УДК 530.12:531.51

ПЕНЛЕВЕ-ПОДОБНЫЕ КООРДИНАТЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАТИЧЕСКОГО ГРАВИТИРУЮЩЕГО ШАРА

Баранов А. М.[a,1]

[a] Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева (КГПУ), г. Красноярск, 660049, Россия.

Рассмотрена проблема введения координат для описания внутренних статических решений сферически симметричных гравитирующих объектов, аналогичных координатам Пенлеве для внешнего решения Шварцшильда. Показано каким образом метрику пространства-времени для внешнего решения Шварцшильда в координатах кривизн можно переписать в координатах Бонди и Пенлеве. Для известного внутреннего решения Шварцшильда, записанного в координатах кривизн, найдено аналитическое преобразование к Пенлеве-подобным координатам. Метрика для внутреннего решения Шварцшильда переписана в новых координатах и показано, что гравитационнное поле является конформно-плоским, как и должно быть для модели гравитирующего статического шара с однородным распределением плотности массы вещества. Процедура перехода к Пенлеве-подобным координатам обобщена на произвольную статическую сферически симметричную метрику пространства-времени. Продемонстрирована запись 4-метрики в Пенлеве-подобных коорднатах для параболического закона распределения плотности массы идеальной жидкости внутри гравитирущего шара путем перехода в общем случае от координат Бонди.

Ключевые слова: внешнее и внутреннее решения Шварцшильда, координаты Пенлеве, координаты кривизн, координаты Бонди, Пенлеве-подобные координаты, 4-метрика для статического гравитирующего шара, параболическое распределение плотности массы.

PAINLEVÉ-LIKE COORDINATES AND MODELING OF STATIC GRAVITATIONAL BALL

Baranov A. M.[a,1]

[a] Krasnoyarsk State Pedagogical University named after V.P. Astafyev, Krasnoyarsk, 660049, Russia.

The problem of coordinates introduction for the description of internal static spherical solutions of gravitating objects similar to the Painlevé coordinates for the Schwarzschild external solution is considered. It is shown how the space-time metric for the Schwarzschild external solution in coordinates of the curvature can be rewritten in Bondi's coordinates and the Painlevé coordinates. For the known the Schwarzschild internal solution in coordinates of the curvature an analytical transformation to Painlevé-like coordinates is found. The metric for Schwarzschild's internal solution is rewritten in new coordinates. It is shown the gravitational field is conformally flat in this case, as it has to be for the gravitating static ball model with a homogeneous distribution of the mass density of substance. The procedure of transition to Painleve-like coordinates is generalized for any static space-time metric of gravitating ball . The metric expression in Painleve-like coordinates for the parabolic distribution law of the mass density of the perfect fluid in the gravitating ball by transformation from Bondi's coordinates is demonstrated in general.

Keywords: Schwarzschild's external and interior solutions, the Painlevé coordinates, coordinates of curvatures, Bondi's coordinates, the Painlevé-like coordinates, 4-metric of static gravitating ball, parabolic law of mass density distribution.

PACS: 04.20.-q , 04.20.Cv , 04.20.Jb
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2019.4.13-22

[1]E-mail: alex_m_bar@mail.ru

Введение

Для описания внешнего гравитационного поля точечной массы в рамках общей теории относительности в 1916 г. К.Шварцшильдом было найдено в координатах кривизн решение [1],

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{1}$$

которое в последствии легло в основу описания гравитационного поля черной дыры. В 20-х годах XX века в результате дискуссии по вопросам теории относительности, и в частности о координатной записи внешнего решения Шварцшильда, П.Пенлеве предложил переписать это решение в новых координатах [2]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}}\, dtdr - dr^2 - r^2 d\Omega^2, \tag{2}$$

где M – масса тела; r – радиальная переменная; θ, φ – угловые кординаты; $d\Omega^2 = (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$; скорость света и ньютоновская постоянная здесь выбраны равными единице.

Пространственная метрика $dl^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$, которая является 3-метрикой евклидовой поверхности, в этом случае отвечает плоскому координатному 3-сечению при $t = const$. При этом $\delta_{ij} = diag(1,1,1);\ i,j = 1,2,3$.

Предложенная Пенлеве запись 4-метрики (2) приводится к компактному виду

$$ds^2 = dt^2 - \left(\sqrt{\frac{2M}{r}}\, dt - dr\right)^2 - r^2 d\Omega^2, \tag{3}$$

который позволяет ввести очень простые базисные дифференциальные 1-формы $\Theta^{(\alpha)}$ в касательном 4D пространстве-времени,

$$\Theta^{(\alpha)} = g^{(\alpha)}_{\mu}\, dx^{\mu}, \tag{4}$$

где индексы в круглых скобках суть тетрадные индексы; греческие индексы пробегают значения $0,1,2,3$; $g^{(\alpha)}_{\mu}$ – тетрады (базисные векторы касательного пространства-времени)

$$g^{(0)}_{\mu} = \delta^0_{\mu}; \qquad g^{(1)}_{\mu} = \sqrt{\frac{2M}{r}}\, \delta^0_{\mu} - \delta^1_{\mu}; \qquad g^{(2)}_{\mu} = r\, \delta^2_{\mu}; \qquad g^{(3)}_{\mu} = \sin\theta\, \delta^3_{\mu}. \tag{5}$$

Через эти 1-формы данная 4-метрика (2) может быть переписана как

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \Theta^{(\alpha)} \Theta^{(\beta)}, \tag{6}$$

где $\eta_{\alpha\beta} = diag(1,-1,-1,-1)$ – метрический тензор касательного пространства-времени (метрика Минковского), а базисные дифференциальные 1-формы Картана представляются как

$$\Theta^{(0)} = dt; \qquad \Theta^{(1)} = \sqrt{\frac{2M}{r}} dt - dr; \qquad \Theta^{(2)} = r\, d\theta; \qquad \Theta^{(3)} = r\, \sin\theta d\varphi. \tag{7}$$

Учитывая выше изложенное, небезынтересно было бы выявить явную связь координат Пенлеве с другими координатами, например, координатами кривизн и координатами Бонди.

1. Внешнее решение Шварцшильда и координаты Пенлеве

Внешнее решение Шварцшильда может быть записано в различных координатах. Взяв за исходную запись этого решения ту, которую предложил сам К.Шварцшильд в координатах кривизн (см. (1)), посмотрим как можно переписать обсуждаемое решение в других координатах.

Произведем переход к новой временной координате по правилу

$$t \to t + f(r); \qquad dt \to dt + f^{'}(r)dr, \tag{8}$$

где $f^{'}(r) \equiv df/dr$.

Поставляя в выражение для метрики (1) и приводя подобные члены, придем к следующей записи:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + 2f^{'} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dtdr + \left(\left(1 - \frac{2M}{r}\right)(f^{'})^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{9}$$

Если теперь в полученном выражении потребовать выполнения равенства $f^{'}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \pm 1$ для коэффициента при $dtdr$, то сразу получим

$$f^{'} = \pm 1 \Big/ \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \tag{10}$$

что приведет к исчезновению коэффициента при dr^2. Таким образом, метрика в записи (9) преобразуется к метрике внешнего решения Шварцшильда в координатах Бонди (см, например, [3])

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 \pm 2\, dtdr - r^2 d\Omega^2. \tag{11}$$

При этом, когда временная переменная интерпретируется как запаздывающее время, то выбирается знак плюс перед $dtdr$. Если же временная переменная является опережающим временем, то выбирается знак минус.

Что касается функции $f(r)$, то она легко находится из требования (10) и равна

$$\pm\, f(r) = r + 2M\, ln(r - 2M). \tag{12}$$

Однако, возможен другой вариант, если в записи (9) потребовать обращения коэффициента при dr^2 в минус единицу. В результате получим

$$\pm\, f^{'} = \frac{\sqrt{\frac{2M}{r}}}{1 - \frac{2M}{r}} = \frac{\sqrt{2Mr}}{r - 2M} = \sqrt{\frac{2M}{r}} \left(1 - \sqrt{\frac{M}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{r} + \sqrt{2M}} - \frac{1}{\sqrt{r} - \sqrt{2M}}\right)\right). \tag{13}$$

И окончательно находим

$$\pm\, f(r) = 2\sqrt{2M} \left(\sqrt{r} + \sqrt{\frac{M}{2}}\, ln \left(\frac{\sqrt{r} - \sqrt{2M}}{\sqrt{r} + \sqrt{2M}}\right)\right). \tag{14}$$

В этом случае коэффициент при $dtdr$ в (9) преобразуется к виду $2\sqrt{\frac{2M}{r}}$, а само выражение (9) оказывается совпадающим с записью метрики внешнего решения Шварцшильда в координатах Пенлеве (2).

2. Внутреннее решение Шварцшильда в Пенлеве-подобных координатах

Естественно, прежде всего возникает вопрос: а можно ли нечто подобное проделать и с внутренним решением, полученным К.Шварцшильдом [4] для однородного гравитирующего шара, заполненного нейтральной паскалевой несжимаемой жидкостью, в тех же координатах кривизн и в том же 1916 году?

Чтобы решить эту проблему, запишем 4-метрику для внутреннего решения Шварцшильда в координатах кривизн в виде (см, например, [5])

$$ds^2 = G^2_{Sch}(r)\,dt^2 - \frac{dr^2}{\varepsilon^2_{Sch}(r)} - r^2 d\Omega^2, \tag{15}$$

где $G_{Sch}(r) = \dfrac{1}{2}\left(3\sqrt{\varepsilon_{Sch}(R)} - \sqrt{\varepsilon_{Sch}(r)}\right)$, R – радиус шара, $\varepsilon_{Sch}(r) = 1 - \eta r^2 = 1 - \Phi(r)$, $\Phi(r)$ – аналог ньютоновского потенциал внутри шара, $\eta = (1/3)\varkappa\mu_0$, $\mu_0 = const$ – плотность массы идеальной жидкости, $\varkappa = 8\pi$ – постоянная Эйнштейна.

Снова перейдем к новой временной переменной как это было сделано в (8) и подставим в метрику (15). После приведения подобных членов получаем

$$ds^2 = G^2_{Sch}(r)\,dt^2 - 2G^2_{Sch}(r)\,f^{'}(r)\,dtdr - \left(G^2_{Sch}(r)\,f^{'2}(r) - \frac{1}{\varepsilon^2_{Sch}(r)}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{16}$$

Если потребовать обращения в ноль коэффициента при dr^2, то приходим к записи в известных координатах Бонди с

$$f^{'}(r) = \pm\frac{1}{G_{Sch}(r)}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_{Sch}(r)}}. \tag{17}$$

Выберем знак минус, чтобы новая координата времени имела смысл запаздывающего времени. Тогда метрика (3) запишется как [1]

$$ds^2 = G^2_{Sch}(r)\,dt^2 + 2\frac{G_{Sch}(r)}{\sqrt{\varepsilon_{Sch}(r)}}\,dtdr - r^2 d\Omega^2 = F_{Sch}(r)dt^2 + 2L_{Sch}(r)\,dtdr - r^2 d\Omega^2, \tag{18}$$

где $F_{Sch}(r) = g_{00}(r)$, $L_{Sch}(r) = g_{01}(r)$, а явный вид этих функций для данного случая очевиден из выражения (18).

Если теперь потребовать равенства единице выражения в скобках при dr^2, эквивалентному требованию, чтобы координатное 3-сечение $t = const$ было евклидовым, то для производной $f^{'}(r)$ получим выражение в виде

$$f^{'}(r) = \frac{1}{G_{Sch}(r)}\sqrt{\frac{1-\varepsilon_{Sch}(r)}{\varepsilon_{Sch}(r)}} \tag{19}$$

или

$$df(r) = \frac{2\,\eta r\,dr}{(3\sqrt{1-\eta R^2} - \sqrt{1-\eta r^2})\,\sqrt{1-\eta r^2}} = 2\,d(\ln(3\sqrt{1-\eta R^2} - \sqrt{1-\eta r^2})). \tag{20}$$

Отсюда следует

$$f(r) = 2\ln(3\sqrt{1-\eta R^2} - \sqrt{1-\eta r^2}) \equiv \ln\left(\left(3\sqrt{1-\eta R^2} - \sqrt{1-\eta r^2}\right)^2\right) \tag{21}$$

или

$$f(r) = \ln(4\,G^2_{Sch}(r)) = \ln(4\,g^{Sch}_{00}), \tag{22}$$

то есть преобразование (8) для данного случая справедливо в записи

$$t \to t + \ln(4\,G^2_{Sch}(r)). \tag{23}$$

В свою очередь метрика (16) принимает вид

$$ds^2 = G^2_{Sch}(r)\,dt^2 - 2G_{Sch}(r)\sqrt{\frac{1-\varepsilon_{Sch}(r)}{\varepsilon_{Sch}(r)}}\,dtdr - -dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{24}$$

[1] Внутреннее решение Шварцшильда в такой записи было получено в [6, 7]. Там же введена связь между функциями: $\varepsilon(r) = F(r)/L^2(r)$.

Если в этом выражении добавить и отнять слагаемое $G^2_{Sch}(r)\,(1-\varepsilon_{Sch}(r))/(\varepsilon_{Sch}(r))\,dt^2$, то метрика (24) перепишется как

$$ds^2 = G^2_{Sch}(r)\,dt^2 + \frac{G^2_{Sch}(r)}{(\varepsilon_{Sch}(r))}\,(1-\varepsilon_{Sch}(r))\,dt^2 - \\ - \frac{G^2_{Sch}(r)}{(\varepsilon_{Sch}(r))}\,(1-\varepsilon_{Sch}(r))\,dt^2 - 2G_{Sch}(r)\sqrt{\frac{1-\varepsilon_{Sch}(r)}{\varepsilon_{Sch}(r)}}\,dtdr - -dr^2 - r^2d\Omega^2. \quad (25)$$

Из этой записи метрики видно, что ее можно преобразовать следующим образом, выделяя полный квадрат,

$$-\frac{G^2_{Sch}(r)}{(\varepsilon_{Sch}(r))}\,(1-\varepsilon_{Sch}(r))\,dt^2 - 2G_{Sch}(r)\sqrt{\frac{1-\varepsilon_{Sch}(r)}{\varepsilon_{Sch}(r)}}\,dtdr - dr^2 = \\ = -\left(\frac{G_{Sch}(r)}{\sqrt{\varepsilon_{Sch}(r)}}\sqrt{1-\varepsilon_{Sch}(r)}\,dt - dr\right)^2, \quad (26)$$

а оставшиеся слагаемые при dt^2 можно свести к выражению

$$\left(G^2_{Sch}(r) + \frac{G^2_{Sch}(r)}{(\varepsilon_{Sch}(r))}\,(1-\varepsilon_{Sch}(r))\right)dt^2 = \left(\frac{G^2_{Sch}(r)}{\varepsilon_{Sch}(r)}\right)dt^2. \quad (27)$$

Объединяя результаты (26) и (27), получим метрику (24) в виде, квазиподобном внешней шварцшильдовской метрике в координатах Пенлеве,

$$ds^2 = \left(\frac{G^2_{Sch}(r)}{\varepsilon_{Sch}(r)}\right)dt^2 - \left(\frac{G_{Sch}(r)}{\sqrt{\varepsilon_{Sch}(r)}}\sqrt{1-\varepsilon_{Sch}(r)}\,dt - dr\right)^2 - r^2d\Omega^2 \quad (28)$$

или, учитывая ранее введенные соотношения между метрическими функциями $G(r), F(r), L(r), \varepsilon(r)$,

$$ds^2 = L^2_{Sch}(r)\,dt^2 - \left(L_{Sch}(r)\sqrt{1-\varepsilon_{Sch}(r)}\,dt - dr\right)^2 - r^2d\Omega^2. \quad (29)$$

Для такой записи внутренней метрики Шварцшильда легко вводятся базисные дифференциальные 1-формы

$$\Theta^{(0)} = L_{Sch}(r)\,dt;\;\; \Theta^{(1)} = L_{Sch}(r)\sqrt{1-\varepsilon_{Sch}(r)}\,dt - dr;\;\; \Theta^{(2)} = rd\theta;\;\; \Theta^{(3)} = r\sin\theta d\varphi, \quad (30)$$

которые позволяют переписать выражение (16) в виде (6) с тетрадной метрикой $g_{(\alpha)(\beta)}$, совпадающей с метрикой Минковского $\eta_{\alpha\beta}$, являющейся теперь метрикой касательного пространства-времени.

Из первых уравнений структуры Картана

$$\mathbf{d}\Theta^{(\alpha)} = -\omega^{(\alpha)}_{\cdot\;(\beta)} \wedge \Theta^{(\beta)}, \quad (31)$$

где $\mathbf{d}$ -– внешний дифференциал, а операция $\wedge$ обозначает внешнее произведение, находим отличные от нуля дифференциальные 1-формы связности $\omega_{(\alpha)(\beta)}$.

В силу постоянства тетрадной метрики ($dg_{(\alpha)(\beta)} = 0$) 1-формы связности обладают свойством антисимметричности $\omega_{(\alpha)(\beta)} = -\omega_{(\beta)(\alpha)}$. Это облегчает дальнейшее нахождение тетрадных компонент тензора кривизны $R^{(\alpha)}_{\cdot\;(\beta)(\gamma)(\delta)}$ из вторых уравнения структуры Картана

$$\Omega^{(\alpha)}_{\cdot\;(\beta)} = \frac{1}{2}R^{(\alpha)}_{\cdot\;(\beta)(\gamma)(\delta)}\,\Theta^{(\gamma)} \wedge \Theta^{(\delta)} = d\omega^{(\alpha)}_{\cdot\;(\beta)} + \omega^{(\alpha)}_{\cdot\;(\sigma)} \wedge \omega^{(\sigma)}_{\cdot\;(\beta)}\,, \quad (32)$$

где $\Omega_{(\alpha)(\beta)} = -\Omega_{(\beta)(\alpha)}$ — 2-форма кривизны.

Тензор Риччи по известным компонентам тензора кривизны находится как $R_{(\beta)(\gamma)} = R^{(\alpha)}_{\cdot\;(\beta)(\gamma)(\alpha)}$, а скалярная кривизна есть свертка тензора Риччи $R^{(\beta)}_{\cdot\;(\beta)} = R$.

Зная тензор кривизны, тензор Риччи и скалярную кривизну, нетрудно построить тензор конформной кривизны Вейля

$$W_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)} = R_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)} + R_{(\gamma)[(\alpha)}\eta_{\beta]\delta} - R_{(\delta)[(\alpha)}\eta_{\beta]\gamma} - \frac{1}{3}R\,\eta_{\gamma[\alpha}\eta_{\beta]\alpha}. \tag{33}$$

Как известно смена координат не приводит к изменению тензора кривизны и тензора Вейля. Поэтому, вычисляя тензор Вейля для метрики (28) в Пенлеве-подобных координатах, получаем отсутствие ненулевых компонент тензора Вейля, как это и реализуется для внутреннего решения Шварцшильда, гравитационное поле которого по алгебраической классификации Петрова [8] принадлежит к конформно-плоскому типу. Тем самым мы лишний раз убедились, алгебраическая классификация Петрова гравитационных полей не зависит от выбора координат, удобный выбор которых связан с решением гравитационных уравнений.

Таким образом, получение новой записи известного внутреннего решения Шварцшильда в новых координатах возможно позволит по иному взглянуть на внутренние решения уравнений Эйнштейна.

3. Введение Пенлеве-подобных координат для произвольного статического шара

После выше изложенного введения Пенлеве-подобных координат для внутреннего решения Шварцшильда перейдем к аналогичному описанию произвольного статического гравитирующего шара.

Запишем произвольную сферически-симметричную 4-метрику для статического случая в координатах кривизн как

$$ds^2 = F(r)\,dt^2 - \frac{1}{E(r)}dr^2 - r^2 d\Omega^2, \tag{34}$$

где $F(r) = G^2(r)$; функция $E(r)$ – аналог ранее введенной функции $\varepsilon(r)$.

Опять воспользуемся переходом к новой временной переменной по правилу (8). В результате применения такого преобразования метрика (34) принимает вид

$$ds^2 = G^2(r)\,dt^2 + 2\,G^2(r)f^{\,\prime}\,dtdr + \left(G^2(r)(f^{\,\prime})^2 - \frac{1}{E(r)}\right)\,dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{35}$$

Если теперь потребовать отсутствия метрического коэффициента при dr^2, то получим

$$f^{\,\prime} = \pm\frac{1}{G(r)\sqrt{E(r)}} \tag{36}$$

или

$$f(r) = \pm\int \frac{1}{G(r)\sqrt{E(r)}}\,dr = \pm\int \frac{1}{\sqrt{F(r)E(r)}}\,dr = \pm\int \frac{1}{L(r)E(r)}\,dr,, \tag{37}$$

где выбор знака связан в выбором временной переменной либо как запаздывающего времени, либо как опережающего. В дальнейшем будем считать, что используется запаздывающее время.

Зная метрические функции $G(r)$, $L(r)$, $E(r)$ из уравнений Эйнштейна можно восстановить функцию $f(r)$ из (37).

После выполнения вышеуказанного требования выражение для метрики (35) примет вид

$$ds^2 = G^2(r)\,dt^2 + 2\frac{G(r)}{\sqrt{E((r)}}\,dtdr - r^2 d\Omega^2 = ds^2 = F^2(r)\,dt^2 + 2L(r)\,dtdr - r^2 d\Omega^2, \tag{38}$$

который совпадает с записью 4-метрики для произвольного статического шара в координатах Бонди.

Выбирая метрический коэффициент при dr^2 равным минус единице, приходим к дифференциальному соотношению [2]

$$f'^2 = \frac{1}{G^2(r)}\left(\frac{1-E(r)}{E(r)}\right), \tag{39}$$

а метрика (35) переписывается как

$$ds^2 = G^2(r)\,dt^2 + 2\,G(r)\sqrt{\frac{1-E(r)}{E(r)}}\,dtdr - dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{40}$$

Это и есть запись 4-метрики для внутреннего произвольного статического решения гравитирующего шара в Пенлеве-подобных координатах, аналогичная записи внешнего решения Шварцшильда в выражении (2).

Однако метрику (40) можно переписать в более компактном виде, пригодном для введения простых базисных дифференциальных 1-форм как это сделано для записи 4-метрики Шварцшильда в формуле (3). Для этого необходимо в (40) прибавить и вычесть выражение

$$G^2((r)\left(\frac{1-E(r)}{E(r)}\right).$$

В результате получим

$$ds^2 = L^2(r)\,dt^2 - \left(L(r)\sqrt{1-E(r)}\,dt - dr\right)^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{41}$$

Здесь использовано соотношение $G^2(r)/E(r) = L^2((r)$.

В общем же случае сферически-симметричную 4-метрику для статического случая в Пенлеве-подобных координатах можно записать как

$$ds^2 = A^2(r)\,dt^2 - (B(r)\,dt - dr)^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{42}$$

или

$$ds^2 = \left(A^2(r) - B^2(r)\right)\,dt^2 + 2B(r)\,dtdr - dr^2 - r^2 d\Omega^2, \tag{43}$$

где введенные здесь функции связаны с функциями, использованными ранее, как

$$A(r) \equiv L(r) = \frac{G(r)}{\sqrt{E(r)}} = \sqrt{\frac{F(r)}{E(r)}}; \qquad B(r) = L(r)\sqrt{E(r)}$$

Кроме того,

$$A^2(r) - B^2(r) = L^2(r)E(r) = G^2(r) \equiv F(r); \qquad \frac{A(r)}{B(r)} = \frac{1}{\sqrt{1-E(r)}}.$$

Соответствующие базисные 1-формы для метрики (42) могут быть записаны как

$$\Theta^{(0)} = A(r)\,dt; \qquad \Theta^{(1)} = B(r)\,dt - dr; \qquad \Theta^{(2)} = r\,d\theta; \qquad \Theta^{(3)} = r\,\sin\theta d\varphi.$$

Далее, используя первые и вторые уравнения структуры Картана (31)-(32), можно найти компоненты тензора кривизны, тензора Риччи и скалярную кривизну, а затем построить гравитационные уравнения Эйнштейна с тензором энергии импульса идеальной жидкости, заполняющей гравитирующий шар. Для различных распределений плотности массы жидкости будем получать различные внутренние решения гравитационных уравнений в Пенлеве-подобных координатах.

[2] В работах [6,7] введена функция $\Phi(r) = 1 - E(r)$, являющаяся аналогом ньютоновского гравитационного потенциала внутри гравитирующего шара.

4. Внутреннее решение с параболическим распределением плотности массы для шара в Пенлеве-подобных координатах

В одном из случаев распределения плотности массы идеальной жидкости, приводящего к точному внутреннему решению уравнений гравитации для шара, поступим по другому. У нас уже есть запись внутренней метрики Шварцшильда в Пенлеве-подобных координатах, поэтому возьмем теперь точное решение для шара с плотностью массы μ, убывающей по параболическому закону,

$$\mu(r) = \mu_0\,(1 - r^2/R^2), \tag{44}$$

где μ_0 – центральная плотность массы; R – радиус шара; при этом на границе шара $\mu_{r=R} = 0$. Такой выбор функциональной зависимости плотности массы отвечает газообразной модели звезды (без резкой границы).

Данное решение и его обобщение, записанные в координатах Бонди, можно найти в ряде работ: [6]- [7], [9]- [13]. Найденные в указанных работах метрические функции можно было бы подставить в запись метрики (42) в явном виде. Однако в данном случае продемонстрируем переход от координат Бонди к Пенлеве-подобным координатам, воспользовавшись процедурой, описанной выше. Для этого запишем метрику для сферически симметричного распределения массы шара в координатах Бонди следующим образом:

$$ds^2 = g_{00}(r)\,dt^2 + 2\,g_{01}(r)\,dtdr - r^2 d\Omega^2 = F(r)\,dt^2 + 2\,L(r)\,dtdr - r^2 d\Omega^2. \tag{45}$$

Далее, проделаем все выкладки как и при переходе от координат кривизн, начиная с выбора нового времени по правилу (8), подстановки его в (45) и наложения условия равенства минус единице коэффициента при dr^2. В результате получим

$$f^{'} = \frac{L}{F}\left(\sqrt{1 - \frac{F}{L^2}} - 1\right) = \frac{L}{F}\left(\sqrt{1-\varepsilon} - 1\right). \tag{46}$$

После подстановки (46) в выражение для 4-метрики в новых переменных, приведения подобных членов и выделения квадрата дифференциальной 1-формы $\left(L(r)\sqrt{1-\varepsilon(r))}\,dt - dr\right)$ приходим к записи (41) с $E(r) \equiv \varepsilon(r)$, которая может быть преобразована к виду

$$ds^2 = L^2(x)\,d\tau^2 - \left(L(x)\sqrt{1-\varepsilon(x)}\,d\tau - dx\right)^2 - x^2 d\Omega^2, \tag{47}$$

где $x = r/R$ – безразмерный «радиус»; $\tau = t/R$ – безразмерное «время»; а явные записи функций $L(x)$ и $\varepsilon(x)$ взяты из упомянутых выше работ:

$$L(x) = \sqrt{\frac{F((x)}{\varepsilon(x)}} = \frac{G((x)}{\sqrt{\varepsilon(x)}}; \qquad G(x) = G_0 \cos\left(\Omega_0 \zeta(x) + \alpha\right);$$

$$\zeta(x) = \frac{\Omega_0}{\sqrt{4\Omega_0^2 - \eta^2}}\,Arsh\left(\frac{2\Omega_0^2}{\sqrt{4\Omega_0^2 - \eta^2}}\left(x^2 - \frac{\eta^2}{2\Omega_0^2}\right)\right); \quad \varepsilon(x) = 1 - \Phi(x) = 1 - \frac{\chi}{x}\int \mu(x)\,x^2 dx; \tag{48}$$

$\chi = \varkappa R^2$; $\Omega_0^2 = \chi\mu_0/5$.

Заключение

В работе рассмотрена проблема введения координат для описания внутренних статических решений сферически симметричных гравитирующих объектов, аналогичных координатам Пенлеве для внешнего решения Шварцшильда. Показано как метрику пространства-времени для внешнего решения Шварцшильда в координатах кривизн переписать в координатах Бонди и Пенлеве. На примере внутреннего решения Шварцшильда, записанного в координатах кривизн, для однородного гравитирущего шара получена запись 4-метрики в Пенлеве-подобных координатах и найдено соответствующее аналитическое преобразование. Показано, что соответствущее гравитационнное поле является конформно-плоским, как и должно быть для модели статического шара с однородным распределением плотности массы вещества.Процедура перехода к Пенлеве-подобным координатам обобщена на произвольную статическую сферически симметричную метрику пространства-времени. Продемонстрирована запись 4-метрики в Пенлеве-подобных коорднатах для параболического закона распределения плотности массы идеальной жидкости внутри гравитирущего шара.

В дальнейшем было бы интересным развить этот подход для описания в Пенлеве-подобных координатах внутренних сферически симметричных решений уравнений тяготения, моделирующих статический гравитирующий шар (как модель астрофизического объекта), заполненный идеальной жидкостью с различными функциональными поведениями плотности массы.

Список литературы

1. Schwarzschild K. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie (On the gravitational field of a point mass following Einstein's theory) // Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 1. 1916. P. 189–196.

2. Painlevé P. La mécanique classique et la théorie de la relativité // C. R. Acad. Sci. (Paris) 1921. Vol. 173. P. 677–680.

3. Захаров В.Д. Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна (Современные проблемы физики). М.: Наука, 1972. С. 119.

4. Schwarzschild K. Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie (On the gravitational field of a ball of incompressible fluid following Einstein's theory) // Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften. 1916. P. 424–434.

5. Синг Дж. Общая теория относительности. М.: ИЛ, 1963. С. 247–248

6. Баранов А.М. Внутреннее сферически-симметричное статическое решение уравнений Эйнштейна-Максвелла // Реф. журн."Изв.вузов (Физика)". Томск, Деп.ВИНИТИ 05.06.1973, № 6729-73.

7. Baranov A.M. An interior spherical static solution of Einstein-Maxwell equations // URL: https://arxiv.org/gr-qc/1712.01268.

8. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966. 495 с.

9. Баранов А.М. Сферически симметричное статическое решение уравнений Эйнштейна для идеальной жидкости /Деп. в ВИНИТИ 13.07.1976, № 2626-76.

10. Баранов А.М. Осцилляторный подход к описанию статической звезды с нейтральной и заряженной идеальной жидкостью // Вестник Красноярского государственного университета (Физико-математические науки). 2002. № 1. С. 5–12.

11. Баранов А.М. Об одном обобщении внутреннего сферически симметричного статического решения уравнений Эйнштейна с параболическим распределением плотности массы // Вестник Красноярского государственного университета (Физико-математические науки). 2004. № 5. С. 4–11.

12. Баранов А.М. Обобщение решения уравнений Эйнштейна-Максвелла для заряженного статического шара с параболическим распределением плотности массы // Вестник Красноярского государственного университета (Физико-математические науки). 2005. № 4. С. 6–14.

13. Баранов А.М. Модель внутреннего источника Райснера-Нордстрема // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2013. № 4. С. 5–20.

References

1. Schwarzschild K. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie (On the gravitational field of a point mass following Einstein's theory). *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 1,* 1916, pp. 189–196.

2. Painlevé P. La mécanique classique et la théorie de la relativité. *C.R.Acad. Sci. (Paris)*, 1921, vol. 173, pp. 677-680.

3. Zakharov V.D. *Gravitatsionnyye volny v teorii tyagoteniya Eynshteyna (Sovremennyye problemy fiziki).* Moscow: Nauka Publ., 1972, p. 119. (in Russian)

4. Schwarzschild K. Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie (On the gravitational field of a ball of incompressible fluid following Einstein's theory). *Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1916, pp. 424–434.

5. Synge J.L. *Relativity: The General Theory.* Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1960.

6. Baranov A.M. Vnutrenneye sfericheski-simmetrichnoye staticheskoye resheniye uravneniy Eynshteyna-Maksvella, *Ref. "Izv.vuzov (Fizika)", Tomsk*, Deposited in VINITI 05.06.1973, no. 6729-73, (in Russian)

7. Baranov A.M. An interior spherical static solution of Einstein-Maxwell equations. `https://arxiv.org/gr-qc/1712.01268`

8. Petrov A.Z. *Novyye metody v obshchey teorii otnositelnosti.* Moscow: Nauka Publ., 1966, 495 p. (in Russian)

9. Baranov A.M. Sfericheski simmetrichnoe staticheskoe reshenie uravnenij E'jnshtejna dlya ideal'noj zhidkosti /Deposited in VINITI 13.07.1976, no. 2626-76. (in Russian)

10. Baranov A.M. Oscillyatorny'j podxod k opisaniyu staticheskoj zvezdy' s nejtral'noj i zaryazhennoj ideal'noj zhidkost'yu. *Vestnik Krasnoyarskogo gosudarstvennogo universiteta (Fiziko-matematicheskie nauki)*, 2002, no. 1, pp. 5–12. (in Russian)

11. Baranov A.M. Ob odnom obobshhenii vnutrennego sfericheski simmetrichnogo staticheskogo resheniya uravnenij E'jnshtejna s parabolicheskim raspredeleniem plotnosti massy'. *Vestnik Krasnoyarskogo gosudarstvennogo universiteta (Fiziko-matematicheskie nauki)*, 2004, no. 5, pp. 4–11. (in Russian)

12. Baranov A.M. Obobshhenie resheniya uravnenij E'jnshtejna-Maksvella dlya zaryazhennogo staticheskogo shara s parabolicheskim raspredeleniem plotnosti massy'. *Vestnik Krasnoyarskogo gosudarstvennogo universiteta (Fiziko-matematicheskie nauki)*, 2005, no. 4, pp. 6–14. (in Russian)

13. Baranov A.M. Model' vnutrennego istochnika Rajsnera-Nordstrema. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2013, no. 4, pp. 5–20. (in Russian)

Авторы

Баранов Александр Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева (КГПУ), ул. Ады Лебедевой, 89, г. Красноярск, 660049, Россия.
E-mail: alex_m_bar@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Баранов А. М. Пенлеве-подобные координаты и моделирование статического гравитирующего шара // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2019. № 4. С. 13—22.

Authors

Baranov Alexandre Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Krasnoyarsk State Pedagogical University named after V.P. Astafyev, 89 Ada Lebedeva St., 660049, Krasnoyarsk, Russia.
E-mail: alex_m_bar@mail.ru

Please cite this article in English as:

Baranov A. M. Painlevé-like coordinates and modeling of static gravitational ball. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2019, no. 4, pp. 13–22.