положительно определёнными, то $a_{\mathcal{T}} > 0$.

В результате, решение уравнение ЭГЯ (41) можно записать следующим образом

$$S_{\mathcal{T}}(\omega, \phi, \xi, \eta) = q\phi + g\eta + \int d\omega \sqrt{a_{\mathcal{T}} - 4e^{\omega}} + \frac{1}{n} \int d\xi \sqrt{a_{\mathcal{T}} - n^2 g^2 - q^2 e^{\xi}}. \quad (43)$$

Для удобства введем постоянные m и $b_{\mathcal{T}}$ с помощью формул

$$a_{\mathcal{T}} = m^2 + q^2 + n^2 g^2 > 0, \quad b_{\mathcal{T}} = a_{\mathcal{T}} - n^2 g^2 = m^2 + q^2 > 0. \quad (44)$$

Причем, постоянную m можно интерпретировать, как массу. В итоге, интеграл (43) принимает вид

$$S_{\mathcal{T}}(\omega, \phi, \xi, \eta) = q\phi + g\eta + \int d\omega \sqrt{a_{\mathcal{T}} - 4e^{\omega}} + \frac{1}{n} \int d\xi \sqrt{b_{\mathcal{T}} - q^2 e^{\xi}}. \quad (45)$$

Легко видеть, что для действительности решений необходимо выполнение условия $a_{\mathcal{T}} > n^2 g^2$. При этом, допустимая область переменных $\{\omega, \xi\}$ определяется неравенствами

$$0 \leq e^{\omega} \leq \frac{a_{\mathcal{T}}}{4}, \quad 0 \leq e^{\xi} \leq \frac{b_{\mathcal{T}}}{q^2}. \quad (46)$$

Полученное действие определяет геодезические в КП, которые в неявной форме задают искомые Т-решения.

2.3. Построение решения для 5DG Т-конфигурации

Для нахождения траектории, найдем производные действия (45) по параметрам $m, g, a_{\mathcal{T}}$ и приравняем их новым константам. В результате, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{\mathcal{T}}}{\partial q} &= \phi - \frac{q}{n} H_{\mathcal{T}}(\xi) = C_q, \\ \frac{\partial S_{\mathcal{T}}}{\partial g} &= \eta - n g K_{\mathcal{T}}(\xi) = C_g, \\ \frac{\partial S_{\mathcal{T}}}{\partial a_{\mathcal{T}}} &= \frac{1}{2} M_{\mathcal{T}}(\omega) + \frac{1}{2n} K_{\mathcal{T}}(\xi) = C_a. \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь C_q, C_g, C_a – некоторые постоянные, а функции $M_{\mathcal{T}}(e^{\omega}), K_{\mathcal{T}}(e^{\xi}), H_{\mathcal{T}}(e^{\xi})$ определяются следующими интегралами:

$$M_{\mathcal{T}}(\omega) = \int \frac{d\omega}{\sqrt{a_{\mathcal{T}} - 4e^{\omega}}} = \frac{1}{\sqrt{a_{\mathcal{T}}}} \ln \left(\frac{\sqrt{a_{\mathcal{T}}} - \sqrt{a_{\mathcal{T}} - 4e^{\omega}}}{\sqrt{a_{\mathcal{T}}} + \sqrt{a_{\mathcal{T}} - 4e^{\omega}}} \right), \quad (48)$$

$$K_{\mathcal{T}}(\xi) = \int \frac{d\xi}{\sqrt{b_{\mathcal{T}} - q^2 e^{\xi}}} = \frac{1}{\sqrt{b_{\mathcal{T}}}} \ln \left(\frac{\sqrt{b_{\mathcal{T}}} - \sqrt{b_{\mathcal{T}} - q^2 e^{\xi}}}{\sqrt{b_{\mathcal{T}}} + \sqrt{b_{\mathcal{T}} - q^2 e^{\xi}}} \right), \quad (49)$$

$$H_{\mathcal{T}}(\xi) = \int \frac{e^{\xi} d\xi}{\sqrt{b_{\mathcal{T}} - q^2 e^{\xi}}} = -\frac{2}{q^2} \sqrt{b_{\mathcal{T}} - q^2 e^{\xi}}. \quad (50)$$

Заметим, что система уравнений (47) определяет траектории системы в КП. Для того чтобы найти зависимость от времени требуется восстановить время, как эволюционный параметр x^0 , и найти область его изменения. Для этого следует решить задачу Коши при заданных начальных условиях для выбранного начального момента времени. С этой целью найдем сначала уравнение для функции $\omega = \omega(x^0)$ из соотношений для импульса, сопряженного переменной ω :

$$P_{\omega} = \frac{\partial L_{\mathcal{T}}}{\partial \omega} = \frac{\partial S_{\mathcal{T}}}{\partial \omega}. \quad (51)$$

Отсюда, учитывая (23) и (45), получаем дифференциальное уравнение

$$-\frac{1}{N} e^{\omega} \frac{d\omega}{dx^0} = \sqrt{a_{\mathcal{T}} - 4e^{\omega}}. \quad (52)$$

Выбирая калибровку $N = 1$, получаем

$$e^\omega = \frac{1}{4}a_T - (x^0)^2. \quad (53)$$

Причем, в соответствии с первым неравенством в (46), имеем

$$\frac{a_T}{4} \geq e^\omega \geq 0, \quad |x^0| \leq \frac{\sqrt{a_T}}{2}. \quad (54)$$

Подставляя выражение для e^ω в формулу (48), находим

$$M_T = \frac{1}{\sqrt{a_T}} \ln U_T, \quad (55)$$

где мы ввели обозначение

$$0 < U_T = \frac{\sqrt{a_T}/2 - |x^0|}{\sqrt{a_T}/2 + |x^0|} < 1. \quad (56)$$

Теперь мы можем задать начальные данные. Имея ввиду условие $|x^0| \leq \sqrt{a_T}/2$, естественно определить начальный момент времени при $x^0 = 0$. Поэтому, рассмотрим следующие начальные условия для полевых переменных $\{\lambda, \psi, \phi, \xi, \eta, e^\omega\}$ при $x^0 = 0$:

$$\lambda|_{x^0=0} = \lambda_0, \quad \psi|_{x^0=0} = \psi_0, \quad \phi|_{x^0=0} = \phi_0, \quad \xi|_{x^0=0} = \xi_0, \quad \eta|_{x^0=0} = \eta_0, \quad e^\omega|_{x^0=0} = a_T/4. \quad (57)$$

Тогда из формул (48)-(50), (53)-(56) при $x^0 = 0$ вытекает

$$U_T|_{x^0=0} = U_{T0} = 1, \quad M_T|_{x^0=0} = M_{T0} = 0, \quad (58)$$

$$K_T|_{x^0=0} = K_{T0} = \frac{1}{\sqrt{b_T}} \ln \left(\frac{\sqrt{b_T} - \sqrt{b_T - q^2 e^{\xi_0}}}{\sqrt{b_T} + \sqrt{b_T - q^2 e^{\xi_0}}} \right), \quad (59)$$

$$H_T|_{x^0=0} = H_{T0} = -\frac{2}{q^2} \sqrt{b_T - q^2 e^{\xi_0}}, \quad (60)$$

Для построения решения удобно переписать систему (47) следующим образом

$$\begin{aligned} \phi - \frac{q}{n} H_T &= C_q, \\ \eta + n^2 g M_T &= C_g + 2n^2 g C_a, \\ n M_T + K_T &= 2n C_a. \end{aligned} \quad (61)$$

Тогда, учитывая начальные значения (58), отсюда при $x^0 = 0$ получаем

$$\phi_0 - \frac{q}{n} H_{T0} = C_q, \quad \eta_0 = C_g + 2n^2 g C_a, \quad K_{T0} = 2n C_a.$$

Используя эти соотношения, исключим из уравнений движений (61) неизвестные постоянные C_q, C_m, C_g . В итоге, система уравнений (61) принимает вид

$$\phi - \phi_0 = \frac{q}{n} (H_T - H_{T0}), \quad (62)$$

$$\eta - \eta_0 = -n^2 g M_T, \quad (63)$$

$$n M_T = K_{T0} - K_T. \quad (64)$$

Учитывая формулы (49, 50, 55), а также начальные значения (59), (60), эту систему можно переписать следующим образом

$$\phi - \phi_0 = -\frac{2}{qn} \left(\sqrt{b_T - q^2 e^\xi} - \sqrt{b_T - q^2 e^{\xi_0}} \right), \quad (65)$$

$$\eta - \eta_0 = -\frac{n^2 g}{\sqrt{a_T}} \ln U_T, \quad (66)$$

$$\ln U_T^p = \ln \left(\frac{\sqrt{b_T} - \sqrt{b_T - q^2 e^{\xi_0}}}{\sqrt{b_T} + \sqrt{b_T - q^2 e^{\xi_0}}} \right) - \ln \left(\frac{\sqrt{b_T} - \sqrt{b_T - q^2 e^\xi}}{\sqrt{b_T} + \sqrt{b_T - q^2 e^\xi}} \right), \quad (67)$$

где

$$p = n\sqrt{\frac{b_T}{a_T}}. \quad (68)$$

Выразим величины ϕ и e^ξ через функцию U_T . С этой целью переписем уравнение (67) в следующей форме

$$\frac{\sqrt{b_T} - \sqrt{b_T - q^2 e^\xi}}{\sqrt{b_T} + \sqrt{b_T - q^2 e^\xi}} = V_T, \quad (69)$$

где

$$V_T = \left(\frac{\sqrt{b_T} - \sqrt{b_T - q^2 e^{\xi_0}}}{\sqrt{b_T} + \sqrt{b_T - q^2 e^{\xi_0}}} \right) U_T^{-p} = \left(\frac{1-B}{1+B} \right) U_T^{-p}. \quad (70)$$

Здесь введено обозначение

$$B = \sqrt{1 - \frac{q^2}{b_T} e^{\xi_0}} < 1. \quad (71)$$

Отметим, что, в силу неравенства $0 < U_T < 1$, для допустимых значений ξ_0 ($-\infty < \xi_0 < \ln(b_R/q^2)$) вытекает, что $0 < V_T < 1$. Разрешая уравнение (69) относительно e^ξ , получаем

$$e^\xi = \frac{4b_T}{q^2} \frac{V_T}{(1+V_T)^2} = \frac{4b_T}{q^2} \left(V_T^{-1/2} + V_T^{1/2} \right)^{-2}. \quad (72)$$

Подставляя в эту формулу выражение для V_T из (70), находим

$$e^\xi = \left\{ \frac{q}{2\sqrt{b_T}} \left[\left(\frac{1-B}{1+B} \right)^{-1/2} U_T^{p/2} + \left(\frac{1-B}{1+B} \right)^{1/2} U_T^{-p/2} \right] \right\}^{-2}. \quad (73)$$

Далее, учитывая соотношения

$$\frac{1-B}{1+B} = \frac{b_T}{q^2} (1-B)^2 e^{-\xi_0} = \frac{q^2}{b_T} \frac{e^{\xi_0}}{(1+B)^2},$$

выражение для e^ξ можно переписать следующим образом

$$e^\xi = e^{\xi_0} \left[\left(\frac{1+B}{2} \right) U_T^{p/2} + \left(\frac{1-B}{2} \right) U_T^{-p/2} \right]^{-2}. \quad (74)$$

Найдем теперь потенциал электрического поля ϕ . Подставляя первое выражение из формулы (72) для e^ξ в соотношение (65), и учитывая (71), находим

$$\phi - \phi_0 = -\frac{2\sqrt{b_T}}{qn} \left(\frac{1-V_T}{1+V_T} - B \right).$$

Далее, подставляя сюда величину V_T из определения (70) и B из (71), получаем

$$\phi - \phi_0 = \frac{2q}{n\sqrt{b_T}} \frac{(1-U_T^p) e^{\xi_0}}{1-B + (1+B) U_T^p}, \quad (75)$$

Итак, соотношения (53, 56 66, 74, 75) представляют искомое решение задачи Коши с начальными данными (57) и определяют эволюцию СС 5DG T-конфигурации в терминах полевых переменных $\{\xi, \eta, \omega, \phi\}$.

Используя формулы (37) и, вытекающие из них, соотношения между начальными значениями

$$\lambda_0 = \frac{1}{n^2} \left(\xi_0 - \epsilon\sqrt{3}\eta_0 \right), \quad \psi_0 = \frac{1}{n^2} \left(\epsilon\sqrt{3}\xi_0 + \eta_0 \right),$$

выразим найденные уравнения траекторий через систему исходных величин $\{\lambda, \psi, \omega, \phi\}$. Собирая полученные результаты, в итоге получаем

$$e^\lambda = e^{\lambda_0} U_T^{\epsilon g \sqrt{3/a_T}} \left[\left(\frac{1+B}{2} \right) U_T^{p/2} + \left(\frac{1-B}{2} \right) U_T^{-p/2} \right]^{-2/n^2}, \quad (76)$$

$$\psi = \psi_0 + \ln \left\{ U_T^{-g/\sqrt{a_T}} \left[\left(\frac{1+B}{2} \right) U_T^{p/2} + \left(\frac{1-B}{2} \right) U_T^{-p/2} \right]^{-2\epsilon\sqrt{3}/n^2} \right\}, \quad (77)$$

$$\phi = \phi_0 + \frac{2q}{n\sqrt{b_T}} \left(\frac{(1-U_T^p) e^{\xi_0}}{1-B+(1+B)U_T^p} \right), \quad (78)$$

$$e^\omega = \frac{1}{4} a_T - (x^0)^2, \quad U_T = \frac{\sqrt{a_T}/2 - |x^0|}{\sqrt{a_T}/2 + |x^0|}, \quad |x^0| \leq \frac{\sqrt{a_T}}{2}. \quad (79)$$

Здесь функции e^λ, ψ, ϕ выражаются через U_T (79), величину B (71), начальные значения $\lambda_0, \psi_0, \phi_0$ и постоянные

$$n = \pm \sqrt{1+3\epsilon^2}, \quad a_T = b_T + n^2 g^2, \quad b_T = m^2 + q^2, \quad p = n \sqrt{\frac{b_T}{a_T}},$$

Причем, постоянные m, q и g можно интерпретировать, как массу, электрический и скалярные заряды конфигурации.

Отметим, что в теории КК ($\epsilon = 1$) 5D метрика для T -решения, согласно (8), имеет вид

$${}^{(5)}ds^2 = e^{\psi/\sqrt{3}} {}^{(4)}ds^2 - e^{-2\psi/\sqrt{3}} (dz + \phi dx^0)^2. \quad (80)$$

Физическую 4D метрику для T -решения, как в теории КК ($\epsilon = 1$), так и в ОТО ($\epsilon = 0$), можно записать следующим образом

$${}^{(4)}ds^2 = e^{-\lambda} \left[(dx^0)^2 - \left(\frac{1}{4} a_T - (x^0)^2 \right) d\sigma^2 \right] - e^\lambda dr^2. \quad (81)$$

Отметим, что начальные значения всех величин задаются на начальном гиперцилиндре радиуса

$$R = \frac{\sqrt{a_T}}{2} e^{(\psi_0/\sqrt{3} - \lambda_0)/2},$$

относительно общей 5D метрики (80) при $x^0 = 0$.

3. Сферически-симметричные 5DG R-решения

3.1. Действие и лагранжиан для 5DG R-конфигураций

Оказывается, что теория 5DG R-конфигураций значительно содержательнее теории 5DG T-конфигураций. Поэтому, для описания и изучения множества построенных 5DG R-моделей, возникает необходимость построения классификаций их возможных типов.

Итак, рассмотрим так называемые “R-решения”, когда 5D метрика допускает времениподобный вектор Киллинга, который, в подходящей системе координат, имеет вид $\vec{\xi}_0 = \partial/\partial x^0$. Тогда метрические функции f, h, R и полевые величины ψ, E зависят только от радиальной координаты $x^1 = r$. Обозначая временную компоненту потенциала электромагнитного поля через $A_0 = \varphi$, для 4D метрики (14) и напряженности электрического поля (11) имеем

$${}^{(4)}ds^2 = f(r)(dx^0)^2 - h(r)dr^2 - R^2(r)d\sigma^2, \quad (82)$$

$$E = -A_{0,1} = -\varphi_{,r}. \quad (83)$$

В данном случае, действие (16), после интегрирования по x^0 , в пределах $-l/2 \leq x_0 \leq l/2$, принимает вид

$$S_R = \int dr \left\{ \frac{1}{\sqrt{fh}} \left[2R_{,r}(fR)_{,r} + \frac{1}{2} R^2 e^{-\epsilon\sqrt{3}\psi} \varphi_{,r}^2 - \frac{1}{2} R^2 f \psi_{,r}^2 \right] + 2\sqrt{fh} \right\}. \quad (84)$$

Для ортогонализации этого действия, перейдем к новым полевым переменным:

$$f = e^\nu, \quad h = N^2 e^{-\nu}, \quad R^2 = e^{\omega - \nu}. \quad (85)$$

Тогда 4D метрику (82) и действие (84) можно переписать следующим образом

$${}^{(4)}ds^2 = e^\nu (dx^0)^2 - e^{-\nu} (N^2 dr^2 + e^\omega d\sigma^2), \quad (86)$$

$$S_R = \int L_R dr = \int dr \left\{ \frac{1}{2N} \left(\omega_{,r}^2 - \nu_{,r}^2 + e^{-\nu - \epsilon\sqrt{3}\psi} \varphi_{,r}^2 - \psi_{,r}^2 \right) e^\omega + 2N \right\}. \quad (87)$$

Здесь L_R – лагранжиан рассматриваемой R-модели, который удобно представить в виде

$$L_R = N^{-1} \mathfrak{R} + 2N, \quad (88)$$

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2} e^\omega \left(\omega_{,r}^2 - \nu_{,r}^2 + e^{-\nu - \epsilon\sqrt{3}\psi} \varphi_{,r}^2 - \psi_{,r}^2 \right). \quad (89)$$

Введенный лагранжиан описывает вырожденную динамическую систему с координатой r , в качестве эволюционной переменной. К нему применим метод, используемый для аналогичной лагранжевой системы в T-модели раздела 2 со временем, в качестве эволюционной координаты. Поэтому, следуя этому разделу, мы сразу строим геодезическое действие в КП и соответствующее уравнение ЭГЯ.

Из лагранжиана (88) вытекает связь

$$\frac{\partial L_R}{\partial N} = -N^{-2} \mathfrak{R} + 2 = 0. \quad (90)$$

Разрешая её относительно N , получаем

$$N = \sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{2}}. \quad (91)$$

Полученное выражение позволяет исключить лагранжев множитель N из лагранжиана (88), что, в результате, приводит к новому лагранжиану $L_{\mathfrak{R}} = 2\sqrt{2\mathfrak{R}}$. Вследствие этого, приходим к геодезическому действию

$$S_{\mathfrak{R}} = S_R|_{(N=\sqrt{\mathfrak{R}/2})} = 2 \int dr \sqrt{2\mathfrak{R}} = 2 \int dr \sqrt{e^\omega \left(\omega_{,r}^2 - \nu_{,r}^2 + e^{-\nu - \epsilon\sqrt{3}\psi} \varphi_{,r}^2 - \psi_{,r}^2 \right)}, \quad (92)$$

как значению действия S_R (87) на связи (90). Указанная процедура, для данной системы, позволяет перейти от исходного действия к геодезическому действию в КП:

$$S_{\mathfrak{R}} = 2 \int \sqrt{e^\omega \left(d\omega^2 - d\nu^2 + e^{-\nu - \epsilon\sqrt{3}\psi} d\varphi^2 - d\psi^2 \right)} = 2 \int d\Omega_{\mathfrak{R}}, \quad (93)$$

где

$$d\Omega_{\mathfrak{R}}^2 = G_{AB} dq^A dq^B = e^\omega \left(d\omega^2 - d\nu^2 + e^{-\nu - \epsilon\sqrt{3}\psi} d\varphi^2 - d\psi^2 \right) > 0 \quad (94)$$

– метрика КП полевых переменных $q^A = \{\omega, \nu, \varphi, \psi\}$. Можно показать, что уравнения геодезических, которые следуют из полученной метрики, вместе со связью эквивалентны уравнениям Эйнштейна. Их можно найти из уравнения ЭГЯ для геодезического действия (93):

$$e^{-\omega} \left(\left(\frac{\partial S_{\mathfrak{R}}}{\partial \omega} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_{\mathfrak{R}}}{\partial \nu} \right)^2 + e^{\nu + \epsilon\sqrt{3}\psi} \left(\frac{\partial S_{\mathfrak{R}}}{\partial \varphi} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_{\mathfrak{R}}}{\partial \psi} \right)^2 \right) = 4. \quad (95)$$

К этому же выражение также приходим при каноническом подходе из гамильтоновой связи (90), как уравнению Гамильтона-Якоби.

3.2. Полный интеграл уравнения ЭГЯ для 5DG R-конфигураций и их типы

Для построения решения уравнения ЭГЯ перепишем (95) в терминах разделяющихся переменных. С этой целью выполним ортогональное преобразование

$$\begin{cases} \nu = \frac{1}{n^2} (\xi - \epsilon\sqrt{3}\eta) , \\ \psi = \frac{1}{n^2} (\epsilon\sqrt{3}\xi + \eta) , \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = \nu + \epsilon\sqrt{3}\psi , \\ \eta = -\epsilon\sqrt{3}\nu + \psi , \end{cases} \quad (96)$$

где n определено формулой (38). В результате этого преобразования "кинетическую часть" (89) лагранжиана (88) можно переписать следующим образом

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{2} e^\omega \left(\omega_{,r}^2 + e^{-\xi} \varphi_{,r}^2 - \frac{1}{n^2} \eta_{,r}^2 - \frac{1}{n^2} \xi_{,r}^2 \right). \quad (97)$$

При этом, метрика КП (94) принимает вид

$$(d\Omega_{\mathfrak{K}})^2 = e^\omega \left(d\omega^2 + e^{-\xi} d\varphi^2 - \frac{1}{n^2} d\eta^2 - \frac{1}{n^2} d\xi^2 \right). \quad (98)$$

Эта метрика допускает два вектора Киллинга

$$\vec{\xi}_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \vec{\xi}_\eta = \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (99)$$

Им соответствуют законы сохранения уравнений геодезической для метрики (98):

$$q = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 2U_\varphi = 2e^{\omega-\xi} \frac{d\varphi}{d\Omega_{\mathfrak{K}}}, \quad g = \frac{\partial S}{\partial \eta} = 2U_\eta = \frac{2}{n^2} e^\omega \frac{d\eta}{d\Omega_{\mathfrak{K}}}, \quad (100)$$

где $U^A = dq^A/d\Omega_{\mathfrak{K}}$ – обобщенные скорости.

Кроме этого, метрика (98) допускает два тензора Киллинга, которые, в базисе касательных векторов $\partial/\partial q^A$, имеют следующее представление:

$$\hat{A}_R = n^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \otimes \frac{\partial}{\partial \xi} - e^\xi \frac{\partial}{\partial \varphi} \otimes \frac{\partial}{\partial \varphi} + n^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \otimes \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (101)$$

$$\hat{B}_R = n^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \otimes \frac{\partial}{\partial \xi} - e^\xi \frac{\partial}{\partial \varphi} \otimes \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (102)$$

Им соответствуют квадратичные законы сохранения геодезических

$$\frac{a_R}{4} = n^2 U_\xi^2 - e^\xi U_\varphi^2 + n^2 U_\eta^2 = const, \quad \frac{b_R}{4} = n^2 U_\xi^2 - e^\xi U_\varphi^2 = const. \quad (103)$$

В результате преобразования (96) уравнение ЭГЯ (95) принимают вид уравнения с явно разделяющимися переменными:

$$\left(\frac{\partial S_{\mathfrak{K}}}{\partial \omega} \right)^2 + e^\xi \left(\frac{\partial S_{\mathfrak{K}}}{\partial \varphi} \right)^2 - n^2 \left(\frac{\partial S_{\mathfrak{K}}}{\partial \xi} \right)^2 - n^2 \left(\frac{\partial S_{\mathfrak{K}}}{\partial \eta} \right)^2 - 4e^\omega = 0. \quad (104)$$

В зависимости от способа разделения переменных, возможны различные представления решения этого уравнения. Легко видеть, что сумма второго, третьего и четвертого слагаемых в (104) соответствует первому квадратичному закону сохранения в (103) и равна константе a_R .

Из уравнения ЭГЯ (104) следует, что его решение можно искать в виде

$$S_{\mathfrak{K}} = q\phi + g\eta + Y_R(\omega) + Z_R(\xi),$$

где q и g – константы, имеющие смысл электрического и скалярного зарядов. Подставляя это выражение в уравнение (ЭГЯ) и выбирая a_R в качестве постоянной разделения, получаем

$$n^2 \left(\frac{dZ_R(\xi)}{d\xi} \right)^2 + n^2 g^2 - q^2 e^\xi = \left(\frac{dY_R(\omega)}{d\omega} \right)^2 - 4e^\omega = a_R, \quad (105)$$

Мы видим, что первые два выражения этих соотношений для R-решений, в отличие от аналогичных соотношений (42) для T-решения, не являются положительно определёнными. Поэтому постоянная разделения a_R не является знакоопределённой, что обуславливает множество решений.

Соотношения (105) приводит к следующему полному интегралу уравнения (104):

$$S_{\mathfrak{A}1}(\omega, \varphi, \xi, \eta; q, g, a_R) = q\varphi + g\eta + \int \sqrt{a_R + 4e^\omega} d\omega + \frac{1}{n} \int \sqrt{a_R - n^2 g^2 + q^2 e^\xi} d\xi, \quad (106)$$

Далее отметим, что сумма второго и третьего слагаемого в уравнении (104) соответствует второму квадратичному закону сохранения в (103) и равна константе b_R . Выбирая b_R в качестве постоянной разделения, получаем полный интеграл уравнения ЭГЯ в форме:

$$S_{\mathfrak{A}2}(\omega, \varphi, \xi, \eta; q, g, b_R) = q\varphi + g\eta + \int \sqrt{b_R + n^2 g^2 + 4e^\omega} d\omega + \frac{1}{n} \int \sqrt{b_R + q^2 e^\xi} d\xi. \quad (107)$$

Постоянные разделения a_R и b_R связаны соотношением

$$a_R = b_R + n^2 g^2. \quad (108)$$

В дальнейшем, удобно будет использовать также постоянную

$$m^2 = b_R + q^2, \quad (109)$$

которую можно интерпретировать как квадрат массы полевой конфигурации.

Более симметричное представление полного интеграла уравнения ЭГЯ (104) получим, если с помощью соотношения (108) исключить постоянную g из решения (106), и перейти к другому набору постоянных разделения $\{q, a_R, b_R\}$:

$$S_{\mathfrak{A}3}(\omega, \varphi, \xi, \eta; q, a_R, b_R) = q\varphi + \frac{1}{n} \sqrt{a_R - b_R} \eta + \int \sqrt{a_R + 4e^\omega} d\omega + \frac{1}{n} \int \sqrt{b_R + q^2 e^\xi} d\xi. \quad (110)$$

Такое представления полного интеграла для 5DG CC R-конфигураций удобно для их классификации и выделения особых решений (см. разделы (3.3.4) и (3.3.5)). Найденные интегралы (106), (107), (110) определяет геодезические в КП переменных $\{\omega, \varphi, \xi, \eta\}$, а вместе с ними полевые конфигурации в пространстве-времени. В зависимости от соотношений между константами a_R , b_R и g возможны различные типы конфигураций. Отметим, что их классификация эквивалентна классификации геодезических в КП с метрикой (98).

Для построения этой классификации, учитывая (108), составим таблицы 1 и 2 областей NK ($K = 1, 2, \dots, 5$) и $N0K$ ($K = 1, 2, 3$) значений постоянных a_R, b_R , которые определяют существенно различные конфигурации при $g \neq 0$ и $g = 0$, соответственно. Согласно (109), области NK и $N0K$ соответствуют различным областям значений зарядов q , которые указаны в нижнем ряду приведенных таблиц. Варианты $N2$ с $b_R = 0$ и $N4$ с $a_R = 0$ определяют вырожденные решения. Случай $N02$, когда $g = a_R = b_R = 0$, описывает двойное вырождение.

Таблица 1.

$N1$	$N2$	$N3$	$N4$	$N5$
$n^2 g^2 < a_R < \infty$	$a_R = n^2 g^2$	$0 < a_R < n^2 g^2$	$a_R = 0$	$-\infty < a_R < 0$
$0 < b_R < \infty$	$b_R = 0$	$-n^2 g^2 < b_R < 0$	$b_R = -n^2 g^2$	$-\infty < b_R < -n^2 g^2$
$q^2 < m^2$	$q^2 = m^2$	$m^2 < q^2 < m^2 + n^2 g^2$	$q^2 = m^2 + n^2 g^2$	$m^2 + n^2 g^2 < q^2$

Области NK ($K = 1, \dots, 5$) значений постоянных разделения a_R, b_R , определяющих типы конфигураций при $g \neq 0$.

Таблица 2.

N01	N02	N03
$0 < a_R < \infty$	$a_R = 0$	$-\infty < a_R < 0$
$q^2 < m^2$	$q^2 = m^2$	$m^2 < q^2$

Области $N0K$ ($K = 1, 2, 3$) значений постоянных разделения a_R, b_R , определяющих типы конфигураций при $g = 0$.

Для наглядного представления соотношений между параметрами конфигураций, области значений постоянных a_R, b_R представлены на Рис. 1 в виде соответствующих отрезков $\{N1, N3, N5, N01, N03\}$ и точек $\{N2, N4, N02\}$ прямых $a_R = b_R + n^2 g^2$ (сплошная линия) и $a_R = b_R$ (пунктирная линия) на плоскости переменных $\{a_R, b_R\}$.

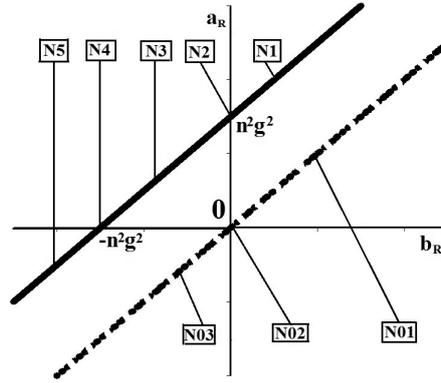


Рис. 1. Области значений NK ($K = 1, 2, \dots, 5$) и $N0K$ ($K = 1, 2, 3$) постоянных разделения (смотрите таблицы 1 и 2) в плоскости переменных $\{a_R, b_R\}$. Сплошная линия соответствует конфигурациям с $g \neq 0$, пунктирная – конфигурациям с $g = 0$.

Чтобы получить уравнения траекторий, про дифференцируем действие (110) по постоянным q, a_R, b_R и приравняем их новым константам. В результате, получаем систему

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S_{\mathfrak{R}3}}{\partial q} &= \varphi + \frac{q}{n} H_R(e^\xi) = C_q, \\
 \frac{\partial S_{\mathfrak{R}3}}{\partial a_R} &= \frac{1}{2n^2 g} \eta + \frac{1}{2} M_R(e^\omega) = C_a, \\
 \frac{\partial S_{\mathfrak{R}3}}{\partial b_R} &= -\frac{1}{2n^2 g} \eta + \frac{1}{2n} K_R(e^\xi) = C_b.
 \end{aligned} \tag{111}$$

Здесь $\{C_q, C_a, C_b\}$ – некоторые постоянные, а функции $\{M_R(e^\omega), K_R(e^\xi), H_R(e^\xi)\}$, в зависимости от знаков a_R и b_R , определяются следующими интегралами:

$$M_R(e^\omega) = \int \frac{d\omega}{\sqrt{a_R + 4e^\omega}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a_R}} \ln \left(\frac{\sqrt{a_R + 4e^\omega} - \sqrt{a_R}}{\sqrt{a_R + 4e^\omega} + \sqrt{a_R}} \right), & a_R > 0, & (a) \\ \frac{2}{\sqrt{-a_R}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a_R + 4e^\omega}{-a_R}} \right), & a_R < 0, & (b) \\ -e^{-\omega/2}, & a_R = 0; & (c) \end{cases} \tag{112}$$

$$K_R(e^\xi) = \int \frac{d\xi}{\sqrt{b_R + q^2 e^\xi}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b_R}} \ln \left(\frac{\sqrt{b_R + q^2 e^\xi} - \sqrt{b_R}}{\sqrt{b_R + q^2 e^\xi} + \sqrt{b_R}} \right), & b_R > 0, & (a) \\ \frac{2}{\sqrt{-b_R}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{b_R + q^2 e^\xi}{-b_R}} \right), & b_R < 0, & (b) \\ -\frac{2}{q} e^{-\xi/2}, & b_R = 0; & (c) \end{cases} \tag{113}$$

$$H_R(e^\xi) = \int \frac{e^\xi d\xi}{\sqrt{b_R + q^2 e^\xi}} = \begin{cases} \frac{2}{q^2} \sqrt{b_R + q^2 e^\xi}, & b_R \geq 0, & (a) \\ \frac{2}{q} e^{\xi/2}, & b_R = 0. & (b) \end{cases} \tag{114}$$

Далее, удобно представить систему (111) в виде

$$\begin{cases} \varphi + \frac{q}{n} H_R(e^\xi) & = C_q, \\ \eta + n^2 g M_R(e^\omega) & = 2n^2 g C_a, \\ n M_R(e^\omega) + K_R(e^\xi) & = 2n C_a + 2n C_b. \end{cases} \quad (115)$$

Отметим, что, в силу вырожденности исходной лагранжевой системы (88, 89), полученные уравнения определяет траектории геодезических в КП полевых переменных $\{\varphi, \xi, \eta, \omega\}$ независимо от эволюционной координаты r . Чтобы восстановить функциональную зависимость полевых переменных от r , найдем уравнение для полевой функции $\omega = \omega(r)$ из соотношений для импульса, сопряженного полевой переменной ω :

$$P_\omega = \frac{\partial L}{\partial \omega, r} = \frac{\partial S}{\partial \omega}. \quad (116)$$

Отсюда, учитывая (88, 89) и (106), приходим к уравнению

$$\frac{1}{N} e^\omega \frac{d\omega}{dr} = \sqrt{a_R + 4e^\omega}. \quad (117)$$

Выбирая калибровку $N = 1$, с точностью до несущественной постоянной, получаем

$$r = \int \frac{e^\omega d\omega}{\sqrt{a_R + 4e^\omega}} = \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{a_R + 4e^\omega}, & a_R \geq 0, \quad (a) \\ e^{\omega/2}, & a_R = 0. \quad (b) \end{cases} \quad (118)$$

Откуда следует

$$e^\omega(r) = \begin{cases} r^2 - \frac{a_R}{4}, & \left| \frac{\sqrt{a_R}}{4} \leq r < \infty, \right. & 0 \leq e^\omega < \infty, & a_R > 0, \quad (a) \\ r^2 - \frac{a_R}{4}, & -\infty < r < \infty, & -\frac{a_R}{4} < e^\omega < \infty, & a_R < 0, \quad (b) \\ r^2, & 0 \leq r < \infty, & 0 \leq e^\omega < \infty, & a_R = 0. \quad (c) \end{cases} \quad (119)$$

Здесь 2-я и 3-я колонки указывают области определения и значения функции $e^\omega(r)$, соответственно. В 4-ой колонке указана область значений параметра a_R , при которых эти условия выполняются.

Система уравнений (115) вместе с соотношениями (112-114) позволяет найти зависимость переменных $\{\varphi, \xi, \eta\}$ КП от e^ω , после чего формула (119) определяет зависимость их от радиальной координаты r .

Подставляя, соответствующее выражение e^ω из (119) в подходящую формулу (112), находим выражения для функции $M_R(r)$, в зависимости от области значения параметра a_R , :

$$M_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a_R}} \ln U_R, & a_R > 0, \quad (a) \\ \frac{2}{\sqrt{-a_R}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2r}{\sqrt{-a_R}} \right), & a_R < 0, \quad (b) \\ -\frac{1}{r}, & a_R = 0. \quad (c) \end{cases} \quad (120)$$

где

$$0 < U_R = \frac{r - \sqrt{a_R}/2}{r + \sqrt{a_R}/2} < 1. \quad (121)$$

При этом, 4-метрика (86) принимает следующие формы

$${}^{(4)}ds^2 = \begin{cases} e^\nu (dx^0)^2 - e^{-\nu} [dr^2 + (r^2 - \frac{a_R}{4}) d\sigma^2], & a_R \geq 0, \quad (a) \\ e^\nu (dx^0)^2 - e^{-\nu} [dr^2 + r^2 d\sigma^2], & a_R = 0. \quad (b) \end{cases} \quad (122)$$

Тогда, как 5D метрика для R-решения в теории КК ($\epsilon = 1$), согласно (8), имеет вид

$${}^{(5)}ds^2 = e^{\psi/\sqrt{3}} {}^{(4)}ds^2 - e^{-2\psi/\sqrt{3}} (dz + \varphi dx^0)^2. \quad (123)$$

Заметим, что случай $a_R < 0$ в (122) характерен для горловин. При этом $\min(e^\omega(r)) = -a_R/4 > 0$ достигается при $r = 0$.

Поскольку, в нашем рассмотрении область изменения координаты r не ограничена сверху, то возникает вопрос о поведении полевых переменных, зависящих от r , на пространственной бесконечности. Мы определим следующие асимптотические условия для величин $\{\nu, \psi, \omega, \varphi, \xi, \eta, U_R\}$ при $r \rightarrow \infty$:

$$e^\omega \rightarrow \infty, \quad \omega \rightarrow \infty, \quad \nu \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow 0, \quad \psi \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow 0, \quad U_R \rightarrow 1. \quad (124)$$

Тогда из формул (113, 114, 120) для функций K_R, H_R, M_R при $r \rightarrow \infty$ следует:

$$K_R \rightarrow K_{0R} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b_R}} \ln \left(\frac{m - \sqrt{b_R}}{m + \sqrt{b_R}} \right), & b_R > 0, \quad (a) \\ \frac{2}{\sqrt{-b_R}} \operatorname{arctg} \left(\frac{m}{\sqrt{-b_R}} \right), & b_R < 0, \quad (b) \\ -\frac{2}{q}, & b_R = 0; \quad (c) \end{cases} \quad (125)$$

$$H_R \rightarrow H_{0R} = \begin{cases} \frac{2m}{q^2}, & b_R \geq 0, \quad (a) \\ \frac{2}{q}, & b_R = 0; \quad (b) \end{cases} \quad (126)$$

$$M_R \rightarrow M_{0R} = \begin{cases} 0, & a_R > 0, \quad (a) \\ \frac{\pi}{\sqrt{-a_R}}, & a_R < 0, \quad (b) \\ 0, & a_R = 0. \quad (c) \end{cases} \quad (127)$$

Из условий (124-127) вытекает, что при $r \rightarrow \infty$ система (115) принимает вид:

$$\frac{q}{n} H_{0R} = C_q, \quad \frac{1}{2} M_{0R} = C_a, \quad \frac{1}{2n} K_{0R} = C_b. \quad (128)$$

Используя эти соотношения, исключим неизвестные постоянные C_q, C_a, C_b из уравнений траекторий (115). В результате получаем уравнения геодезической в неявном виде

$$\begin{cases} \varphi & = \frac{q}{n} (H_{0R} - H_R(e^\xi)), \\ \eta & = n^2 g (M_{0R} - M_R(e^\omega)), \\ n M_R(e^\omega) + K_R(e^\xi) & = n M_{0R} + K_{0R}. \end{cases} \quad (129)$$

Заметим, что вид функций, которые содержатся в этих уравнениях зависит от областей $N1 - N5, N01 - N03$, изображенных на Рис.1. Поэтому дальнейшее построение решений следует выполнять отдельно для каждой области.

3.3. Построение решений для 5DG R-конфигураций

3.3.1 Конфигурация N1 ($a_R > n^2 g^2, b_R > 0$)

В этом случае имеем $a_R > n^2 g^2, b_R = a_R - n^2 g^2 = m^2 - q^2 > 0$. Отсюда следует условие

$$q^2 < m^2. \quad (130)$$

Мы видим, что данная конфигурация является слабо заряженной, подобно заряженным ЧД ОТО. Согласно соотношениям (113а, 114а, 120а) и (125а, 126а, 127а), система (129) принимает вид

$$\varphi = \frac{2}{qn} \left(m - \sqrt{b_R + q^2 e^\xi} \right), \quad (131)$$

$$\eta = -\frac{n^2 g}{\sqrt{a_R}} \ln U_R, \quad (132)$$

$$\ln U_R^d + \ln \left(\frac{\sqrt{b_R + q^2 e^\xi} - \sqrt{b_R}}{\sqrt{b_R + q^2 e^\xi} + \sqrt{b_R}} \right) = \ln \left(\frac{m - \sqrt{b_R}}{m + \sqrt{b_R}} \right), \quad (133)$$

где введено обозначение

$$d = n \sqrt{\frac{b_R}{a_R}}. \quad (134)$$

Уравнения (131)-(134) определяют неявное решение исходной задачи в КП.

Выразим величины φ и e^ξ через функцию U_R . Для этого перепишем уравнение (133) следующим образом

$$\frac{\sqrt{b_R + q^2 e^\xi} - \sqrt{b_R}}{\sqrt{b_R + q^2 e^\xi} + \sqrt{b_R}} = V_R. \quad (135)$$

Здесь мы обозначили

$$V_R = \left(\frac{m - \sqrt{b_R}}{m + \sqrt{b_R}} \right) U_R^{-d} = \left(\frac{A - 1}{A + 1} \right) U_R^{-d}, \quad (136)$$

где

$$A = \frac{m}{\sqrt{b_R}}. \quad (137)$$

Отметим, что $0 < V_R < 1$. Разрешая уравнение (135) относительно e^ξ , получаем

$$e^\xi = \frac{4b_R}{q^2} \frac{V_R}{(1 - V_R)^2} = \frac{4b_R}{q^2} \left(V_R^{-1/2} - V_R^{1/2} \right)^{-2}, \quad (138)$$

откуда, учитывая формулу (136), находим

$$e^\xi = \frac{4b_R}{q^2} \left\{ \left[\frac{A - 1}{A + 1} U_R^{-d} \right]^{-1/2} - \left[\frac{A - 1}{A + 1} U_R^{-d} \right]^{1/2} \right\}^{-2}, \quad (139)$$

Далее, с помощью соотношений

$$\frac{A - 1}{A + 1} = \frac{q^2}{b_R} \frac{1}{(A + 1)^2} = \frac{b_R}{q^2} (A - 1)^2, \quad (140)$$

выражения для e^ξ (139) можно переписать следующим образом

$$e^\xi = \left\{ \frac{A + 1}{2} U_R^{d/2} - \frac{A - 1}{2} U_R^{-d/2} \right\}^{-2}. \quad (141)$$

Чтобы найти $\varphi = \varphi(U_R)$, подставим первое выражение для e^ξ из (138) в формулу (131), после чего воспользуемся вторым соотношением для V_R из (136). В результате, последовательно получаем

$$\varphi = \frac{2\sqrt{b_R}}{qn} \left(A - \frac{1 + V_R}{1 - V_R} \right) = \frac{2q}{n\sqrt{b_R}} \left(\frac{1 - U_R^d}{A - 1 - (A + 1)U_R^d} \right). \quad (142)$$

Найденное соотношение вместе с уравнениями (132, 141) определяют решение в терминах переменных $\{\eta, e^\xi, \varphi\}$.

Выразим теперь уравнения траекторий через исходную систему переменных $\{e^\nu, \psi, \varphi\}$. Используя (96) и (132, 141, 142), е получаем:

$$e^\nu = U_R^{\epsilon g \sqrt{3}/\sqrt{a_R}} \left\{ \frac{A + 1}{2} U_R^{d/2} - \left(\frac{A - 1}{2} \right) U_R^{-d/2} \right\}^{-2/n^2}, \quad (143)$$

$$\psi = \ln U_R^{-g/\sqrt{a_R}} \left\{ \frac{A + 1}{2} U_R^{d/2} - \left(\frac{A - 1}{2} \right) U_R^{-d/2} \right\}^{-2\epsilon\sqrt{3}/n^2}, \quad (144)$$

$$\varphi = \frac{2q}{n\sqrt{b_R}} \left(\frac{1 - U_R^d}{A - 1 - (A + 1)U_R^d} \right). \quad (145)$$

При этом, функции e^ω и U_R заданы в (119а) и (121), соответственно. Остальные величины выражаются через параметр $n = \pm\sqrt{1 + 3\epsilon^2}$, электрический q и скалярный g заряды, параметры разделения переменных a_R и b_R , а также зависимые величины: d (134), A (137) и параметр m (109), который можно интерпретировать как массу. Кроме этого, 4-метрика для пространств 5D КК ($\epsilon = 1$) и ОТО ($\epsilon = 0$) определяется формулой (122а).

3.3.2 Конфигурация N3 ($0 < a_R < n^2 g^2$, $-n^2 g^2 < b_R < 0$)

Из соотношений $0 < a_R < n^2 g^2$, $-n^2 g^2 < b_R < 0$ и формул (108), (109) вытекают неравенства

$$m^2 < q^2 < m^2 + n^2 g^2. \quad (146)$$

Таким образом, электрический заряд лежит в области $q^2 \in (m^2, m^2 + n^2 g^2)$. Левая часть приведенных неравенств соответствует суперэкстремально заряженным объектам (открытым сингулярностям) ОТО, в то время как правая часть неравенств описывает свойство электрически слабо заряженного, по отношению к сумме "гравитационного" (массы) и скалярного зарядов, объекта.

В данном случае система (129), согласно соотношениям (113b, 114a, 120a) и (125b, 126a, 127a), принимает вид

$$\varphi = \frac{2}{nq} \left(m - \sqrt{b_R + q^2 e^\xi} \right), \quad (147)$$

$$\eta = -\frac{n^2 g}{\sqrt{a_R}} \ln U_R, \quad (148)$$

$$\ln U_R^{\tilde{d}} + \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{b_R + q^2 e^\xi}{-b_R}} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{m}{\sqrt{-b_R}} \right), \quad (149)$$

где

$$\tilde{d} = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{-b_R}{a_R}}. \quad (150)$$

Система уравнений (147-149) определяют неявное решение исходной задачи в КП. Для того, чтобы построить явное решение задачи, перепишем уравнение (149) следующим образом

$$\operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{b_R + q^2 e^\xi}{-b_R}} \right) = W, \quad (151)$$

где мы обозначили

$$W = \operatorname{arctg} \left(\frac{m}{\sqrt{-b_R}} \right) - \ln U_R^{\tilde{d}}. \quad (152)$$

Из уравнения (151) вытекает

$$\sqrt{\frac{b_R + q^2 e^\xi}{-b_R}} = \operatorname{tg} W, \quad (153)$$

Отсюда следует:

$$e^\xi = \frac{-b_R}{q^2 \cos^2 W}. \quad (154)$$

Учитывая выражение W (152), в результате некоторых преобразований, получаем

$$e^\xi = \left(\cos \ln U_R^{\tilde{d}} + \frac{m}{\sqrt{-b_R}} \sin \ln U_R^{\tilde{d}} \right)^{-2}. \quad (155)$$

Далее, для нахождения φ , подставим в формулу (147) выражение e^ξ из (154). Это даёт

$$\varphi = \frac{2}{qn} \left(m - \sqrt{-b_R} \operatorname{tg} W \right). \quad (156)$$

Подставляя сюда W из (152), после ряда преобразований, находим

$$\varphi = \frac{2q}{n} \left(\frac{\sin \ln U_R^{\tilde{d}}}{\sqrt{-b_R} \cos \ln U_R^{\tilde{d}} + m \sin \ln U_R^{\tilde{d}}} \right). \quad (157)$$

Уравнения (148), (155), (157) определяют траектории системы в терминах полевых переменных $\{e^\xi, \eta, \varphi\}$ КП. Используя (96), найдем теперь уравнения траекторий через исходную систему величин e^ν, ψ, φ . В результате вычислений, мы приходим к следующим соотношениям:

$$e^\nu = U_R^{g\epsilon\sqrt{3/a_R}} \left(\cos \ln U_R^{\tilde{d}} + \frac{m}{\sqrt{-b_R}} \sin \ln U_R^{\tilde{d}} \right)^{-2/n^2}, \quad (158)$$

$$\psi = \ln \left[U_R^{-g/\sqrt{a_R}} \left(\cos \ln U_R^{\tilde{d}} + \frac{m}{\sqrt{-b_R}} \sin \ln U_R^{\tilde{d}} \right)^{-2\epsilon\sqrt{3}/n^2} \right], \quad (159)$$

$$\varphi = \frac{2q}{n} \left(\frac{\sin \ln U_R^{\tilde{d}}}{\sqrt{-b_R} \cos \ln U_R^{\tilde{d}} + m \sin \ln U_R^{\tilde{d}}} \right), \quad (160)$$

Здесь U_R и \tilde{d} задаются формулами (121) и (150), функция e^ω и 4-метрика (для пространств 5D КК ($\epsilon = 1$) и ОТО ($\epsilon = 0$)) определяются выражениями (119а) и (122а). Остальные величины выражаются через параметр $n = \pm\sqrt{1 + 3\epsilon^2}$, электрический заряд q , постоянные разделения a_R и b_R , а также зависимые величины: скалярный заряд g (108) и параметр m (109), который можно интерпретировать как массу конфигурации.

3.3.3 Конфигурация N5 ($a_R < 0$, $b_R < -n^2g^2$)

Соотношения, которые выполняются для данной конфигурации: $a_R = m^2 + n^2g^2 - q^2 < 0$, $b_R = a_R - n^2g^2 = m^2 - q^2 < -n^2g^2$ приводят к условию

$$q^2 > m^2 + n^2g^2. \quad (161)$$

Таким образом, конфигурацию можно трактовать, как суперэкстремально электрически заряженную по отношению к сумме "гравитационного"(массы) и скалярного зарядов.

Система (129), согласно соотношениям (113b, 114a, 120b) и (125b, 126a, 127b), в рассматриваемом случае приводит к следующему неявному решению исходной задачи в КП:

$$\varphi = \frac{2}{qn} \left(m - \sqrt{b_R + q^2e^\xi} \right), \quad (162)$$

$$\eta = \frac{2gn^2}{\sqrt{-a_R}} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{2r}{\sqrt{-a_R}} \right) \right], \quad (163)$$

$$\operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{b_R + q^2e^\xi}{-b_R}} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{m}{\sqrt{-b_R}} \right) + n\sqrt{\frac{b_R}{a_R}} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{2r}{\sqrt{-a_R}} \right) \right]. \quad (164)$$

Далее, следуя методу построения формул (151)-(155), перепишем последнее уравнение таким образом

$$\operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{b_R + q^2e^\xi}{-b_R}} \right) = \tilde{W}, \quad (165)$$

где

$$\tilde{W} = \operatorname{arctg} \left(\frac{m}{\sqrt{-b_R}} \right) + F \quad (166)$$

и

$$F = n\sqrt{\frac{b_R}{a_R}} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{2r}{\sqrt{-a_R}} \right) \right] = n\sqrt{\frac{b_R}{a_R}} \operatorname{arcctg} \left(\frac{2r}{\sqrt{-a_R}} \right). \quad (167)$$

Разрешая уравнение (165), относительно e^ξ и, учитывая (166), находим

$$e^\xi = -\frac{b_R}{q^2 \cos^2 \tilde{W}} = \left(\cos F - \frac{m}{\sqrt{-b_R}} \sin F \right)^{-2}. \quad (168)$$

Выражение для электрического потенциала φ (162), с учётом (168), может быть приведено к виду

$$\varphi = -\frac{2q}{n} \frac{\sin F}{\sqrt{-b_R} \cos F - m \sin F}. \quad (169)$$

Наконец, из (163), с учётом (167), находим

$$\eta = \frac{2gn^2}{\sqrt{-a_R}} \operatorname{arccctg} \left(\frac{2r}{\sqrt{-a_R}} \right) = \frac{2gn}{\sqrt{-b_R}} F. \quad (170)$$

Уравнения (168-170) описывают траекторию в полевых переменных $\{e^\xi, \eta, \varphi\}$ КП. Используя (96), выразим уравнения траекторий через исходные величины $\{e^\nu, \psi, \varphi\}$. Собирая полученные результаты, приходим к следующей системе уравнений, определяющих искомое решение:

$$e^\nu = \left(\cos F - \frac{m}{\sqrt{-b_R}} \sin F \right)^{-2/n^2} \exp \left(-\frac{2\epsilon g \sqrt{3}}{n \sqrt{-b_R}} F \right), \quad (171)$$

$$\psi = -\frac{2\epsilon \sqrt{3}}{n^2} \ln \left(\cos F - \frac{m}{\sqrt{-b_R}} \sin F \right) + \frac{2g}{n \sqrt{-b_R}} F, \quad (172)$$

$$\varphi = \frac{2q}{n} \frac{\sin F}{\sqrt{-b_R} \cos F - m \sin F}. \quad (173)$$

При этом функция e^ω и 4-метрика (для пространств 5D КК ($\epsilon = 1$) и ОТО ($\epsilon = 0$)) задаются формулами (119b) и (122a), а вспомогательная функция F – формулой (167). Остальные величины выражаются через параметр $n = \pm \sqrt{1 + 3\epsilon^2}$, электрический q и скалярный g (108) заряды, массу m (109), а также постоянные разделения a_R и b_R , которые удовлетворяют неравенствам $a_R < 0$, $b_R < -n^2 g^2$. Масса полевой конфигурации m и её заряды q и g удовлетворяют неравенству $q^2 > m^2 + n^2 g^2$.

Заметим, что в данном случае ($a_R < 0$) 4D пространство с метрикой в (122) содержит горловину. При этом $\min(e^\omega(r)) = -a_R/4 > 0$ достигается при $r = 0$. Если функция e^ν в (171), при подходящем наборе констант, окажется везде конечной, то пространство содержит проходимую кротовую нору [26], [27].

3.3.4 Конфигурация N2 с вырождением ($a_R = n^2 g^2$, $b_R = 0$)

Из соотношений $a_R = n^2 g^2$, $b_R = m^2 - q^2 = 0$, следует равенство

$$q^2 = m^2. \quad (174)$$

Таким образом, данная конфигурация N2 является экстремально заряженной, подобно экстремальным ЧД ОТО. Она является граничным случаем (правый и левый пределы) конфигураций N3 и N1 (см. Рис. 1).

Систему уравнений (129), согласно соотношениям (113с, 114b, 120a) и (125с, 126b, 127a), в рассматриваемом случае, учитывая $a_R = n^2 g^2$, можно переписать следующим образом:

$$\varphi = \frac{2}{n} \left(1 - e^{\xi/2} \right), \quad (175)$$

$$\eta = -n \ln \tilde{U}_R(r), \quad (176)$$

$$e^{-\xi/2} = 1 + \frac{q}{2g} \ln \tilde{U}_R. \quad (177)$$

Функции $\omega(r)$ и $U_R(r)$, которые определены в (119a) и (121), в рассматриваемом случае $a_R = n^2 g^2$, принимают вид:

$$e^\omega \rightarrow e^{\tilde{\omega}} = r^2 - \frac{n^2 g^2}{4}, \quad U_R \rightarrow \tilde{U}_R = \frac{r - ng/2}{r + ng/2}. \quad (178)$$

Формулы (175, 176, 177, 178) описывают систему в КП полевых переменных $\{\varphi, \xi, \eta, \omega\}$. Перепишем систему уравнений конфигурации в терминах полевых функций $\{\varphi(r), \xi(r), \eta(r), \omega(r)\}$ следующим образом:

$$\varphi = \frac{2q}{n} \left(\frac{\ln \tilde{U}_R}{2g + q \ln \tilde{U}_R} \right), \quad (179)$$

$$\eta = -n \ln \tilde{U}_R, \quad (180)$$

$$e^\xi = \left(1 + \frac{q}{2g} \ln \tilde{U}_R \right)^{-2}. \quad (181)$$

Наконец, с помощью формул (96), переходим к искомым полевым функциям $\{\nu(r), \psi(r), \omega(r), \varphi(r)\}$:

$$e^\nu = \tilde{U}_R^{\epsilon\sqrt{3}/n} \left(1 + \frac{q}{2g} \ln \tilde{U}_R \right)^{-2/n^2}, \quad (182)$$

$$\psi = \ln \left[\tilde{U}_R^{-1/n} \left(1 + \frac{q}{2g} \ln \tilde{U}_R \right)^{-2\epsilon\sqrt{3}/n^2} \right], \quad (183)$$

$$\varphi = \frac{2q}{n} \frac{\ln \tilde{U}_R}{2g + q \ln \tilde{U}_R}, \quad (184)$$

где $e^{\tilde{\omega}}$ и \tilde{U}_R определены в (178). Остальные величины выражаются через параметр $n = \pm\sqrt{1 + 3\epsilon^2}$, скалярный g и электрический заряды. В случае 5D КК ($\epsilon = 1$) и ОТО ($\epsilon = 0$), пространство-время, рассматриваемой вырожденной ($b_R = 0$), экстремально заряженной ($q = m$) конфигурация $N2$, согласно (122а), описывается 4-метрикой

$${}^{(4)}ds^2 = e^\nu (dx^0)^2 - e^{-\nu} \left[dr^2 + \left(r^2 - \frac{ng}{4} \right) d\sigma^2 \right]. \quad (185)$$

Значение $\epsilon = 1/\sqrt{3}$ соответствует низко энергетическому пределу теории суперструн.

3.3.5 Конфигурация $N4$ с вырождением ($a_R = 0$, $b_R = -n^2g^2$)

Из соотношений $a_R = m^2 + n^2g^2 - q^2 = 0$, $b_R = -n^2g^2 = m^2 - q^2$ вытекает условие

$$q^2 = m^2 + n^2g^2, \quad (186)$$

откуда следует, что данная конфигурация $N4$ по отношению к сумме "гравитационного" (массы) и скалярного зарядов является экстремально заряженной. Она является граничным случаем (правый и левый пределы) конфигураций $N5$ и $N3$ (см. Рис. 1).

Систему уравнений (129), согласно соотношениям (113b, 114a, 120c) и (125b, 126a, 127c), в рассматриваемом случае, учитывая $b_R = -n^2g^2$, можно переписать следующим образом:

$$\varphi = \frac{2}{qn} \left(m - \sqrt{q^2e^\xi - n^2g^2} \right), \quad (187)$$

$$\eta = \frac{gn^2}{r} = gn^2e^{-\omega/2}, \quad (188)$$

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{ng} \sqrt{q^2e^\xi - n^2g^2} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{m}{ng} \right) + \frac{\eta}{2}, \quad (189)$$

где функция $\omega = \omega(r)$ определена в (119c).

Далее действуем по схеме аналогичной пункту (3.3.2). Для этого перепишем уравнение (189) следующим образом

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{ng} \sqrt{q^2e^\xi - n^2g^2} \right) = G, \quad (190)$$

где введено обозначение

$$G = \frac{\eta}{2} + \operatorname{arctg} \left(\frac{m}{ng} \right). \quad (191)$$

Тогда, из уравнения (190) вытекает

$$e^\xi = \frac{n^2 g^2}{q^2} (1 + \tan^2 G). \quad (192)$$

Подставляя в эту формулу выражение для G из (191), находим

$$e^\xi = \left(\cos \frac{\eta}{2} - \frac{m}{ng} \sin \frac{\eta}{2} \right)^{-2}. \quad (193)$$

Чтобы найти φ , подставим e^ξ из (192) в формулу (187). В результате получаем

$$\varphi = \frac{2}{nq} (m - ng \operatorname{tg} G).$$

С учётом (191), это влечёт

$$\varphi = -\frac{2q}{n} \left(\frac{\sin \frac{\eta}{2}}{ng \cos \frac{\eta}{2} - m \sin \frac{\eta}{2}} \right). \quad (194)$$

Формулы (188), (193) и (194) определяют траектории системы в КП полевых переменных $\{\varphi, \xi, \eta, \omega\}$. С помощью формул (119с) и (188), уравнения траекторий можно переписать следующим образом

$$e^\omega = r^2, \quad \eta = \frac{gn^2}{r}, \quad (195)$$

$$\varphi = \frac{2q}{n} \left(\frac{\sin \left(\frac{gn^2}{2r} \right)}{ng \cos \left(\frac{gn^2}{2r} \right) + m \sin \left(\frac{gn^2}{2r} \right)} \right), \quad (196)$$

$$e^\xi = \left[\cos \left(\frac{gn^2}{2r} \right) + \frac{m}{ng} \sin \left(\frac{gn^2}{2r} \right) \right]^{-2}. \quad (197)$$

Эти формулы описывают конфигурацию в терминах полевых функций $\{\xi(r), \eta(r), \omega(r), \varphi(r)\}$. Наконец, с помощью формул (96), переходим к искомым полевым функциям $\{\nu(r), \psi(r), \omega(r), \varphi(r)\}$, описывающих рассматриваемую конфигурацию:

$$e^\omega = r^2, \quad (198)$$

$$\varphi = \frac{2q}{n} \left[\frac{\sin \left(\frac{gn^2}{2r} \right)}{ng \cos \left(\frac{gn^2}{2r} \right) + m \sin \left(\frac{gn^2}{2r} \right)} \right], \quad (199)$$

$$e^\nu = e^{-\epsilon\sqrt{3}g/r} \left[\cos \left(\frac{gn^2}{2r} \right) + \frac{m}{ng} \sin \left(\frac{gn^2}{2r} \right) \right]^{-2/n^2}, \quad (200)$$

$$\psi = -\frac{2\epsilon\sqrt{3}}{n^2} \ln \left[\cos \left(\frac{gn^2}{2r} \right) + \frac{m}{ng} \sin \left(\frac{gn^2}{2r} \right) \right] + \frac{g}{r}. \quad (201)$$

Свойства данной вырожденной ($a_R = 0$) конфигурации определяются её полевой массой m и скалярным зарядом g , а также параметром $n = \pm\sqrt{1 + 3\epsilon^2}$. Электрический заряд определяется формулой $q^2 = m^2 + n^2 g^2$. Согласно (122b), в случае конфигураций 5D КК ($\epsilon = 1$) и ОТО ($\epsilon = 0$), пространство-время описывается 4-метрикой

$${}^{(4)}ds^2 = e^\nu (dx^0)^2 - e^{-\nu} [dr^2 + r^2 d\sigma^2] \quad (202)$$

и содержит конформно плоские пространственные сечения.

3.3.6 Конфигурации с нулевым скалярным зарядом ($g = 0$)

Чтобы построить все 5DG R-конфигурации с нулевым скалярным зарядом и тем самым перечислить решения из таблицы 2, можно совершить предельный переход $g \rightarrow 0$ и $b_R \rightarrow a_R$ в полученных ранее решениях. Здесь мы построим искомые конфигурации исходя из приведённого уравнения ЭГЯ (104), когда $g = \partial S_{\mathfrak{R}}/\partial \eta = 0$. В этом случае уравнение (104) принимает вид

$$\left(\frac{\partial S_{\mathfrak{R}}}{\partial \omega}\right)^2 + e^\xi \left(\frac{\partial S_{\mathfrak{R}}}{\partial \varphi}\right)^2 - n^2 \left(\frac{\partial S_{\mathfrak{R}}}{\partial \xi}\right)^2 - 4e^\omega = 0. \quad (203)$$

Отсюда вытекает следующий полный интеграл:

$$S_{\mathfrak{R}}(\omega, \varphi, \xi; a_R) = q\varphi + \int \sqrt{a_R + 4e^\omega} d\omega + \frac{1}{n} \int \sqrt{a_R + q^2 e^\xi} d\xi, \quad (204)$$

откуда следует система

$$\begin{cases} \frac{\partial S_{\mathfrak{R}}}{\partial q} = \varphi + \frac{q}{n} H_R = c_q, \\ \frac{\partial S_{\mathfrak{R}}}{\partial a_R} = \frac{1}{2} M_R + \frac{1}{2n} K_R = c_a, \end{cases} \quad (205)$$

Здесь c_q, c_a – некоторые постоянные, функция M_R определена в (112), а функции K_R и H_R определяются интегралами:

$$K_R = \int \frac{d\xi}{\sqrt{a_R + q^2 e^\xi}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a_R}} \ln \left(\frac{\sqrt{a_R + q^2 e^\xi} - \sqrt{a_R}}{\sqrt{a_R + q^2 e^\xi} + \sqrt{a_R}} \right), & a_R > 0, & (a) \\ \frac{2}{\sqrt{-a_R}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a_R + q^2 e^\xi}{-a_R}} \right), & a_R < 0, & (b) \\ -\frac{2}{q} e^{-\xi/2}, & a_R = 0; & (c) \end{cases} \quad (206)$$

$$H_R = \int \frac{e^\xi d\xi}{\sqrt{a_R + q^2 e^\xi}} = \begin{cases} \frac{2}{q^2} \sqrt{a_R + q^2 e^\xi}, & a_R \geq 0, & (a) \\ \frac{2}{q} e^{\xi/2}, & a_R = 0. & (b) \end{cases} \quad (207)$$

Отметим, что соотношения (119 – 122) и асимптотические условия (124) сохраняют силу. Тогда, как для функций K_R, H_R при $r \rightarrow \infty$ следует:

$$K_R \rightarrow K_{0R} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a_R}} \ln \left(\frac{m - \sqrt{a_R}}{m + \sqrt{a_R}} \right), & a_R > 0, & (a) \\ \frac{2}{\sqrt{-a_R}} \operatorname{arctg} \left(\frac{m}{\sqrt{-a_R}} \right), & a_R < 0, & (b) \\ -\frac{2}{q}, & a_R = 0; & (c) \end{cases} \quad (208)$$

$$H_R \rightarrow H_{0R} = \begin{cases} \frac{2m}{q^2}, & a_R \geq 0, & (a) \\ \frac{2}{q}, & a_R = 0. & (b) \end{cases} \quad (209)$$

Здесь

$$m^2 = a_R + q^2, \quad (210)$$

где постоянную m можно интерпретировать как массу полевой конфигурации. Функция M_R имеет асимптотику вида (127).

Из условий (124-127) вытекает, что при $r \rightarrow \infty$ система (205) принимает вид:

$$\frac{q}{n} H_{0R} = C_q, \quad \frac{1}{2} M_{0R} + \frac{1}{2n} K_{0R} = C_a,$$

С помощью этих соотношений исключаем постоянные C_q, C_a из (205). В результате получаем

$$\varphi = \frac{q}{n} (H_{0R} - H_R), \quad (211)$$

$$M_R + \frac{1}{n} K_R = M_{0R} + \frac{1}{n} K_{0R}. \quad (212)$$

Наконец, учитывая $\eta = 0$, из формул (96) получаем

$$e^\nu = e^{\xi/n^2}, \quad \psi = \frac{\sqrt{3}\epsilon}{n^2}\xi. \quad (213)$$

Эти формулы позволяют построить конфигурации с $g = 0$ в терминах исходных величин $\{e^\nu, e^\omega, \psi, \varphi\}$. Построение явных решений выполняется отдельно для каждой из области ($N01, N02, N03$). Подчеркнём, что во всех случаях в решения входит параметр $n = \pm\sqrt{1+3\epsilon^2}$, где $\epsilon = 0$ для ОТО, $\epsilon = 1$ в 5D КК теории, значение $\epsilon = 1/\sqrt{3}$ соответствует низко энергетическому пределу теории суперструн.

Конфигурация N01 В этом случае $a_R = b_R > 0$, конфигурация является слабо заряженной: $q^2 < m^2$. Система уравнений (211) и (212) теперь принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2}{nq} \left(m - \sqrt{a_R + q^2 e^\xi} \right), \\ \ln U_R + \frac{1}{n} \ln \left(\frac{\sqrt{a_R + q^2 e^\xi} - \sqrt{a_R}}{\sqrt{a_R + q^2 e^\xi} + \sqrt{a_R}} \right) &= \frac{1}{n} \ln \left(\frac{m - \sqrt{a_R}}{m + \sqrt{a_R}} \right). \end{aligned}$$

Действуя аналогично методу изложенному в разделе N1 отсюда получаем

$$e^\xi = \left(\frac{A+1}{2} U_R^{n/2} - \frac{A-1}{2} U_R^{-n/2} \right)^{-2}, \quad (214)$$

$$\varphi = \frac{2q}{n\sqrt{a_R}} \left(\frac{1 - U_R^n}{A - 1 - (A+1)U_R^n} \right), \quad (215)$$

где

$$A = \frac{m}{\sqrt{a_R}}.$$

Далее, используя соотношения (213) и (119), находим

$$e^\nu = \left(\frac{A+1}{2} U_R^{n/2} - \frac{A-1}{2} U_R^{-n/2} \right)^{-2/n^2}, \quad (216)$$

$$\psi = -\frac{2\epsilon\sqrt{3}}{n^2} \ln \left(\frac{A+1}{2} U_R^{n/2} - \frac{A-1}{2} U_R^{-n/2} \right), \quad (217)$$

$$\varphi = \frac{2q}{n\sqrt{a_R}} \left(\frac{1 - U_R^n}{A - 1 - (A+1)U_R^n} \right), \quad \eta = 0. \quad (218)$$

Функции e^ω и U_R определены в (119а) и (121), соответственно. Остальные величины выражаются через параметр $n = \pm\sqrt{1+3\epsilon^2}$, электрический заряд q , постоянную разделения a_R , а также зависящие величины $A = m/\sqrt{a_R}$ и массу $m = \sqrt{a_R + q^2}$. Для пространств 5D КК ($\epsilon = 1$) и ОТО ($\epsilon = 0$) 4-метрика определяется формулой (122а).

Конфигурация N02, двойное вырождение В этом случае $a_R = b_R = n^2 g^2 = m^2 - q^2 = 0$. Конфигурация является экстремально электрически заряженной: $q^2 = m^2$.

Система уравнений (211) и (212) принимает вид

$$\varphi = \frac{2}{n} \left(1 - e^{\xi/2} \right), \quad e^{-\xi/2} = 1 - \frac{qn}{2r}. \quad (219)$$

Далее, с помощью соотношений (213) и (119), переходим к исходным полевым функциям:

$$e^\nu = \left(1 - \frac{qn}{2r} \right)^{-2/n^2}, \quad (220)$$

$$\psi = -\frac{2\epsilon\sqrt{3}}{n^2} \ln \left(1 - \frac{qn}{2r} \right), \quad (221)$$

$$\varphi = \frac{q}{qn/2 - r}, \quad e^\omega = r^2. \quad (222)$$

Свойства данной дважды вырожденной ($a_R = b_R = 0$), экстремально заряженной конфигурации определяются электрическим зарядом $q = \pm m$, а также параметром $n = \pm\sqrt{1 + 3\epsilon^2}$. Её геометрия, в случае 5D КК ($\epsilon = 1$) и ОТО ($\epsilon = 0$), согласно 4-метрики (122b), является пространственно конформно плоской.

Конфигурация N03 В этом случае $b_R = a_R = m^2 - q^2 < 0$. Конфигурация является суперэкстремально электрически заряженной $q^2 > m^2$. Система уравнений (211) и (212) принимает вид

$$\varphi = \frac{2}{nq} \left(m - \sqrt{a_R + q^2 \epsilon^\xi} \right), \quad (223)$$

$$\arctg \left(\sqrt{\frac{a_R + q^2 \epsilon^\xi}{-a_R}} \right) = \tilde{W} = \arctg \left(\frac{m}{\sqrt{-a_R}} \right) + n \left[\frac{\pi}{2} - \arctg \left(\frac{2r}{\sqrt{-a_R}} \right) \right]. \quad (224)$$

По аналогии с разделом N5 отсюда получаем

$$\varphi = -\frac{2q}{n} \left(\frac{\sin F}{\sqrt{-a_R} \cos -m \sin F} \right), \quad (225)$$

$$e^\xi = \left(\cos F - \frac{m}{\sqrt{-a_R}} \sin F \right)^{-2}. \quad (226)$$

Наконец, с помощью соотношений (213) и (119), переходим к исходным полевым переменным

$$e^\nu = \left(\cos F - \frac{m}{\sqrt{-a_R}} \sin F \right)^{-2/n^2}, \quad (227)$$

$$\psi = \frac{-2\epsilon\sqrt{3}}{n^2} \ln \left(\cos F - \frac{m}{\sqrt{-a_R}} \sin F \right), \quad (228)$$

$$\varphi = -\frac{2q}{n} \left(\frac{\sin F}{\sqrt{-a_R} \cos -m \sin F} \right), \quad (229)$$

$$e^\omega = r^2 - \frac{a_R}{4}, \quad \eta = 0. \quad (230)$$

Функция e^ω и 4-метрика (для пространств 5D КК ($\epsilon = 1$) и ОТО ($\epsilon = 0$)) задаются формулами (119b) и (122a), а вспомогательная функция F – формулой (167) при $b_R = a_R$. Остальные величины выражаются через параметры a_R и $n = \pm\sqrt{1 + 3\epsilon^2}$, электрический заряд q и массу $m = \sqrt{a_R + q^2}$.

Заключение

В работе показаны эффективность и удобство применение метода Гамильтона-Якоби при нахождении решений полевых уравнений для систем с одной эволюционной координатой и, в частности, для построения сферически-симметричных T- и R-конфигураций уравнений 5DG КК теории с вырожденным лагранжианом. При этом, прозрачнее становится внутренняя дифференциально-геометрическая структура КП, а также физическое содержание моделей.

Отметим, что модификация исходного лагранжиана (7), путем формальной подстановки параметра ϵ в экспоненту, определяющую тип контактного взаимодействия между скалярным и электромагнитным полями, привела нас к 5DG КК моделям. Это позволило единообразно строить полевые конфигурации ОТО ($\epsilon = 0$), 5D КК теории ($\epsilon = 1$), а также моделей в низко энергетическом пределе теории суперструн ($\epsilon = 1/\sqrt{3}$).

При использовании метода Гамильтона-Якоби для систем с вырожденным лагранжианом, сначала удобно перейти в КП с надлежащий псевдоримановой суперметрикой. В этом пространстве искомым конфигурациям соответствуют траектории геодезических. В результате, при непосредственном решении уравнения Гамильтона-Якоби, мы получаем неявную форму геодезических в КП. Попутно, с нахождением суперметрики, возникает возможность изучить дифференциально-геометрическую структуру КП, найти его векторы и тензоры Киллинга, построить соответствующие законы сохранения геодезических в КП, вычислить тензор кривизны КП. Оказывается, что в

случае полевых конфигураций ОТО ($\epsilon = 0$), когда скалярное поле отсутствует, тензор кривизны КП равен нулю [22]. Это значит, что КП локально плоское и мы можем ввести псевдо-декартовы координаты так, что метрика КП приводится к псевдо-декартову виду, а геодезические описывают прямолинейное движение в КП. В итоге, действие можно привести к сумме действий для соответствующих невзаимодействующих мод. Для конфигураций ОТО и 5D КК теории ($\epsilon = 0, 1$) со скалярным полем это осуществить невозможно. Здесь тензор кривизны не обращается в ноль, а КП имеет конформно плоскую суперметрику.

Применение метода Гамильтона-Якоби для R - и T -конфигураций имеет свою специфику. В случае T -решений, при переходе в координатное пространство и восстановлении временной зависимости, решалась задача Коши с начальными данными на начальном гиперцилиндре радиуса

$$R = \frac{\sqrt{a_T}}{2} e^{(\psi_0/\sqrt{3}-\lambda_0)/2},$$

при $x^0 = 0$. Здесь a_T – постоянная разделения уравнения Гамильтона-Якоби (41), ψ_0 и λ_0 – начальные значения полевых переменных ψ и λ в действии (22).

Для R -конфигураций, где в качестве эволюционного параметра используется радиальная координата, мы задавали поведение полей на пространственной бесконечности. Кроме этого, оказывается, что множество R -решений гораздо содержательнее T -решений. Это приводит к целесообразности построения классификации геодезических в КП и соответствующих конфигураций (см. таблицы 1, 2 и рис. 1), а также проведения их краткого сравнительного анализа. Элементы этой классификации наглядно можно представить в виде точек на “массовой” прямой, содержащей две базовые точки m^2 и $m^2 + n^2 g^2$. Помещая q^2 в какую-либо точку последовательно, принадлежащую всем 5 неэквивалентным областям на этой прямой, получаем состояния:

$$q^2 < m^2 \mid m^2 = q^2 \mid m^2 < q^2 < m^2 + n^2 g^2 \mid m^2 + n^2 g^2 = q^2 \mid m^2 + n^2 g^2 < q^2,$$

которым отвечают конфигурации $N1, N2, N3, N4, N5$ таблицы 1. Причем, знак “=” используется при совпадении с базовыми точками и знак “<”, когда значение q^2 попадает между ними или за их пределами. Случаи $N2$ с $m^2 = q^2$ и $N4$ с $m^2 + n^2 g^2 = q^2$ представляют вырожденные конфигурации. При $g = 0$, согласно таблицы 2, получаем 3 типа: $q^2 < m^2$, $m^2 = q^2$, $m^2 < q^2$. Здесь, конфигурация $N02$ с $m^2 = q^2$, в рамках нашей классификации, является дважды вырожденной.

Отметим также, что для конфигураций $N5$ с $m^2 + n^2 g^2 < q^2$ получается, что $a_R = m^2 + n^2 g^2 - q^2 < 0$ и 4D пространство с метрикой в (122) содержит горловину. При этом $\min(e^\omega(r)) = -a_R/4 > 0$ достигается при $r = 0$. Более подробное обсуждение свойств построенных конфигураций будет приведено в последующей публикации.

Список литературы

1. Владимиров Ю.С. *Классическая теория гравитации*. М.: Книжный дом “Либроком”, 2009. 264 с.
2. Wesson P.S. *Space, time, matter. Modern Kaluza-Klein theory*. Singapore: World Scientific, 2000. 217 p.
3. Wesson P.S. *Five-dimensional physics. Classical and quantum consequences of Kaluza-Klein cosmology*. Singapore: World Scientific, 2006. 220 p.
4. Matos T., Nunez D., Estevez G., Rios M. Rotating 5D-Kaluza-Klein Space-Times from Invariant Transformations. *General Relativity and Gravitation*, 2000, 32, no. 8, pp. 1499–1525.
5. Guzman F.S., Matos T. Scalar fields as dark matter in spiral galaxies. *Classical and Quantum Gravity*, 1999, 17, pp. L9–L16.
6. Nandi K.K., Valitov I., Migranov N.G. Remarks on the spherical scalar field halo in galaxies. *Physical Review D*, 2009, 80, pp. 047301-1-4.
7. Matos T., Guzman F.S., Urena-Lopez L.A. Scalar field as dark matter in the universe. *Classical and Quantum Gravity*, 2000, 17, pp. 1707–1712.

8. Kramer Von D., Neugebauer G. Eine Methode zur Konstruktion stationärer Einstein-Maxwell-Felder. *Annalen der Physik*, 1969, Band 24, pp. 59-71.
9. Maison D. Ehlers-Harrison-Type Transformations for Jordan's Extended Theory of Gravitation. *General Relativity and Gravitation*, 1979, 10, no. 8, pp. 717-723.
10. Clément G. Solutions of Five-Dimensional General Relativity without Spatial Symmetry. *General Relativity and Gravitation*, 1986, 18, no. 8, pp. 861-877.
11. Cvetic M., Youm D. All the Four-Dimensional Static, Spherically Symmetric Solutions of Abelian Kaluza-Klein Theory. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, 75, pp. 4165-4168.
12. Dobiash P., Maison D. Stationary, Spherically Symmetric Solutions of Jordan's Unified Theory of Gravity and Electromagnetism. *General Relativity and Gravitation*, 1982, 14, no. 3, pp. 231-242.
13. Rasheed D. The rotating dyonic black holes of Kaluza-Klein theory. *Nucl. Phys.*, 1995, B454, pp. 379-401.
14. Бронников К.А., Шикин Г.Я. О взаимодействующих полях в общей теории относительности. *Известия вузов СССР. Физика*. 1977. № 9. С. 25-30.
15. Бронников К.А., Шикин Г.Я. *Модели самогравитирующих частиц с классическими полями и их устойчивость*. Итоги науки и техники. Сер. Классическая теория поля и теория гравитации. Т. 2.: Гравитация и космология. М.: ВИНТИ, 1991. С. 4-55.
16. Гладуш В.Д. Статическое сферически-симметричное решение для взаимодействующих скалярного, электромагнитного и гравитационного полей. *Известия вузов СССР. Физика*. 1980. № 3. С. 74-80.
17. Chodos A., Detweiler S. Spherically Symmetric Solutions in Five-Dimensional General Relativity. *General Relativity and Gravitation*, 1982, 14, no. 10, pp. 879-890.
18. Azure-Ainou M., Clément G., Constantinidis C.P., Fabris J.C. Electrostatic Solutions in Kaluza-Klein Theory: Geometry and Stability. *Journal Gravitation and Cosmology*, 2000, 6, no. 3 (23), pp. 207-218.
19. Гладуш В.Д. Пятимерная теория взаимодействующих скалярного, электромагнитного и гравитационного полей. *Известия вузов СССР. Физика*. 1979. № 11. С. 58-65.
20. Бронников К.А., Рубин С.Г. *Лекции по гравитации и космологии*. М.: МИФИ, 2008. 460 с.
21. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика*. М.: Наука, 1988. Т. 1. 216 с.
22. Гладуш В.Д., Головкин М. Г. Пространственно-временное и конфигурационное многообразия сферически-симметричной системы гравитационного и электромагнитного полей. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2018. № 2. С. 28-48.
23. Barbour J., Foster B., Murchadha N. Relativity without relativity. *Classical and Quantum Gravity*, 2002, 19, pp. 3217-3248.
24. Kiefer C. *Quantum Gravity*. New York: Oxford University Press, 2007. 375 p.
25. Anderson E. The problem of time and quantum cosmology in the relational particle mechanics arena. *arXiv:1111.1472 [gr-qc]*.
26. Morris M.S., Thorne K.S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *American Journal of Physics*, 1988, 56, pp. 395-412.
27. Visser M. *Lorentzian wormholes - from Einstein to Hawking*. New York: AIP Press, 1995. 486 p.

References

1. Vladimirov Yu.S. *Classical theory of gravity*. Moscow, Knizhnyj dom Librokom Publ., 2009. 264 p. (in Russ.)
2. Wesson P.S. Space, time, matter. Modern Kaluza-Klein theory. Singapore, World Scientific, 2000. 217 p.
3. Wesson P.S. Five-dimensional physics. Classical and quantum consequences of Kaluza-Klein cosmology. Singapore, World Scientific, 2006. 220 p.
4. Matos T., Nunez D., Estevez G., Rios M. Rotating 5D-Kaluza-Klein Space-Times from Invariant Transformations. *General Relativity and Gravitation*, 2000, 32, no. 8, pp. 1499-1525.
5. Guzman F.S., Matos T. Scalar fields as dark matter in spiral galaxies. *Classical and Quantum Gravity*, 1999, 17, pp. L9-L16.
6. Nandi K.K., Valitov I., Migranov N.G. Remarks on the spherical scalar field halo in galaxies. *Physical Review D*, 2009, 80, pp. 047301-1-4.

7. Matos T., Guzman F.S., Urena-Lopez L.A. Scalar field as dark matter in the universe. *Classical and Quantum Gravity*, 2000, 17, pp. 1707–1712.
8. Kramer Von D., Neugebauer G. Eine Methode zur Konstruktion stationärer Einstein-Maxwell-Felder. *Annalen der Physik*, 1969, Band 24, pp. 59–71.
9. Maison D. Ehlers-Harrison-Type Transformations for Jordan's Extended Theory of Gravitation. *General Relativity and Gravitation*, 1979, 10, no. 8, pp. 717–723.
10. Clément G. Solutions of Five-Dimensional General Relativity without Spatial Symmetry. *General Relativity and Gravitation*, 1986, 18, no. 8, pp. 861–877.
11. Cvetic M., Youm D. All the Four-Dimensional Static, Spherically Symmetric Solutions of Abelian Kaluza-Klein Theory. *Phys.Rev.Lett*, 1995, 75, pp. 4165–4168.
12. Dobiasch P., Maison D. Stationary, Spherically Symmetric Solutions of Jordan's Unified Theory of Gravity and Electromagnetism. *General Relativity and Gravitation*, 1982, 14, no. 3, pp. 231–242.
13. Rasheed D. The rotating dyonic black holes of Kaluza-Klein theory. *Nucl. Phys.*, 1995, B454, pp. 379–401.
14. Bronnikov K., Shikin G. *Interacting fields in general relativity. Izvestiya vuzov SSSR. Fizika*, 1977, no. 9, pp. 25–30. (in Russ.)
15. Bronnikov K.A., Shikin G.Ya. *Models of self-gravitating particles with classical fields and their stability Results of Science and Technology. Ser. Classical field theory and gravity theory. V. 2 : Gravity and cosmology.* Moscow, VINITI Publ., 1991. pp. 4–55. (in Russ.)
16. Gladush V.D. Static spherically symmetric solution for interacting scalar, electromagnetic and gravitational fields. *Sov. Phys. J.*, 1980, vol. 23, no. 3, p. 240.
17. Chodos A., Detweiler S. Spherically Symmetric Solutions in Five-Dimensional General Relativity. *General Relativity and Gravitation*, 1982, vol. 14, no. 10, pp. 879–890.
18. Azure-Ainou M., Clement G., Constantinidis C.P., Fabris J.C. Electrostatic Solutions in Kaluza-Klein Theory: Geometry and Stability. *Journal Gravitation and Cosmology*, 2000, vol. 6, no. 3 (23), pp. 207–218.
19. Gladush V.D. Five-dimensional theory of interacting scalar, electromagnetic and gravitational fields. *Sov. Phys. J.*, 1979, vol. 22., no. 11, pp. 1172–1178.
20. Bronnikov K.A., Rubin S.G. *Lectures on gravity and cosmology.* Moscow, MIFI Publ., 2008. 460 p. (in Russ.)
21. Landau L.D. Lifshic E.M. *Theoretical Physics. Textbook in 10 volumes, Vol.1. Mechanics.* Moscow, Nauka Publ., 1988. 216 p. (in Russ.)
22. Gladush V.D., Golovko M.G. Space time and configuration manifolds of a spherically symmetric system of gravitational and electromagnetic fields. *Space, time and fundamental interactions*, 2018, no. 2, pp. 28–48. (in Russ.)
23. Barbour J., Foster B., Murchadha N. Relativity without relativity. *Classical and Quantum Gravity*, 2002, 19, pp. 3217–3248.
24. Kiefer C. *Quantum Gravity.* New York, Oxford University Press, 2007. 375 p.
25. Anderson E. The problem of time and quantum cosmology in the relational particle mechanics arena. *arXiv:1111.1472 [gr-qc]*.
26. Morris M.S., Thorne K.S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *American Journal of Physics*, 1988, 56, pp. 395–412.
27. Visser M. *Lorentzian wormholes – from Einstein to Hawking.* New York, AIP Press, 1995. 486 p.

Авторы

Гладуш Валентин Данилович, проф., д.ф.-м.н., профессор кафедры теоретической физики, Днепровский национальный университет имени Олеся Гончара, пр. Гагарина, 72, г. Днепр, 49010, Украина.

E-mail: vgladush@gmail.com

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Гладуш В.Д. Сферически-симметричные T - и R -решения уравнений 5-мерной теории Калуцы-Клейна и её обобщений. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2020. № 2. С. 23–52.

Authors

Gladush Valentin Danilovich, Professor, Doctor of Physics, professor at the Department of Theoretical Physics, Oles Honchar Dnipro National University, Gagarin Ave, 72, Dnipro, 49010, Ukraine.
E-mail: vgladush@gmail.com

Please cite this article in English as:

Gladush V. D. Spherically symmetric T - and R -solutions of the equations of the 5-dimensional Kaluza-Klein theory and its generalizations. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2020, no. 2, pp. 23–52.