

УДК 517.917

© Аслан О., Попов А. А., 2020

САМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ЗАРЯДА В КРОВОЙ НОРЕ С БЕСКОНЕЧНО КОРОТКОЙ ГОРЛОВИНОЙ*Аслан О.^{а,1}, Попов А. А.^{а,2}^а Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия.

Вычислена сила самодействия электромагнитного заряда в пространстве-времени кротовой норе с бесконечно короткой горловиной. Предполагается, что заряд является источником электромагнитного поля, неминимально связанного с кривизной пространства-времени.

Ключевые слова: эффект самодействия; кротовая нора.

SELF-ACTION OF ELECTROMAGNETIC CHARGE IN A WORMHOLE WITH AN INFINITELY SHORT THROATAslan O.^{а,1}, Popov A. A.^{а,2}^а Kazan Federal University, Kazan, 420008, Russia.

The self-force of the electromagnetic charge in the space-time of a wormhole with an infinitely short throat is calculated. It is assumed that the charge is a source of an electromagnetic field that is in non-minimal connection with the curvature of space-time.

Keywords: self-force; wormhole.

PACS: 34D08, 93C15

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2020.1.12-21

Введение

Покоящаяся заряженная частица в искривленном пространстве-времени порождает поле, которое из-за кривизны пространства-времени и нелокальной структуры безмассового поля воздействует на саму частицу. Такая сила называется силой самодействия [1]. Аналогичная ситуация имеет место и в случае гравитационного заряда [2–4]. Электромагнитные и гравитационные силы самодействия важны при описании движения двух тел с экстремальным соотношением масс этих тел и при исследовании излучаемых ими гравитационных волн [5, 6]. В искривленных пространствах интенсивные исследования эффекта самодействия покоящегося заряда проводились на фоне черных дыр, пространств топологических дефектов и кротовых нор.

В случаях статического заряда в пространстве Шварцшильда электростатический потенциал и электромагнитная сила самодействия известны в явном виде [7–10]. В черной дыре Рейснера-Нордстрёма электростатический потенциал был получен в [11, 12], а в пространстве-времени Керра в работах [13, 14]. Сила самодействия покоящегося скалярного заряда в черной дыре Керра-Ньюмана была рассмотрена в [15].

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-02-00496.

¹ E-mail: alsucuk@gmail.com² E-mail: apopov@kpfu.ru

Для понимания эффекта самодействия интересны работы в пространствах топологических дефектов (например, бесконечно длинная прямая космическая струна, глобальный монополь), поскольку этот эффект чувствителен не только к искривлённости пространства-времени, но и к его топологической структуре [16–19].

Пространства кротовых нор также интересны при изучении эффекта самодействия, поскольку имеют и нетривиальную топологическую структуру и кривизну. Для статического скалярного и электромагнитного заряда эффект самодействия в пространстве-времени кротовых нор с различными формами горловины был рассмотрен в работах [20–22]. Интересно отметить, что в длинной горловине эффект самодействия является локальным даже для безмассового скалярного поля неминимально связанного с кривизной пространства-времени [23].

Целью настоящей статьи является анализ эффекта самодействия заряда в пространстве-времени кротовой норы с бесконечно короткой горловиной. Предполагается, что заряд является источником электромагнитного поля, неминимально связанного с кривизной пространства-времени. Статья организована следующим образом. В разделе II мы получаем неперенормированное выражение для потенциала самодействия статического электромагнитного заряда на рассматриваемом гравитационном фоне. В разделе III описывается процедура перенормировки потенциала самодействия и результат.

В этой работе мы используем следующие определения тензора кривизны $R^D_{ABC} = \partial_C \Gamma^D_{AB} - \partial_B \Gamma^D_{AC} + \Gamma^D_{EC} \Gamma^E_{BA} - \Gamma^D_{EB} \Gamma^E_{AC}$ и тензора Римана $R_{MN} = R^F_{MFN}$. Система единиц выбрана так, что $c = G = 1$.

1. Сила самодействия

Рассмотрим статическую сферически симметричную кротовую нору

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + L(r)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1)$$

где $-\infty < r < \infty$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Простейшей моделью кротовой норы является модель с бесконечно короткой горловиной

$$L(r) = (|r| + a), \quad a > 0, \quad (2)$$

которую мы и будем рассматривать в дальнейшем. Такая модель представляет собой два пространства-времени Минковского, в каждом из которых вырезан шар радиуса a , и склеенных по поверхности этих шаров. Как известно, такая модель хорошо работает при описании эффектов на больших (по сравнению с длиной и радиусом горловины) расстояниях от горловины кротовой норы.

Уравнения поля, создаваемого электромагнитным зарядом, может быть получено варьированием по потенциалу электромагнитного поля соответствующего действия. Мы рассмотрим теорию гравитации Эйнштейна с линейной по кривизне связью между электромагнитным и гравитационным полями, для которой действие имеет вид [24]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - F_{mn} F^{mn} + \chi^{ikmn} F_{ik} F_{mn}), \quad (3)$$

где g - детерминант метрического тензора g_{ik} , R -скалярная кривизна пространства-времени, величина

$$\chi^{ikmn} \equiv \frac{q_1 R}{2} (g^{im} g^{kn} - g^{in} g^{km}) + \frac{q_2}{2} (R^{im} g^{kn} - R^{in} g^{km} + R^{kn} g^{im} - R^{km} g^{in}) + q_3 R^{ikmn} \quad (4)$$

называется тензором восприимчивости,

$$F_{ik} = \nabla_i A_k - \nabla_k A_i = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \quad (5)$$

есть тензор электромагнитного поля, R^{in} - тензор Риччи, R^{ikmn} - тензор кривизны и q_1, q_2, q_3 произвольные параметры теории.

Вариация по потенциалу A_k действия (3) приводит к уравнениям электромагнитного поля

$$\nabla_k H^{ik} = 0, \quad (6)$$

где H^{ik} - тензор индукции, определяемый выражением

$$H^{ik} \equiv F^{ik} - \chi^{ikmn} F_{mn}. \quad (7)$$

Если поле $A_i(x^k)$ создаётся зарядом e , то уравнения (6) преобразуются к виду

$$\nabla^k H_{ik} = -4\pi j_i = -4\pi e \int u_i(\tau) \delta^{(4)}(x^k, \tilde{x}^k(\tau)) \frac{d\tau}{\sqrt{-g}}, \quad (8)$$

где u^i - 4-скорость заряда и τ - его собственное время. Мировая линия заряда задается функциями $\tilde{x}^k(\tau)$. Для заряда в состоянии покоя 4-скорость заряда имеет координаты $u^i(1, 0, 0, 0)$, а векторный потенциал A_i не зависит от времени, что позволяет использовать следующий анзац: $A_i = (A_t, 0, 0, 0)$. Калибровка Лоренца в этом случае тождественно выполняется и система уравнений (8) сводится к одному уравнению на A_t :

$$\begin{aligned} & \left[-1 + \frac{8\delta(r)}{(|r|+a)} q_1 + \frac{4\delta(r)}{(|r|+a)} q_2 \right] \frac{d^2 A_t}{dr^2} + \left[-\frac{2\operatorname{sgn}(r)}{(|r|+a)} + \left(\frac{8\delta'(r)}{(|r|+a)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{16\operatorname{sgn}(r)\delta(r)}{(|r|+a)^2} \right) q_1 + \left(\frac{4\delta'(r)}{(|r|+a)} + \frac{4\operatorname{sgn}(r)\delta(r)}{(|r|+a)^2} \right) q_2 \right] \frac{dA_t}{dr} + \left[-\frac{1}{(|r|+a)^2} \right. \\ & \left. + \frac{8\delta(r)}{(|r|+a)^3} q_1 + \frac{2\delta(r)}{(|r|+a)^3} q_2 \right] \frac{d^2 A_t}{d\theta^2} + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \left[-\frac{1}{(|r|+a)^2} + \frac{8\delta(r)}{(|r|+a)^3} q_1 \right. \\ & \left. + \frac{2\delta(r)}{(|r|+a)^3} q_2 \right] \frac{dA_t}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \left[-\frac{1}{(|r|+a)^2} + \frac{8\delta(r)}{(|r|+a)^3} q_1 \right. \\ & \left. + \frac{2\delta(r)}{(|r|+a)^3} q_2 \right] \frac{d^2 A_t}{d\varphi^2} = -\frac{4\pi e \delta^3(r, \theta, \varphi; \tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\varphi})}{(|r|+a)^2 \sin(\theta)}, \end{aligned} \quad (9)$$

где штрихом обозначена производная по r . Поскольку рассматриваемая задача сферически симметрична, потенциал удобно разложить по угловым гармоникам

$$A_t(x, \tilde{x}) = -4\pi e \sum_{l,m} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}) g_l(r, \tilde{r}) = -e \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \gamma) g_l(r, \tilde{r}), \quad (10)$$

где $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ сферические функции, P_l - многочлен Лежандра, $\cos \gamma \equiv \cos \theta \cos \tilde{\theta} + \sin \theta \sin \tilde{\theta} \cos(\varphi - \tilde{\varphi})$. В силу свойств сферических функций, радиальная часть, $g_l(r; \tilde{r})$, удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & \left[-1 + \frac{8\delta(r)}{(|r|+a)} q_1 + \frac{4\delta(r)}{(|r|+a)} q_2 \right] \frac{d^2 g_l(r, \tilde{r})}{dr^2} + \left[-\frac{2\operatorname{sgn}(r)}{(|r|+a)} + \left(\frac{8\delta'(r)}{(|r|+a)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{16\operatorname{sgn}(r)\delta(r)}{(|r|+a)^2} \right) q_1 + \left(\frac{4\delta'(r)}{(|r|+a)} + \frac{4\operatorname{sgn}(r)\delta(r)}{(|r|+a)^2} \right) q_2 \right] \frac{dg_l(r, \tilde{r})}{dr} \\ & - l(l+1) \left[-\frac{1}{(|r|+a)^2} + \frac{8\delta(r)}{(|r|+a)^3} q_1 + \frac{2\delta(r)}{(|r|+a)^3} q_2 \right] g_l(r, \tilde{r}) \\ & = \frac{\delta(r; \tilde{r})}{(|r|+a)^2} \end{aligned} \quad (11)$$

Решение этого уравнения представим в следующем виде

$$g_l(r; \tilde{r}) = \theta(r - \tilde{r}) p_{nl}(r) q_{nl}(\tilde{r}) + \theta(\tilde{r} - r) p_{nl}(\tilde{r}) q_{nl}(r), \quad (12)$$

где моды $p_{nl}(r)$ и $q_{nl}(r)$ удовлетворяют соответствующим однородным уравнениям

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left\{ \left[-L^2 + q_1 \left(-2 + 2L'^2 + 4LL'' \right) + 2q_2 LL'' \right] \begin{Bmatrix} p'_{nl}(r) \\ q'_{nl}(r) \end{Bmatrix} \right\} \\ & - l(l+1) \left[-1 + \frac{4L''}{L} q_1 + \frac{L''}{L} q_2 \right] \begin{Bmatrix} p_{nl}(r) \\ q_{nl}(r) \end{Bmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

$p_{nl}(r)$ выбирается как решение, стремящееся к нулю при $r \rightarrow +\infty$ и расходящееся при $r \rightarrow -\infty$, а $q_{nl}(r)$ выбирается как решение, стремящееся к нулю при $r \rightarrow -\infty$ и расходящееся при $r \rightarrow +\infty$, то есть

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} p_{nl}(r) &= 0, & \lim_{r \rightarrow +\infty} q_{nl}(r) &= \infty, \\ \lim_{r \rightarrow -\infty} p_{nl}(r) &= \infty, & \lim_{r \rightarrow -\infty} q_{nl}(r) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Нормализации $g_l(r; \tilde{r})$ достигается путём интегрирования (11) по r от $\tilde{r} - \varepsilon$ до $\tilde{r} + \varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это приводит к условию на Вронсиан

$$\left[p_{nl} \frac{dq_{nl}}{dr} - q_{nl} \frac{dp_{nl}}{dr} \right] = \frac{1}{(|r| + a)^2}. \quad (15)$$

Обозначим область $r > 0$ как \mathcal{D}_+ , а область $r < 0$ как \mathcal{D}_- . В плоских областях \mathcal{D}_+ и \mathcal{D}_- , где $L(r) = \pm r + a$, $L'(r) = \pm 1$, $R(r) = 0$, уравнение(13) принимает вид

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r \pm a} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{(r \pm a)^2} \right\} \begin{Bmatrix} p_{nl} \\ q_{nl} \end{Bmatrix} = 0. \quad (16)$$

Независимые решения этих уравнений легко получить

$$\phi_1^\pm(r) = (a \pm r)^l, \quad \phi_2^\pm(r) = (a \pm r)^{-l-1}, \quad \text{для } l \geq 0. \quad (17)$$

Асимптотики этих решений при $l > 0$ обладают следующими свойствами

$$\begin{aligned} \phi_1^+|_{r \rightarrow +\infty} &\rightarrow \infty, & \phi_1^-|_{r \rightarrow -\infty} &\rightarrow \infty, \\ \phi_2^+|_{r \rightarrow +\infty} &\rightarrow 0, & \phi_2^-|_{r \rightarrow -\infty} &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Общие решения уравнений (16) являются линейными комбинациями независимых решений (17)

$$\begin{aligned} p_{nl}(r) &= \begin{cases} \alpha_1^+ \phi_1^+ + \beta_1^+ \phi_2^+, & r > 0 \\ \alpha_1^- \phi_1^- + \beta_1^- \phi_2^-, & r < 0 \end{cases}, \\ q_{nl}(r) &= \begin{cases} \alpha_2^+ \phi_1^+ + \beta_2^+ \phi_2^+, & r > 0 \\ \alpha_2^- \phi_1^- + \beta_2^- \phi_2^-, & r < 0 \end{cases}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\alpha_{1,2}^\pm$ и $\beta_{1,2}^\pm$ константы. Подставляя выражения (19) в (14) и учитывая (17), получим

$$\alpha_1^+ = 0, \quad \alpha_2^- = 0. \quad (20)$$

Тогда решения (19) сводятся к следующему виду

$$\begin{aligned} p_{nl}(r) &= \begin{cases} \beta_1^+ \phi_2^+, & r > 0 \\ \alpha_1^- \phi_1^- + \beta_1^- \phi_2^-, & r < 0 \end{cases}, \\ q_{nl}(r) &= \begin{cases} \alpha_2^+ \phi_1^+ + \beta_2^+ \phi_2^+, & r > 0 \\ \beta_2^- \phi_2^-, & r < 0 \end{cases}, \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя эти выражения в (15), получим

$$\frac{1}{(|r|+a)^2} = \begin{cases} \alpha_2^+ \beta_1^+ \left(\phi_2^+ \frac{d\phi_1^+}{dr} - \phi_1^+ \frac{d\phi_2^+}{dr} \right), & r > 0; \\ \alpha_1^- \beta_2^- \left(\phi_1^- \frac{d\phi_2^-}{dr} - \phi_2^- \frac{d\phi_1^-}{dr} \right), & r < 0. \end{cases} \quad (22)$$

С учётом (17) эти выражения можно переписать в виде

$$\frac{1}{(|r|+a)^2} = \begin{cases} \alpha_2^+ \beta_1^+ \left(\frac{2l+1}{(r+a)^2} \right), & r > 0; \\ \alpha_1^- \beta_2^- \left(\frac{2l+1}{(a-r)^2} \right), & r < 0. \end{cases} \quad (23)$$

Таким образом, мы получили следующие ограничения на $\alpha_{1,2}^\pm$ и $\beta_{1,2}^\pm$

$$\alpha_2^+ \beta_1^+ = \alpha_1^- \beta_2^- = \frac{1}{2l+1} \quad (24)$$

Чтобы найти решение во всем пространстве-времени, мы должнышить решения p_{nl} и q_{nl} и их производные по r на горловине кротовой норы $r=0$. Первое условие даёт

$$p_{nl}(-0) = p_{nl}(+0), \quad q_{nl}(-0) = q_{nl}(+0). \quad (25)$$

Это означает

$$\begin{aligned} (\alpha_1^- \phi_1^- + \beta_1^- \phi_2^-)|_{r=-0} &= \beta_1^+ \phi_2^+|_{r=0}, \\ (\alpha_2^+ \phi_1^+ + \beta_2^+ \phi_2^+)|_{r=0} &= \beta_2^- \phi_2^-|_{r=-0}, \end{aligned} \quad (26)$$

или

$$\begin{aligned} \alpha_1^- a^l + \beta_1^- \frac{1}{a^{l+1}} &= \beta_1^+ \frac{1}{a^{l+1}}, \\ \alpha_2^+ a^l + \beta_2^+ \frac{1}{a^{l+1}} &= \beta_2^- \frac{1}{a^{l+1}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Наличие δ -образного источника на горловине приводит к разрыву первых производных p_{nl} и q_{nl} на величину, которую можно определить, интегрируя уравнение (13) в интервале $(-\epsilon, \epsilon)$, а затем, переходя к пределу $\epsilon \rightarrow 0$. Это даёт

$$\begin{aligned} \left. \frac{dp_{nl}}{dr} \right|_{r=-0} &= \left. \frac{dp_{nl}}{dr} \right|_{r=+0} + \frac{2}{a^3} l(l+1)(4q_1 + q_2)p_{nl}(+0), \\ \left. \frac{dq_{nl}}{dr} \right|_{r=-0} &= \left. \frac{dq_{nl}}{dr} \right|_{r=+0} + \frac{2}{a^3} l(l+1)(4q_1 + q_2)q_{nl}(+0). \end{aligned} \quad (28)$$

Используя (21) получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{dp_{nl}}{dr} \right|_{r=-0} &= -\alpha_1^- l a^{l-1} + \beta_1^- (l+1) a^{-l-2}, \\ \left. \frac{dp_{nl}}{dr} \right|_{r=+0} &= -\beta_1^+ (l+1) a^{-l-2}, \\ \left. \frac{dq_{nl}}{dr} \right|_{r=-0} &= \beta_2^- (l+1) a^{-l-2}, \\ \left. \frac{dq_{nl}}{dr} \right|_{r=+0} &= \alpha_2^+ l a^{l-1} - \beta_2^+ (l+1) a^{-l-2}. \end{aligned} \quad (29)$$

и, наконец, вставляя эти соотношения в (28), получим

$$\begin{aligned} \beta_1^- + \beta_2^+ - \frac{l}{l+1} \alpha_1^- a^{2l+1} &= 2l(4q_1 + q_2) \beta_1^+ a^{-2}, \\ (\beta_2^- + \beta_2^+) a^{-l+1} - \alpha_2^+ \frac{l}{l+1} a^{l+2} &= 2l(4q_1 + q_2) \alpha_2^+ a^l + 2l(4q_1 + q_2) \beta_2^+ a^{-l-1} \end{aligned} \quad (30)$$

Находя $\alpha_1^-, \alpha_2^+, \beta_1^-, \beta_2^-$ from (27, 30) и подставляя их в первое из выражений (24), получаем

$$\beta_1^+ \beta_2^+ = -\frac{a^{2l+1} \left(a^2 - 2l(l+1)(4q_1 + q_2) \right)}{2(2l+1)(l+1) \left(a^2 - l(4q_1 + q_2) \right)} \quad (31)$$

Если $r > \tilde{r} > 0$, тогда из (12, 21, 17, 24, 31) получаем $g_l(r, \tilde{r})$ в следующем виде

$$\begin{aligned} g_l(r, \tilde{r}) &= \alpha_2^+ \beta_1^+ \phi_2^+(r) \phi_1^+(\tilde{r}) + \beta_1^+ \beta_2^+ \phi_2^+(r) \phi_2^+(\tilde{r}) = \frac{1}{2l+1} (a+r)^{-l-1} (a+\tilde{r})^l \\ &\quad - \frac{a^{2l+1} \left(a^2 - 2l(l+1)(4q_1 + q_2) \right)}{2(2l+1)(l+1) \left(a^2 - l(4q_1 + q_2) \right)} (a+r)^{-l-1} (a+\tilde{r})^{-l-1} \end{aligned} \quad (32)$$

Тогда, потенциал (10) можно записать в виде

$$\begin{aligned} A_t(x, \tilde{x}) &= -e \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \gamma) g_l(r, \tilde{r}) = -\frac{e}{a+r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a+\tilde{r}}{a+r} \right)^l P_l(\cos \gamma) \\ &\quad + \frac{e}{2} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \gamma) \frac{a^{2l+1} \left(a^2 - 2l(l+1)(4q_1 + q_2) \right)}{(l+1) \left(a^2 - l(4q_1 + q_2) \right)} (a+r)^{-l-1} (a+\tilde{r})^{-l-1} \end{aligned} \quad (33)$$

Первый член правой части этого выражения можно легко вычислить, используя

$$\sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}, \quad (34)$$

что даёт

$$A_t^M(x, \tilde{x}) = -\frac{e}{a+r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a+\tilde{r}}{a+r} \right)^l P_l(\cos \gamma) = -\frac{e}{\sqrt{(a+r)^2 - 2(a+r)(a+\tilde{r})\cos(\gamma) + (a+\tilde{r})^2}} \quad (35)$$

Это выражение расходится при $r \rightarrow \tilde{r}$ и должно быть, как известно, перенормировано.

2. Перенормировка и результат

Процедура определения силы самодействия требует перенормировки векторного потенциала $A_k(x; \tilde{x})$, который расходится в пределе $x \rightarrow \tilde{x}$ (см., например, работы [25, 26]). Перенормировка векторного потенциала $A_t(x; \tilde{x})$, регуляризованного раздвижкой точек, достигается вычитанием из $A_t(x; \tilde{x})$ контрчлена Девитта-Швингера $A_{DS}(x; \tilde{x})$, а затем вычислением предела $x \rightarrow \tilde{x}$

$$A_{ren}(x) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow x} (A_t(x; \tilde{x}) - A_{DS}(x; \tilde{x})). \quad (36)$$

Для покоящегося скалярного заряда в статическом искривленном пространстве-времени контрчлен Девитта-Швингера $A_{DS}(x; \tilde{x})$ имеет следующий вид [27]

$$A_{DS}(x^i; \tilde{x}^i) = -e \left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma}} + \frac{\partial g_{tt}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\sigma^i}{4g_{tt}(\tilde{x})\sqrt{2\sigma}} \right), \quad (37)$$

где (см. [28, 29])

$$\begin{aligned} \sigma^i &= -(x^i - \tilde{x}^i) - \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i (x^j - \tilde{x}^j) (x^k - \tilde{x}^k) \\ &\quad - \frac{1}{6} \left(\Gamma_{jm}^i \Gamma_{kl}^m + \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial \tilde{x}^l} \right) (x^j - \tilde{x}^j) (x^k - \tilde{x}^k) (x^l - \tilde{x}^l) + O((x - \tilde{x})^4), \\ \sigma &= \frac{g_{ij}(\tilde{x})}{2} \sigma^i \sigma^j, \end{aligned} \quad (38)$$

Γ_{jk}^i -символы Кристоффеля, вычисленные в точке \tilde{x} . Контрчлен Девитта-Швингера $A_{Ds}(x; \tilde{x})$ в пределе $t = \tilde{t}, \theta = \tilde{\theta}, \varphi = \tilde{\varphi}$ можно легко вычислить в пространстве-времени с метрикой (1)

$$A_{Ds}(r; \tilde{r}) = -\frac{e}{|r - \tilde{r}|} \quad (39)$$

Таким образом, мы получаем выражение для перенормированного потенциала в области $r > 0$

$$\begin{aligned} A_t^{ren}(r) &= \lim_{\tilde{r} \rightarrow r} (A_t(r, \tilde{r}) - A_{Ds}(r, \tilde{r})) \\ &= \frac{e}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^{2l+1} (a^2 - 2l(l+1)(4q_1 + q_2))}{(l+1)(a^2 - l(4q_1 + q_2))} (a+r)^{-2l-2}. \end{aligned} \quad (40)$$

A_{ren} в области $r < 0$ совпадает с этим выражением в силу симметрии задачи. Потенциал самодействия и тетрадная компонента силы самодействия имеют вид

$$U^{self} = -\frac{e}{2} A_t^{ren}, \quad (41)$$

$$F^{(r)} = -\frac{\partial U^{self}}{\partial r} = -\frac{e^2}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^{2l+1} (a^2 - 2l(l+1)(4q_1 + q_2))}{(a^2 - l(4q_1 + q_2))} (a+r)^{-2l-3}. \quad (42)$$

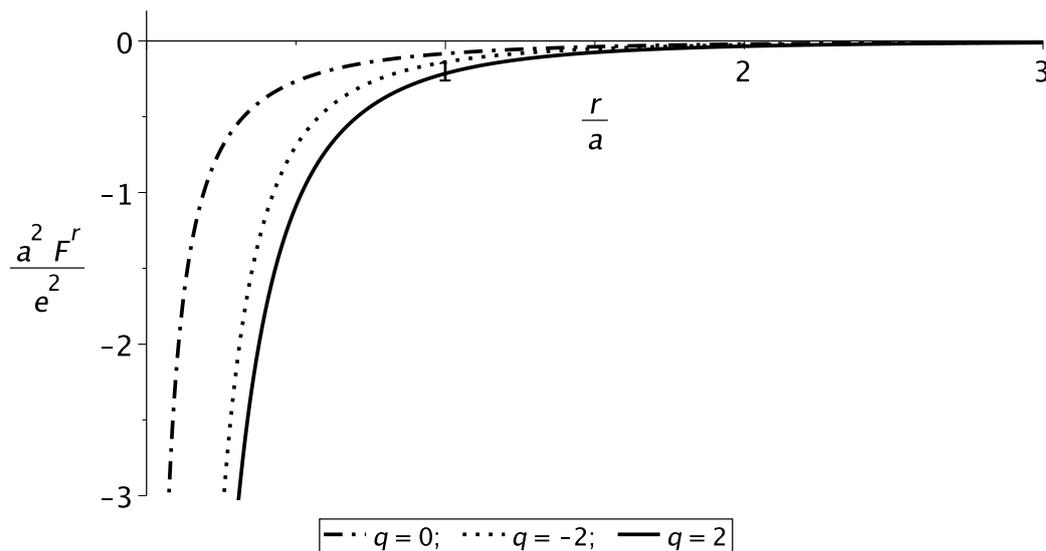


Рис. 1. График $F^{(r)}$ для различных значений $q = \frac{4q_1 + q_2}{a^2}$ vs $\frac{r}{a}$.

Заключение

Расходимость $F^{(r)}$ в окрестности $r = 0$ связана с недостатком рассмотренной модели кротовой норы (модель с бесконечно короткой горловиной). В этой области её использование некорректно. Многочисленные описания эффекта самодействия в кротовых норах с гладкой горловиной показывают, что подобной расходимости в таких кротовых норах не возникает.

В частном случае $4q_1 + q_2 = 0$ результат (42) совпадает с рассмотренным ранее в работе [30].

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-02-00496. Работа выполнена также за счёт средств субсидии, выделенной в рамках государ-

ственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

Список литературы

1. Poisson E., Pound A., Vega I. The motion of point particles in curved spacetime. *Living Rev. Rel.*, 2011, vol. 14, pp. 1–190.
2. Oltean M., Epp R., Sopena C.F., Spallicci A., and Mann R. The motion of localized sources in general relativity: gravitational self-force from quasilocal conservation laws, 2019, arXiv:1907.03012.
3. Zimmerman P., Poisson E. Gravitational self-force in nonvacuum spacetimes. *Phys. Rev. D*, 2014, vol. 90, 084030.
4. Bini D., Geralico A. New gravitational self-force analytical results for eccentric equatorial orbits around a Kerr black hole: Gyroscope precession. *Phys. Rev. D*, 2019, vol. 100, 104003.
5. Barack L. Gravitational self force in extreme mass-ratio inspirals. *Class. Quant. Grav.*, 2009, vol. 26, 213001, arXiv:0908.1664.
6. Barack L. and Pound A. Self-force and radiation reaction in general relativity. *Reports on Progress in Physics*, 2018, vol. 82, 016904.
7. Copson E.T. On Electrostatics in a Gravitational Field. *Proc. R. Soc. A. Math. Phys. Eng. Sci.*, 1928, vol. 118 (779). <https://doi.org/10.1098/rspa.1928.0044>
8. Hanni R.S., Ruffini R. Lines of force of a point charge near a schwarzschild black hole. *Phys. Rev. D.*, 1973, vol. 8(10), pp. 3259–3265. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.8.3259>
9. Smith A.G., Will C.M. Force on a static charge outside a Schwarzschild black hole. *Phys. Rev. D*, 1980, vol. 22, pp. 1276–1284.
10. Lohiya D. Classical self-force on an electron near a charged, rotating black hole. *J. Phys. A Math. Gen.*, 1982, vol. 15(6), pp. 1815–1819. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/15/6/020>
11. Leaute B., Linet B. Electrostatics in a Reissner-Nordström space-time. *Phys. Lett. A*, 1976, vol. 58 (1), pp. 5–6. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(76\)90529-6](https://doi.org/10.1016/0375-9601(76)90529-6)
12. Zel'nikov I., Frolov V.P. Influence of gravitation on the self-energy of charged particles. *Sov. Phys. JETP*, 1982, vol. 55, pp. 191–198.
13. Leaute B., Linet B. Self interaction of a point charge in the Kerr space-time. *J. Phys. A*, 1982, vol. 15, pp. 1821–1825.
14. Leaute B. Electromagnetism in Kerr space-time. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor.*, 1977, vol. 27, pp. 167–173.
15. Burko L.M., Liu Y.T. Self-force on a scalar charge in the space-time of a stationary, axisymmetric black hole. *Phys. Rev. D*, 2001, vol. 64, 024006.
16. Bezerra de Mello E.R., Saharian A.A. Electrostatic self-interaction in the spacetime of a global monopole with finite core. *Classical and Quantum Gravity*, 2007, vol. 24, pp. 2389–2400. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/24/9/015>
17. Linet B. Force on a charge in the space-time of a cosmic string. *Phys. Rev. D*, 1986, vol. 33, pp. 1833–1834.
18. Linet B. On the wave equation in the spacetime of a cosmic string. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 1986, vol. 45, pp. 249–256.
19. Smith A. Gravitational effects of an infinite straight cosmic string on classical and quantum fields: Self-forces and vacuum fluctuations. *The Formation and Evolution of Cosmic Strings*, Cambridge: Cambridge University Press, 1990, pp. 263–293.
20. Bezerra V.B. and Khusnutdinov N. Self-force on a scalar particle in a class of wormhole spacetimes. *Phys. Rev. D*, 2009, vol. 79, 064012.
21. Popov A. Self-force on a static charge in the long throat of a wormhole. *General Relativity and Gravitation*, 2013, vol. 45, pp. 1567–1578.
22. Taylor P. Self-force on an arbitrarily coupled static scalar particle in a wormhole space-time. *Phys. Rev. D*, 2013, vol. 87, 024046.
23. Popov A.A., Aslan O. Scalar self-force on static charge in a long throat. *International Journal of Modern Physics A*, 2015, vol. 30 (22), 1550143. <https://doi.org/10.1142/s0217751x15501432>

24. Balakin A.B., Lemos J.P.S. Non-minimal coupling for the gravitational and electromagnetic fields: a general system of equations. *Class. Quant. Grav.*, 2005, vol. 22, pp. 1867–11880.
25. Rosenthal E. Massive field approach to the scalar self force in curved space-time. *Phys. Rev. D*, 2004, vol. 69, 064035.
26. Rosenthal E. Scalar self force on a static particle in Schwarzschild using the massive field approach. *Phys. Rev. D*, 2004, vol. 70, 124016.
27. Khusnutdinov N., Popov A., Lipatova L. Self-force of a point charge in the spacetime of a massive wormhole. *Classical and Quantum Gravity*, 2010, vol. 27, 215012.
28. Synge J.L. *Relativity: The General Theory*. Amsterdam: North-Holland, 1960.
29. Popov A. Local expansion of the bivector of geodesic parallel displacement. *Gravitation & Cosmol.*, 2007, vol. 13, pp. 119–122.
30. Khusnutdinov N., Bakhmatov I. Self-action of a point charge in a wormhole space-time. *Phys. Rev. D*, 2007, vol. 76, 124015.

References

1. Poisson E., Pound A., Vega I. The motion of point particles in curved spacetime. *Living Rev. Rel.*, 2011, vol. 14, pp. 1–190.
2. Oltean M., Epp R., Sopena C.F., Spallicci A., and Mann R. The motion of localized sources in general relativity: gravitational self-force from quasilocal conservation laws, 2019, arXiv:1907.03012.
3. Zimmerman P., Poisson E. Gravitational self-force in nonvacuum spacetimes. *Phys. Rev. D*, 2014, vol. 90, 084030.
4. Bini D., Geralico A. New gravitational self-force analytical results for eccentric equatorial orbits around a Kerr black hole: Gyroscope precession. *Phys. Rev. D*, 2019, vol. 100, 104003.
5. Barack L. Gravitational self force in extreme mass-ratio inspirals. *Class. Quant. Grav.*, 2009, vol. 26, 213001, arXiv:0908.1664.
6. Barack L. and Pound A. Self-force and radiation reaction in general relativity. *Reports on Progress in Physics*, 2018, vol. 82, 016904.
7. Copson E.T. On Electrostatics in a Gravitational Field. *Proc. R. Soc. A. Math. Phys. Eng. Sci.*, 1928, vol. 118 (779). <https://doi.org/10.1098/rspa.1928.0044>
8. Hanni R.S., Ruffini R. Lines of force of a point charge near a schwarzschild black hole. *Phys. Rev. D.*, 1973, vol. 8(10), pp. 3259–3265. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.8.3259>
9. Smith A.G., Will C.M. Force on a static charge outside a Schwarzschild black hole. *Phys. Rev. D*, 1980, vol. 22, pp. 1276–1284.
10. Lohiya D. Classical self-force on an electron near a charged, rotating black hole. *J. Phys. A Math. Gen.*, 1982, vol. 15(6), pp. 1815–1819. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/15/6/020>
11. Leaute B., Linet B. Electrostatics in a Reissner-Nordström space-time. *Phys. Lett. A*, 1976, vol. 58 (1), pp. 5–6. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(76\)90529-6](https://doi.org/10.1016/0375-9601(76)90529-6)
12. Zel'nikov I., Frolov V.P. Influence of gravitation on the self-energy of charged particles. *Sov. Phys. JETP*, 1982, vol. 55, pp. 191–198.
13. Leaute B., Linet B. Self interaction of a point charge in the Kerr space-time. *J. Phys. A*, 1982, vol. 15, pp. 1821–1825.
14. Leaute B. Electromagnetism in Kerr space-time. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor.*, 1977, vol. 27, pp. 167–173.
15. Burko L.M., Liu Y.T. Self-force on a scalar charge in the space-time of a stationary, axisymmetric black hole. *Phys. Rev. D*, 2001, vol. 64, 024006.
16. Bezerra de Mello E.R., Saharian A.A. Electrostatic self-interaction in the spacetime of a global monopole with finite core. *Classical and Quantum Gravity*, 2007, vol. 24, pp. 2389–2400. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/24/9/015>
17. Linet B. Force on a charge in the space-time of a cosmic string. *Phys. Rev. D*, 1986, vol. 33, pp. 1833–1834.
18. Linet B. On the wave equation in the spacetime of a cosmic string. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 1986, vol. 45, pp. 249–256.

19. Smith A. Gravitational effects of an infinite straight cosmic string on classical and quantum fields: Self-forces and vacuum fluctuations. *The Formation and Evolution of Cosmic Strings*, Cambridge: Cambridge University Press, 1990, pp. 263–293.
20. Bezerra V.B. and Khusnutdinov N. Self-force on a scalar particle in a class of wormhole spacetimes. *Phys. Rev. D*, 2009, vol. 79, 064012.
21. Popov A. Self-force on a static charge in the long throat of a wormhole. *General Relativity and Gravitation*, 2013, vol. 45, pp. 1567–1578.
22. Taylor P. Self-force on an arbitrarily coupled static scalar particle in a wormhole space-time. *Phys. Rev. D*, 2013, vol. 87, 024046.
23. Popov A.A., Aslan O. Scalar self-force on static charge in a long throat. *International Journal of Modern Physics A*, 2015, vol. 30 (22), 1550143. <https://doi.org/10.1142/s0217751x15501432>
24. Balakin A.B., Lemos J.P.S. Non-minimal coupling for the gravitational and electromagnetic fields: a general system of equations. *Class. Quant. Grav.*, 2005, vol. 22, pp. 1867–11880.
25. Rosenthal E. Massive field approach to the scalar self force in curved space-time. *Phys. Rev. D*, 2004, vol. 69, 064035.
26. Rosenthal E. Scalar self force on a static particle in Schwarzschild using the massive field approach. *Phys. Rev. D*, 2004, vol. 70, 124016.
27. Khusnutdinov N., Popov A., Lipatova L. Self-force of a point charge in the spacetime of a massive wormhole. *Classical and Quantum Gravity*, 2010, vol. 27, 215012.
28. Synge J.L. *Relativity: The General Theory*. Amsterdam: North-Holland, 1960.
29. Popov A. Local expansion of the bivector of geodesic parallel displacement. *Gravitation & Cosmol.*, 2007, vol. 13, pp. 119–122.
30. Khusnutdinov N., Bakhmatov I. Self-action of a point charge in a wormhole space-time. *Phys. Rev. D*, 2007, vol. 76, 124015.

Авторы

Аслан Осман, кафедра образовательных технологий в физике, Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 16а, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: alsucuk@gmail.com

Попов Аркадий Александрович, д. ф.-м. н., кафедра геометрии, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: apopov@kpfu.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Аслан О., Попов А.А. Самодействие электромагнитного заряда в кротовой норе с бесконечно короткой горловиной. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2020. № 1. С. 12–21.

Authors

Aslan Osman, Institute of Physics, Kazan Federal University, 16a Kremlyovskaya St., Kazan, 420008, Russia.
E-mail: alsucuk@gmail.com

Popov Arkadiy Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, 18 Kremlyovskaya St., Kazan, 420008, Russia.
E-mail: apopov@kpfu.ru

Please cite this article in English as:

Aslan O., Popov A.A. Self-action of electromagnetic charge in a wormhole with an infinitely short throat. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2020, no. 1, pp. 12–21.