УДК 51-71, 515.173

СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ В МИКРОМИРЕ И СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Попов Н. Н.[a,1]

[a] Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, 119333, Россия.

В работе устанавливается связь между скрытыми симметриями шестимерного псевдоевклидова пространства сигнатуры $(+\ +\ +\ -\ -\ -)$ и сохраняющимися квантовыми характеристиками элементарных частиц. Скрытые симметрии выявляются за счёт различных форм представления метрики псевдоевклидова пространства с помощью спиноров и гиперболических комплексных чисел. С помощью возникающих скрытых групп симметрий удаётся получить такие сохраняющиеся квантовые характеристики, как спин, изоспин, электрический и барионный заряды, гиперзаряд, цвет и аромат, а также предсказать точное количество таких сохраняющихся квантовых характеристик кварков, как цвет и аромат.

Ключевые слова: псевдоевклидово пространство, скрытые группы движений метрики, спиноры, гиперболические комплексные числа, гиперболические унитарные операторы.

SPACE-TIME STRUCTURE IN THE MICROCOSM AND THE PROPERTIES OF ELEMENTARY PARTICLES

Popov N. N.[a,1]

[a] Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, 119333, Russia.

The relations between the hidden symmetries of the six-dimensional pseudo-Euclidean space with signature $(+\ +\ +\ -\ -\ -)$ and the concerved quantum characteristics of elementary particles is established. The hidden symmetries are brought out by the various forms of representation of the pseudo-Euclidean space metric with the aid of spinors and hyperbolic complex numbers. Using the emerging hidden symmetry groups one can disclose such conserved quantum characteristics as spin, isospin, electric and baryon charges, hypercharge, color and flavor. One can also predict the exact number of such concerved quantum characteristics of quarks as color and flavor.

Keywords: pseudo-Euclidean space, hidden groups of metric motion, spinors, hyperbolic complex numbers, hyperbolic unitary operators.

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2020.1.39-52

Введение

Математическое число измерений пространства в теории великого объединения на основе структурной группы $SU(3)\otimes\ SU(2)\otimes\ U(1)$, равно 11. При этом четыре измерения относятся к реальному физическому пространству-времени, а остальные семь — к некоторому абстрактному пространству [1], в рамках которого можно ввести такие квантовые характеристики элементарных частиц, как изоспин, гиперзаряд, цвет, аромат и т.д. Число измерений дополнительного абстрактного пространства может увеличиваться по мере открытия все новых сохраняющихся квантовых

[1]E-mail: nnpopov@mail.ru

характеристик элементарных частиц. Такая схема развития теории довольно проста, но при этом возникает ощущение её искусственности.

Излагаемая в работе концепция получена из следующих положений:

1. сохраняющиеся квантовые характеристики элементарных частиц должны быть связаны с геометрическими свойствами реального физического пространства-времени;

2. четырёхмерное псевдориманово пространство не обладает необходимым набором геометрических свойств для установления этой связи;

3. необходимо подобрать такую структуру многообразия, чтобы группы симметрии его типичного касательного слоя генерировали сохраняющиеся квантовые характеристики элементарных частиц;

4. общее число допустимых групп симметрий реального пространства-времени в микромире должно совпадать с общим количеством сохраняющихся квантовых характеристик элементарных частиц.

В качестве кандидата на роль реального физического пространства-времени в микромире рассматривается шестимерное псевдориманово пространство сигнатуры $(+\ +\ +\ -\ -\ -)$ с типичным касательным слоем в виде псевдоевклидова пространства. Предполагается, что мировое время в шестимерном пространстве течёт вдоль выделенной оси в трёхмерном временном подпространстве. Наличие выделенной временной оси приводит к нарушению сферической симметрии в трёхмерном временном подпространстве, что, как будет показано ниже, в свою очередь приводит к нарушению некоторых законов сохранения. Однако, при изучении физических процессов на очень малых временных интервалах порядка 10^{-20}с и менее, трёхмерное временное подпространство можно рассматривать как изотропное с хорошей степенью точности. Именно в этой области изначально будут искаться всевозможные группы симметрий пространства.

Выявление таких групп достигается за счёт различных форм представления псевдоевклидовой метрики шестимерного пространства. Это, в первую очередь, относится к спинорной форме представления [2], а также представления метрики с помощью гиперболических комплексных чисел [2, 3]. В работе показывается, что спинорная форма представления метрики приводит к нахождению таких законов сохранения квантовых характеристик элементарных частиц, как спин, изоспин, электрический и барионный заряды, гиперзаряд. В свою очередь, представление метрики с помощью гиперболических комплексных чисел приводит к выявлению гиперболических групп унитарной симметрии, оставляющих инвариантной метрику шестимерного псевдоевклидова пространства-времени и генерирующих такие сохраняющиеся квантовые характеристики кварков, как цвет и аромат. В случае кварковой модели с помощью гиперболических групп унитарной симметрии предсказывается существование только трёх цветов и строго шести ароматов кварков, если нарушается сферическая симметрия во временном пространстве.

1. Псевдоевклидово пространство $\mathbb{E}_{3,3}$ как образ спинорного пространства

Пусть задано псевдоевклидово пространство $\mathbb{E}_{3,3}$ и пусть η_{ij} — псевдоевклидова метрика пространства, т.е.

$$\eta_{ij} = \begin{cases} 0\,, & i \neq j\,, \\ +1\,, & i = j = 1,2,3\,, \\ -1\,, & i = j = 4,5,6\,. \end{cases} \tag{1}$$

Квадрат интервала в $\mathbb{E}_{3,3}$ представляется в виде

$$s^2 = \eta_{kl} x^k x^l, \qquad k,l = 1,\ldots,6, \tag{2}$$

где $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_6)$ — вектор в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{E}_{3,3}$, по одинаковым верхним и нижним индексам подразумевается суммирование. Группа собственных движений метрики (2) пространства $\mathbb{E}_{3,3}$ задаётся группой собственных псевдоортогональных поворотов $SO(3,3)$.

Введём четырёхмерное комплексное пространство $\mathbb{C}^4$, элементами которого являются четырёхкомпонентные комплексные векторы, называемые спинорами $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_4)$, а само пространство $\mathbb{C}^4$ — спинорным пространством [4]. Введём обозначения $t^1 = x^4$, $t^2 = x^5$, $t^3 = x^6$.

Для любого вектора $\vec{x} \in \mathbb{E}_{3,3}$ найдётся такой спинор $\vec{\xi} \in \mathbb{C}^4$, что будут выполняться следующие соотношения:

$$\begin{aligned} t^1 &= \xi^1\dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\xi}^1 \ , \ t^2 = \frac{\xi^1\dot{\xi}^2 - \dot{\xi}^1\xi^2}{i} \ , \ t^3 = \xi^1\dot{\xi}^1 - \xi^2\dot{\xi}^2 \ , \\ x^1 &= \xi^3\dot{\xi}^4 + \dot{\xi}^3\xi^4 \ , \ x^2 = \frac{\xi^3\dot{\xi}^4 - \dot{\xi}^3\xi^4}{i} \ , \ x^3 = \xi^3\dot{\xi}^3 - \xi^4\dot{\xi}^4 \ , \end{aligned} \tag{3}$$

где $\dot{\xi}^\mu$ — комплексно сопряжённая к ξ^μ компонента спинора, i — мнимая единица. Формулы (3) можно представить в более изящном виде. Для этого рассмотрим полную матричную алгебру $M(4, \mathbb{C})$ в спинорном пространстве $\mathbb{C}^4$. Выберем в этой алгебре матрицы

$$\widehat{\sigma}^p = \begin{cases} \begin{pmatrix} \sigma^p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \ p = 1, 2, 3, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{p-3} \end{pmatrix} , \ p = 4, 5, 6, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \tag{5}$$

матрицы Паули. Матрицы (4) образуют шестимерный базис в подалгебре L алгебры $M(4, \mathbb{C})$. Имеют место следующие коммутационные соотношения:

$$\widehat{\sigma}^k\widehat{\sigma}^l - \widehat{\sigma}^l\widehat{\sigma}^k = 2i\widehat{\sigma}^m\varepsilon_{klm} \ , \tag{6}$$

где $k, l, m = 1, \ldots, 6$, ε_{klm} — полностью антисимметричный тензор, произведение $\widehat{\sigma}^k\widehat{\sigma}^l$ равно нулю, если индексы пары принадлежат разным тройкам ($k = 1, 2, 3$; $l = 4, 5, 6$),

$$\widehat{\sigma}^k\widehat{\sigma}^l + \widehat{\sigma}^l\widehat{\sigma}^k = 2\delta^{kl}p^m \ , \tag{7}$$

где p^m — двумерный ортогональный проектор в спинорном пространстве $\mathbb{C}^4$, причём, если $k, l = 1, 2, 3$, то $m = 2$, если $k, l = 4, 5, 6$, то $m = 1$, $p^1(\mathbb{C}^4) = \{\vec{\xi} \in \mathbb{C}^4; \vec{\xi} = (\xi^1, \xi^2, 0, 0)\}$, $p^2(\mathbb{C}^4) = \{\vec{\xi} \in \mathbb{C}^4; \vec{\xi} = (0, 0, \xi^3, \xi^4)\}$.

Алгебра Ли, порождаемая базисом (4), согласно соотношениям (5), (6), (7), приводима. Каждой паре $(\widehat{\sigma}^m, \vec{\xi}) \in M(4, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^4$ можно сопоставить m-ую координату x^m вектора $\vec{x} \in \mathbb{E}_{3,3}$ по формуле

$$x^m = \langle \vec{\xi}, \widehat{\sigma}^m\vec{\xi} \rangle \ , \ \ m = 1, \ldots, 6 \ , \tag{8}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^4$, задаваемое соотношением $\langle \vec{\xi}, \vec{\eta} \rangle = \delta_{\nu\mu}\dot{\xi}^\nu\eta^\mu$.

Нетрудно заметить, что представления (3) и (8) эквивалентны. Таким образом, вещественные координаты векторов псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}_{3,3}$ можно представить как средние значения эрмитовых операторов вида (4) на спинорах пространства $\mathbb{C}^4$.

2. Скрытые группы собственных движений

Из формулы (8) следует, что если задан произвольный вектор $\vec{x} \in \mathbb{E}_{3,3}$ с координатами $(x^1, \ldots, x^6)$, то в общем случае существует пара $(\widehat{\sigma}_m, \vec{\xi}) \in M(4, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^4$, определяемая с точностью до унитарной эквивалентности относительно группы $SU(4)$, такая, что выполняется соотношение (8). Это означает, что псевдоевклидова метрика (2) в спинорном пространстве $\mathbb{C}^4$ инвариантна относительно действия группы $SU(4)$, которую можно рассматривать как скрытую группу собственных движений этой метрики. Прежде, чем заняться изучением связи группы $SU(4)$ с сохраняющимися квантовыми характеристиками элементарных частиц. Для начала рассмотрим более простые группы, приводящие к законам сохранения таких квантовых характеристик, как спин, «слабый» изоспин, электрический заряд и «слабый» гиперзаряд.

Рассмотрим двухпараметрическую группу унитарных преобразований $U(1) \oplus U(1)$, имеющую представление в $M(4, \mathbb{C})$ в виде унитарных матриц вида

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\psi} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

и действующую в пространстве $\mathbb{C}^4$. Преобразования из группы $U(1) \oplus U(1)$ оставляют инвариантными правые части соотношений (3), т.е. координаты векторов из $\mathbb{E}_{3,3}$ при таких преобразованиях остаются неизменными. Следовательно, сама метрика (2) пространства $\mathbb{E}_{3,3}$ остаётся инвариантной. Будем говорить, что преобразования вида (9) из группы $U(1) \oplus U(1)$ представляют собой скрытые движения метрики (2). Группа $U(1) \oplus U(1)$ генерирует два закона сохранения. Первый закон, порождаемый оператором $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$, будем интерпретировать как закон сохранения «слабого» гиперзаряда. Второй закон, порождаемый генератором группы $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\psi}$, будем интерпретировать как закон сохранения электрического заряда. Появление закона сохранения «слабого» гиперзаряда связано со скрытыми симметриями в трёхмерном временном подпространстве, которое кратко будем называть изопространством.

Перейдём теперь к рассмотрению более сложной унитарной группы. Представление унитарной группы с алгеброй Ли, определяемой генераторами (4), действующей в пространстве $\mathbb{C}^4$, вполне приводимо и может быть выражено в виде прямой суммы неприводимых представлений $SU(2) \oplus SU(2)$. Каждое из неприводимых представлений соответствует группе $SU(2)$ унитарных унимодулярных матриц U размерности 2, т.е. $U^{+}U = 1$, $\det U = 1$. В случае первого неприводимого представления такие матрицы могут быть даны в виде $U = e^{i\sigma_k a_k}$, $k = 1, 2, 3$, где σ_k — эрмитовы матрицы Паули, а a_k — произвольные вещественные числа. Эти матрицы реализуют тождественное представление размерности 2 в двумерном изоспиновом пространстве $p^1(\mathbb{C}^4)$ с элементами $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, натянутыми на два базисных спинора $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. В случае второго неприводимого представления получим аналогичную группу унитарных унимодулярных матриц $U = e^{\sigma_l a_l}$, $l = 4, 5, 6$, где в качестве генераторов σ_l выступают те же матрицы Паули, согласно соотношению (4). Эти матрицы реализуют группу размерности 2 в двумерном спиновом пространстве $p^2(\mathbb{C}^4)$ с элементами $\begin{pmatrix} \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}$, натянутыми на два базисных спинора. Итак, изопространство — это спиновое пространство, связанное с трёхмерным временным подпространством. Следовательно, такая важная характеристика элементарных частиц, как «слабый» изоспин, имеет чисто геометрическую природу, и его закон сохранения связан с инвариантностью метрики шестимерного пространства $\mathbb{E}_{3,3}$ относительно группы вращений в трёхмерном временном подпространстве.

Отметим, что введённые законы сохранения «слабых» гиперзаряда и изоспина могут нарушаться в случае слабых взаимодействий и не нарушаются в случае сильных взаимодействий.

3. Причины нарушения законов сохранения гиперзаряда и изоспина.

В рамках общепринятого формализма не существует объяснения причин нарушения законов сохранения гиперзаряда и изоспина в слабых взаимодействиях. В предлагаемом подходе такой феномен получает достаточно простое объяснение. Согласно полученным выше результатам закон сохранения изоспина и гиперзаряда обязан своим появлением наличию сферической симметрии в трёхмерном временном подпространстве. Если бы это пространство всегда оставалось изотропным, то законы сохранения изоспина и гиперзаряда были бы точными. Однако если временная ось, вдоль которой отсчитывается мировое время, имеет выделенное направление в трёхмерном временном подпространстве, то вследствие этого нарушается сферическая симметрия, что и приводит к нарушению перечисленных выше законов сохранения. Теперь остаётся понять, почему эти законы нарушаются только в слабых взаимодействиях и не нарушаются в сильных.

Можно предположить, что на очень малых временных интервалах трёхмерное временное подпространство можно рассматривать как изотропное, т. е. обладающее сферической симметрией. Сильные процессы взаимодействия протекают за время порядка 10^{-24}с и на таких коротких интервалах временное подпространство остаётся сферически симметричным, вследствие чего законы сохранения изоспина и гиперзаряда выполняются. В случае слабых взаимодействий, которые протекают значительно медленнее, за время порядка 10^{-9}с, пренебречь существованием выделенной оси времени уже не удаётся, что и приводит к нарушению сферической симметрии в трёхмерном временном подпространстве, а, следовательно, и к нарушению законов сохранения гиперзаряда и изоспина.

Заметим, что существование выделенной временной оси хотя и приводит к разрушению сферической симметрии, однако сохраняет осевую симметрию в трёхмерном временном подпространстве, что указывает на возможность существования закона сохранения, связанного с осевой симметрией.

4. Группа SU(4) и генерируемые ею сохраняющиеся квантовые характеристики.

Выше было показано, что группа $SU(4)$ оставляет инвариантной метрику пространства $\mathbb{E}_{3,3}$. Перейдём теперь к более подробному изучению свойств группы $SU(4)$ и её алгебры Ли в связи с необходимостью их физической интерпретации. Генераторы λ_i, $i = 1, \ldots, 15$ алгебры Ли можно представить в виде 15 бесследовых эрмитовых четырёхмерных матриц:

$$\begin{gathered}
\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (10) \\
\lambda_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_{15} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.
\end{gathered}$$

Заметим, что алгебра Ли группы $SU(4)$ содержит подалгебру Гелл-Манна группы $SU(3)$, задаваемую генераторами $\lambda_1, \ldots, \lambda_8$, и подалгебру Паули группы $SU(2)$, задаваемую генераторами $\lambda_1, \ldots, \lambda_3$. Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
& F_i = \frac{1}{2}\lambda_i \ , \ \ i = 1, \ldots, 15 \ , \\
& I_\pm = F_1 \pm iF_2 \ , \ \ I_3 = F_3 \ , \\
& V_\pm = F_4 \pm iF_5 \ , \ \ U_\pm = F_6 \pm iF_7 \ , \ \ Y = \frac{2}{\sqrt{3}}F_8 \qquad (11) \\
& N_\pm = F_9 \pm iF_{10} \ , \ \ M_\pm = F_{11} \pm iF_{12} \ , \ \ W_\pm = F_{13} \pm iF_{14} \ , \ \ B = \frac{4}{\sqrt{6}}F_{15} \ ,
\end{aligned}$$

где $I_\pm$ — повышающий и понижающий операторы значений проекции изоспина на временную ось, Y — эрмитов оператор гиперзаряда, B — эрмитов оператор барионного заряда. Среди заданных формулами (10) операторов отсутствует оператор электрического заряда Q. Его можно задать в виде эрмитовой бесследовой матрицы

$$Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \tag{12}$$

Тогда имеет место зависимость

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} , \tag{13}$$

установленная феноменологическим путем независимо Гелл-Манном [5] и Нишиджимой [6].

Эрмитовы операторы I_3, Y, Q, B удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[I_3, Y] = [I_3, Q] = [I_3, B] = [Y, Q] = [Y, B] = [Q, B] = 0 , \tag{14}$$

т.е. эти четыре оператора коммутируют между собой. Это означает, что физические характеристики элементарных частиц, задаваемые собственными значениями этих операторов, одновременно наблюдаемы. Найдём теперь соотношения, устанавливающие связи между коммутирующими эрмитовыми операторами. Выпишем коммутаторы для операторов рождения и уничтожения, определяемые формулами (11):

$$\begin{aligned} &[I_+, I_-] = 2I_3 \ , \ \ [V_+, V_-] = I_3 + \frac{3}{2}Y \ , \ \ [U_+, U_-] = -I_3 + \frac{3}{2}Y \\ &[N_+, N_-] = I_3 + \frac{1}{2}Y + B \ , \ \ [M_+, M_-] = -I_3 + \frac{1}{2}Y + B \ , \\ &[W_+, W_-] = -Y + B \ . \end{aligned} \tag{15}$$

Также можно использовать оператор Q, например $[V_+, V_-] = 3Q - 2I_3$.

Выпишем в таблице коммутационные соотношения, которые оказываются полезными при построении конечномерных представлений группы $SU(4)$. Первый множитель дан строкой, второй — столбцом. Коммутаторы операторов I_3, Y, Q, B с остальными даны в таблице 1.

Таблица 1. Коммутаторы операторов (11)

$\langle \cdot, b\rangle$ / $\langle a, \cdot\rangle$	$I_\pm$	$V_\pm$	$U_\pm$	$N_\pm$	$M_\pm$	$W_\pm$
I_3	$\pm I_\pm$	$\pm\frac{1}{2}V_\pm$	$\mp\frac{1}{2}U_\pm$	$\pm\frac{1}{2}N_\pm$	$\mp\frac{1}{2}M_\pm$	0
Y	0	$\pm V_\pm$	$\pm U_\pm$	$\pm\frac{1}{3}N_\pm$	$\pm\frac{1}{3}M_\pm$	$\mp\frac{2}{3}W_\pm$
Q	$\pm I_\pm$	$\pm V_\pm$	0	$\pm\frac{2}{3}N_\pm$	$\mp\frac{1}{3}M_\pm$	$\mp\frac{1}{3}W_\pm$
B	0	0	0	$\pm\frac{4}{3}N_\pm$	$\pm\frac{4}{3}M_\pm$	$\pm\frac{4}{3}W_\pm$

Из приведённых коммутационных соотношений следует, что операторы I_+, V_+, U_-, N_+, M_- являются повышающими, а I_-, V_-, U_+, N_-, M_+ — понижающими собственные значения оператора I_3.

Операторы U_+, V_+, N_+, M_+, W_- повышают, а U_-, V_-, N_-, M_-, W_+ понижают собственные значения оператора Y.

Операторы I_+, V_+, N_+, M_-, W_- повышают, а I_-, V_-, N_-, M_+, W_+ понижают собственные значения оператора Q.

Операторы N_+, M_+, W_+ повышают, N_-, M_-, W_- понижают, а $I_\pm$, $V_\pm$, $U_\pm$ оставляют неизменными собственные значения оператора B.

Таблица 2. Коммутаторы операторов (11), продолжение

$\langle a,\cdot\rangle$ \ $\langle\cdot,b\rangle$	V_+	V_-	U_+	U_-	N_+	N_-	M_+	M_-	W_+	W_-
I_+	0	$-U_-$	V_+	0	0	$-M_-$	N_+	0	0	0
I_-	U_+	0	0	$-V_-$	M_+	0	0	$-N_-$	0	0
V_+	0	(15)	0	I_+	0	-W_-	0	0	N_+	0
V_-	(15)	0	$-I_-$	0	W_+	0	0	0	0	$-N_-$
U_+	0	I_-	0	(15)	0	0	0	$-W_-$	M_+	0
U_-	$-I_+$	0	(15)	0	0	0	W_+	0	0	$-M_-$
N_+	0	$-W_+$	0	0	0	(15)	0	I_+	0	V_+
N_-	W_-	0	0	0	(15)	0	$-I_-$	0	$-V_-$	0
M_+	0	0	0	$-W_+$	0	I_-	0	(15)	0	U_+
M_-	0	0	W_-	0	$-I_+$	0	(15)	0	$-U_-$	0
W_+	$-N_+$	0	$-M_+$	0	0	V_-	0	U_-	0	(15)
W_-	0	N_-	0	M_-	$-V_+$	0	$-U_+$	0	(15)	0

Коммутаторы прочих операторов даны в таблице 2.

Используя коммутационные соотношения из таблиц 1 и 2, построим в качестве примера простейшее конечномерное представление группы $SU(4)$. Состояния, входящие в представление, характеризуются набором значений квантовых характеристик (I_3, Y, Q, B). Переходы между различными состояниями осуществляются при помощи действия повышающих и понижающих операторов, задаваемых приведёнными соотношениями.

Введём четыре ортогональных вектора

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{16}$$

в четрёхмерном пространстве, индуцируемом набором квантовых характеристик (I_3, Y, Q, B). Эти векторы являются собственными векторами эрмитовых операторов I_3, Y, Q, B, задаваемых матрицами вида (11) и имеющими следующие собственные значения, соответственно: I_3: $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0)$, Y: $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0)$, Q: $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$, B: $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1)$. Пусть задано состояние $\Psi_u = \Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}}$, определяемое как вектор представления, удовлетворяющий следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} I_3\Psi_u =& \frac{1}{2}\Psi_u\ , \\ Y\Psi_u =& \frac{1}{3}\Psi_u\ , \\ Q\Psi_u =& \frac{2}{3}\Psi_u\ , \\ B\Psi_u =& \frac{1}{3}\Psi_u\ . \end{aligned} \tag{17}$$

Это состояние является собственным вектором для операторов I_3, Y, Q, B и соответствует кварку u. Действуя на это состояние оператором V_-, получим новое состояние $\Psi_s = \Psi_{0,-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}}$, соответствующее кварку s:

$$\begin{aligned}
I_3 V_- \Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}} &= (V_- I_3 - \frac{1}{2} V_-)\Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}} = 0 \cdot V_- \Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}} \,, \\
Y V_- \Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}} &= (V_- Y - V_-)\Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3} V_- \Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}} \,, \\
Q V_- \Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}} &= (V_- Q - V_-)\Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} V_- \Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}} \,, \\
B V_- \Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}} &= V_- B \Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} V_- \Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}} \,,
\end{aligned} \tag{18}$$

что можно кратко записать как

$$V_- \Psi_u = \Psi_s \,. \tag{19}$$

Состояние с тем же набором характеристик, соответствующее кварку b, можно получить, действуя на Ψ_u последовательно операторами $N_- W_+$:

$$N_- W_+ \Psi_u = \Psi_b \,. \tag{20}$$

В свою очередь, действуя на состояние Ψ_s оператором U_+ и используя коммутационные соотношения таблицы 2, получаем состояние $\Psi_d = \Psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}}$, соответствующее кварку d:

$$U_+ \Psi_s = \Psi_d \,. \tag{21}$$

Из состояния Ψ_d под действием оператора I_+ можно перейти в состояние Ψ_u, или под действием оператора M_- перейти в новое состояние $\Psi_a = \Psi_{0,0,0,-1}$, соответствующее антибариону с квантовыми характеристиками $I_3 = 0$, $Y = 0$, $Q = 0$, $B = -1$:

$$I_+ \Psi_d = \Psi_u \,, \quad M_- \Psi_d = \Psi_a \,. \tag{22}$$

Полученные четыре состояния Ψ_u, Ψ_s, Ψ_d, Ψ_a задают пространство простейшего неприводимого конечномерного представления группы $SU(4)$. В этом пространстве существует также состояние $\Psi_c = \Psi_{0,\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}}$, соответствующее кварку c, в которое можно перейти из состояния Ψ_d под действием оператора V_+ или из состояния Ψ_u под действием оператора U_+:

$$V_+ \Psi_d = \Psi_c \,, \quad U_+ \Psi_u = \Psi_c \,. \tag{23}$$

Состояние с тем же набором характеристик (I_3, Y, Q, B), соответствующее кварку t, может быть получено из Ψ_d и Ψ_u как

$$N_+ W_- \Psi_d = \Psi_t \,, \quad M_+ W_- \Psi_u = \Psi_t \,. \tag{24}$$

Полученные результаты можно наглядно изобразить в виде двух диаграмм переходов между различными состояниями (см. Рис.1, 2).

На диаграмме 1 изображено простейшее неприводимое нетривиальное представление группы $SU(4)$, содержащее четыре кварка в трёх состояниях и один антибарион, задаваемый собственным состоянием $\Psi_{0,0,0,-1}$. На диаграмме 2 изображено нетривиальное представление, содержащее шесть кварков в четырёх состояниях. При этом состояния $\Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}}$ и $\Psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}}$, соответствующие кваркам u и d, встречаются однократно, а состояния $\Psi_{0,-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}}$ и $\Psi_{0,\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}}$, соответствующие кваркам (s, b) и (c, t), соответственно, встречаются по два раза. Для того, чтобы различать кварки s, b и c, t, необходимо наличие ещё одной квантовой характеристики. В рамках группы $SU(4)$ такой характеристики не существует. Остаётся также открытым вопрос об общем количестве допустимых кварков, существующих в физическом пространстве. Ниже будут даны ответы на эти вопросы.

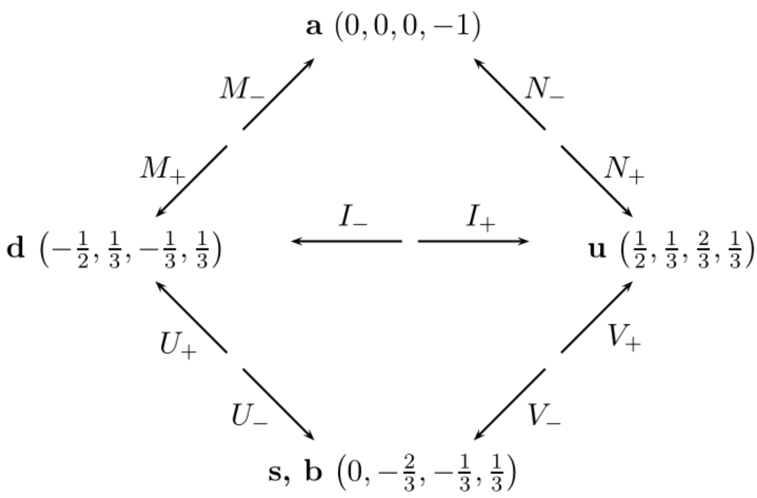

Рис. 1. Диаграмма 1.

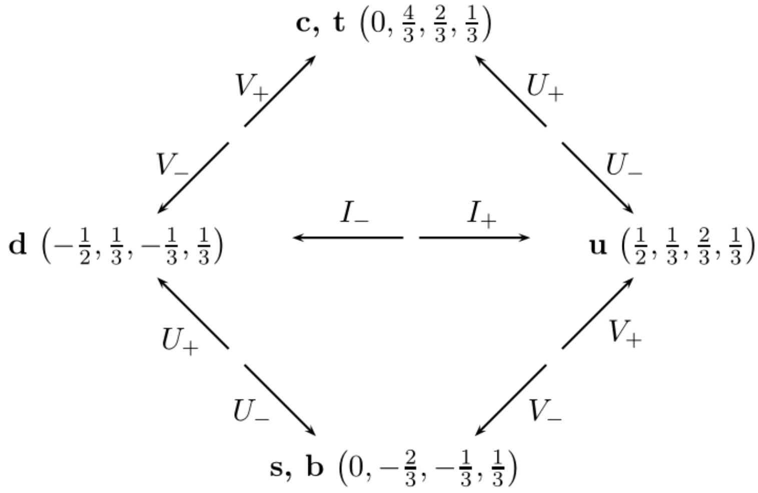

Рис. 2. Диаграмма 2.

5. Представление метрики пространства $\mathbb{E}_{3,3}$ с помощью гиперболических комплексных чисел.

Определим алгебру гиперболических комплексных чисел $\mathbb{H}$ как 2-мерный R-модуль с парой образующих $\{1, j\}$ и таблицей умножения

	1	j
1	1	j
j	j	1

(25)

Элементы $h \in \mathbb{H}$ будем записывать в виде $h = 1x + jt$, где $x, t \in \mathbb{R}$, а j — мнимая единица в $\mathbb{H}$. Вещественное число $\Re h = x$ называется вещественной частью гиперболического комплексного числа h, а вещественное число $\Im h = t$ называется мнимой частью числа h. В алгебре $\mathbb{H}$ определена инволютивная операция комплексного сопряжения: $h = x + jt \to h = x - jt$. Алгебра гиперболических комплексных чисел индуцирует на плоскости двумерную псевдоевклидову геометрию с метрикой $\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Рассмотрим n-мерное пространство гиперболических комплексных чисел $\mathbb{H}^n$. В нём введём скалярное произведение векторов $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Если $\vec{h} = (h^1, \ldots, h^n)$, $\vec{g} = (g^1, \ldots, g^n) \in \mathbb{H}^n$, то скалярное произведение задаётся билинейной формой

$$\langle\vec{h},\vec{g}\rangle = h^1\overline{g}^1 + \cdots + h^n\overline{g}^n \ . \tag{26}$$

Билинейная форма (26) не является положительно определённой. В случае пространства $\mathbb{H}^3$ имеем

$$\langle\vec{h},\vec{h}\rangle = h^1\overline{h}^1 + h^2\overline{h}^2 + h^3\overline{h}^3 \ . \tag{27}$$

Принимая во внимание, что $h^k = x^k + jt^k, k = 1,2,3$, получаем

$$\langle\vec{h},\vec{h}\rangle = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (t^1)^2 - (t^2)^2 - (t^3)^2 \ , \tag{28}$$

т.е. скалярное произведение гиперболических комплексных чисел из $\mathbb{H}^3$ задаёт квадратичную билинейную форму (псевдоевклидову метрику) в пространстве $\mathbb{E}_{3,3}$. Перейдём теперь к рассмотрению некоторых групп симметрий квадратичной билинейной формы (27).

6. Гиперболические группы унитарной симметрии и их представления.

Метрика шестимерного псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}_{3,3}$ инвариантна относительно ряда скрытых групп симметрий, возникающих в результате представления псевдоевклидовой метрики с помощью гиперболических комплексных чисел в гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$, согласно (27). Рассмотрим унитарную гиперболическую группу $U(1,\mathbb{H}^3)$, действующую в пространстве $\mathbb{H}^3$. Это трёхпараметрическая группа H-унитарных матриц вида

$$U = \begin{pmatrix} e^{j\varphi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\varphi_3} \end{pmatrix} \ , \tag{29}$$

оставляющих инвариантной билинейную форму (27). Эрмитово сопряжённая матрица

$$U = \begin{pmatrix} e^{-j\varphi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-j\varphi_3} \end{pmatrix} \tag{30}$$

является обратной к U и $UU^+ = 1$. Алгебра Ли этой группы коммутативна, её базис задается тремя элементами

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ . \tag{31}$$

Тождественное представление (29) группы $U(1,\mathbb{H}^3)$ приводимо и разлагается на прямую сумму неприводимых представлений этой группы, действующих в инвариантных одномерных подпространствах $\mathbb{H}$:

$$U(1,\mathbb{H}^3) = U(1,\mathbb{H}) \oplus U(1,\mathbb{H}) \oplus U(1,\mathbb{H}) \ . \tag{32}$$

Генераторы этой группы индуцируют три закона сохранения. Забегая немного вперёд, отметим, что эти законы сохранения связаны с тремя цветовыми квантовыми характеристиками кварков. Сами же унитарные преобразования из группы $U(1,\mathbb{H})$ в пространстве $\mathbb{H}$ соответствуют преобразованиям Лоренца в псевдоевклидовом подпространстве $\mathbb{E}_{3,3}$.

Рассмотрим теперь гиперболическую группу унитарных матриц $SU(2,\mathbb{H})$, действующую в трёхмерном гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$. Группа $SU(2,\mathbb{H})$ — группа гиперболических унитарных унимодулярных матриц U размерности $2\oplus 2$, удовлетворяющих условиям $U^+U = 1$, $|\det U| = 1$. Такая матрица может быть представлена в виде $U = e^{j\sigma_k a_k}$, $U^+ = e^{-j\sigma_k a_k}$, где σ_k — эрмитовы бесследовые матрицы, имеющие вид

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \ , \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \tag{33}$$

a_k — произвольные вещественные числа.

Матрицы (33) образуют трёхмерный базис в алгебре Ли группы $SU(2,\mathbb{H})$ и отличаются от матриц Паули лишь заменой мнимой единицы i на гиперболическую мнимую единицу j. Базисные элементы (33) алгебры Ли удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[\sigma_k, \sigma_l] = 2j\kappa_{klm}\sigma_m \ , \tag{34}$$

где κ_{klm} — тензор третьего ранга, принимающий значения $\kappa_{123} = 1$, $\kappa_{132} = 1$, $\kappa_{231} = 1$, $\kappa_{312} = -1$, $\kappa_{213} = -1$, $\kappa_{321} = -1$.

Структурные константы алгебры Ли группы $SU(2,\mathbb{H})$ совпадают со структурными константами алгебры Ли группы $SU(2)$ с точностью до знака.

Выберем из компонент шестимерного вектора $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3, t^1, t^2, t^3) \in \mathbb{E}_{3,3}$ три компоненты, таким образом, чтобы все три не были одного вида, то есть исключены тройки (x^1, x^2, x^3) и (t^1, t^2, t^3). Всего таких троек может быть восемнадцать. Каждой из них можно подобрать среди оставшихся сопряжённую тройку координат таким образом, чтобы в этих двух тройках не было бы общих элементов. Например, если взять тройку (x^1, x^3, t^2), то сопряжённой ей будет (x^2, t^1, t^3). Итак, имеется девять сопряжённых между собой пар троек.

Каждой тройке вида (x^k, x^l, t^m), содержащей две пространственные координаты, сопоставим матрицу

$$Y = \begin{pmatrix} x^k & x^l - jt^m \\ x^l + jt^m & -x^k \end{pmatrix} , \tag{35}$$

а сопряжённой тройке (x^n, t^p, t^q), $n, p, q = 1, 2, 3$, причём $n \neq k, l$, $m \neq p, q$, сопоставим матрицу

$$Y^C = \begin{pmatrix} t^p & t^q - jx^n \\ t^q + jx^n & -t^p \end{pmatrix} . \tag{36}$$

Тогда имеет место следующее соотношение:

$$\det Y^C - \det Y = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (t^1)^2 - (t^2)^2 - (t^3)^2 \ . \tag{37}$$

Для любых гиперболических унитарных матриц $U_1, U_2 \in SU(2,\mathbb{H})$ независимые унитарные преобразования

$$Y' = U_1^+ Y U_1 \ , \ \ Y^{C\prime} = U_2^+ Y^C U_2 \tag{38}$$

оставляют инвариантной билинейную квадратичную форму в правой части соотношения (37) в силу равенства

$$\det Y^{C\prime} - \det Y' = \det Y^C - \det Y \ . \tag{39}$$

Итак, унитарные преобразования над парой сопряжённых матриц Y и Y^C из группы $SU(2,\mathbb{H})$ соответствуют псевдоортогональным преобразованиям в пространстве $\mathbb{E}_{3,3}$, оставляющим инвариантной псевдоевклидову метрику.

Существует всего девять групп такого вида, причём каждое представление таких групп разлагается в прямую сумму двух неприводимых сопряжённых представлений, действующих в трёхмерных подпространствах шестимерного пространства-времени. Этим восемнадцати представлениям гиперболических унитарных групп симметрий должны соответствовать восемнадцать законов сохранения. Забегая вперед, отметим, что сохраняющиеся квантовые характеристики можно интерпретировать как ароматы кварков. То, что восемнадцать представлений девяти групп разбиваются на пары неприводимых сопряжённых представлений, означает, что ароматы кварков появляются парами (u, d), (s, c), (b, t) и т.д.

Отметим, что полученный результат опирается на предположение о том, что временное подпространство изотропно, т.е. не существует выделенного направления течения времени. Однако, если это не так, и существует выделенная временная ось, например, t_1, то сферическая симметрия во временном подпространстве нарушается, и сохраняется лишь осевая симметрия. Тогда существуют всего три пары сопряженных троек

$$\begin{aligned} (t_1, x_1, x_2) &\leftrightarrow (t_2, t_3, x_3)\ ; \\ (t_1, x_1, x_3) &\leftrightarrow (t_2, t_3, x_2)\ ; \\ (t_1, x_2, x_3) &\leftrightarrow (t_2, t_3, x_1)\ . \end{aligned} \tag{40}$$

Каждой паре троек соответствует пара сопряжённых матриц вида (35) и (36), индуцирующих шесть законов сохранения ароматов кварков.

Введём оператор

$$F = -\sigma_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{41}$$

и рассмотрим представление группы $SU(2, \mathbb{H})$ в шестимерном пространстве. Операторы σ_1, σ_2, σ_3 (33) и F в шестимерном пространстве принимают вид

$$\begin{gathered} \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{matrix}} & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{matrix}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}} \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{42}$$

Шесть ортонормированных векторов $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, \ldots, 0, 1)$ описывают шесть ароматов кварков, которые будем обозначать, соответственно, как d, u, s, c, b, t. Представление эрмитова оператора F в шестимерном постранстве задаёт оператор ароматов шести кварков. Шесть введённых ортонормированных векторов задают собственные векторы оператора F. Собственные значения оператора F определяются числами ± 1, причём ароматам u, c, t соответствует собственное значение $+1$, а ароматам d, s, b соответствует собственное значение -1. Если через λ_α обозначить собственное значение аромата α, где α совпадают с одним из ароматов d, u, s, c, b, t, то между собственными значениями оператора ароматов F, барионными зарядами кварков B и электрическими зарядами кварков Q_α существует простая зависимость

$$Q_\alpha = \frac{B + \lambda_\alpha}{2}\ . \tag{43}$$

Учитывая, что между изоспиновыми проекциями I_3 кварков d и u и собственными значениями ароматов кварков λ_d и λ_u формально существует связь

$$I_3(d) = \frac{\lambda_d}{2}\ ,\ \ I_3(u) = \frac{\lambda_u}{2}\ , \tag{44}$$

формулу (43) можно представить в виде

$$Q_\alpha = \begin{cases} I_3(\alpha) + \frac{B}{2}\ , & \text{если } \alpha \text{ совпадает с } d \text{ или } u \\ I_3(\alpha) + \frac{B+\lambda_\alpha}{2}\ , & \text{если } \alpha \text{ совпадает с } s, c, b, t \end{cases} \tag{45}$$

Из сравнения формул (45) и (13) следует, что между барионными зарядами, ароматами и гиперзарядами кварков существует простая связь:

$Y_\alpha = B + \lambda_\alpha$, если α совпадает с одним из ароматов s, c, b, t,

$Y_\alpha = B$, если α совпадает с ароматом d или u.

Подводя итог всему сказанному выше, приведём окончательную таблицу квантовых характеристик шести кварков, которые являются основой для построения всех известных адронов.

Таблица 3. Таблица характеристик кварков

Кварк / Характеристика	d	u	s	c	b	t
Электрический заряд Q	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Гиперзаряд Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
Барионный заряд B	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Спин J	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Изоспин I	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
Проекция изоспина I_3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
Аромат d (нижний)	-1	0	0	0	0	0
Аромат u (верхний)	0	1	0	0	0	0
Аромат s (странность)	0	0	-1	0	0	0
Аромат c (очарование)	0	0	0	1	0	0
Аромат b (красота)	0	0	0	0	-1	0
Аромат t (истина)	0	0	0	0	0	1

Заключение

В работе делается предположение, что реальное физическое пространство в микромире представляет собой шестимерное псевдоевклидово пространство $\mathbb{E}_{3,3}$, при этом мировое время течёт вдоль выделенной оси в трёхмерном временном подпространстве. Установлена связь между сохраняющимися квантовыми характеристиками элементарных частиц и внутренними (скрытыми) симметриями шестимерного пространства. На малых временных интервалах (характерных для сильных взаимодействий) пространство является сферически симметричным, в этом случае проявляется общая группа скрытых внутренних симметрий $SU(4)$, которая индуцирует, в частности, законы сохранения электрического и барионного зарядов, гиперзаряда, спина и изоспина. На временных интервалах, характерных для слабых взаимодействий, наличие выделенной временной оси приводит к переходу сферической симметрии в осевую, что в свою очередь приводит к нарушению некоторых законов сохранения. Законы сохранения квантовых характеристик кварков, таких как цвет и аромат, генерируются гиперболическими группами унитарной симметрии $U(1,\mathbb{H})$ и $SU(2,\mathbb{H})$, представляющими собой группы симметрий пространства $\mathbb{E}_{3,3}$ и непосредственно связанными с группой Лоренца.

Список литературы

1. Witten E. Search for a Realistic Kaluza-Klein Theory. *Nucl. Phys. B*, 1981, vol. 186, pp. 412–428.

2. Попов Н.Н. О корреляции групп симметрии шестимерного псевдоевклидова пространства и квантовых характеристик элементарных частиц. *37-я Международная научная конференция Евразийского Научного Объединения.* 2018. Т. 37. № 3. С. 17–21.

3. Попов Н.Н., Кошелев А.А. Структура пространства-времени и её связь со свойствами элементарных частиц. *39-я Международная научная конференция Евразийского Научного Объединения.* 2018. Т. 39. № 5. С.6–13.

4. Рашевский П.К. Теория спиноров. *УМН.* 1955. Т.10. № 2 (64). С.3–110.

5. Gell-Mann M. Isotopic Spin and New Unstable Particles. *Phys. Rev.*, 1953, vol. 92, pp. 833–834.

6. Nishijima K., Nakano T. Charge Independence for V-particles. *Progress of Theoretical Physics*, 1953, vol. 10, № 5, pp. 581–582.

References

1. Witten E. Search for a Realistic Kaluza-Klein Theory. *Nucl. Phys. B*, 1981, vol. 186, pp. 412–428. https://doi.org/10.1016/0550-3213(81)90021-3

2. Popov N.N. O korreljacii grupp simmetrii shestimernogo psevdoevklidova prostranstva i kvantovyh harakteristik jelementarnyh chastic [On the correlation of symmetry groups of the six-dimensional pseudo-Euclidean space and quantum characteristics of elementary particles]. *37-th International Scientific Conference of the Eurasian Science Community*, 2018, vol. 37, no. 3, pp. 17–21. (in Russian)

3. Popov N.N., Koshelev A.A. Struktura prostranstva-vremeni i ejo svjaz' so svojstvami jelementarnyh chastic [Space-time structure and its relationship with the properties of elementary particles]. *39-th International Scientific Conference of the Eurasian Science Community*, 2018, vol. 39, no. 5, pp. 6–13. (in Russian)

4. Rashevsky P.K. Teorija spinorov [Theory of spinors]. *Russian Mathematical Surveys*, 1953, vol. 10, no. 2 (64), pp. 3–110. (in Russian)

5. Gell-Mann M. Isotopic Spin and New Unstable Particles. *Phys. Rev.*, 1953, vol. 92, pp. 833–834. https://doi.org/10.1103/PhysRev.92.833

6. Nishijima K., Nakano T. Charge Independence for V-particles. *Progress of Theoretical Physics*, 1953, vol. 10, no. 5, pp. 581–582. https://doi.org/10.1143/PTP.10.581

Авторы

Попов Николай Николаевич, к. ф.-м. н., Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, ул. Вавилова, 40, отдел 31, г. Москва, 119333, Россия.
E-mail: nnpopov@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Попов Н. Н. Структура пространства-времени в микромире и свойства элементарных частиц. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2020. № 1. С. 39—52.

Authors

Popov Nikolay Nikolaevich, PhD in Physics and Mathematics, Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Dept. 31, Vavilova str., 40, Moscow, 119333, Russia.
E-mail: nnpopov@mail.ru

Please cite this article in English as:

Popov N. N. Space-time structure in the microcosm and the properties of elementary particles. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2020, no. 1, pp. 39–52.