

**ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МЕТОДОВ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ НАУКИ**

\*\*\*

УДК 533.951, 550.385

© Смолин С. В., 2019

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОТОКА ПРОТОНОВ КОЛЬЦЕВОГО ТОКА ЗЕМЛИ ДЛЯ ПИТЧ-УГЛА 90 ГРАДУСОВ**Смолин С. В.<sup>a,1</sup><sup>a</sup> Сибирский федеральный университет (СФУ), г. Красноярск, 660041, Россия

Как математическая модель предложено обыкновенное дифференциальное уравнение для аналитического описания перпендикулярного дифференциального потока заряженных частиц в магнитосфере Земли, которое зависит от времени  $t$  и нескольких параметров (параметр МакИлвейна, магнитное местное время или геомагнитная восточная долгота, индекс геомагнитной активности, показатель питч-углового распределения заряженных частиц или индекс анизотропии питч-углового распределения, но взятый для питч-угла 90 градусов при  $t = 0$ , средний показатель питч-углового распределения заряженных частиц на интервале времени вычисления, время жизни вследствие взаимодействий волна-частица). При определенных геофизических условиях и на временном интервале приблизительно не более чем три часа (когда индекс геомагнитной активности  $Kp = \text{const}$ ) или на большем временном интервале, когда  $Kp \approx \text{const}$ , уравнение решается аналитически. Получено простое аналитическое решение, которое зависит от времени и нескольких параметров. Произведено сравнение результатов по предложенной модели и по полной модели для области питч-углов от 0 до 180 градусов. Получено для перпендикулярного дифференциального потока протонов кольцевого тока Земли очень хорошее согласие с максимальной относительной ошибкой приблизительно несколько процентов (для рассмотренного примера 3,23 процента). Экспериментальные данные были собраны спутником "Cluster". Модель позволяет также оценивать для разных геофизических условий время жизни вследствие взаимодействий волна-частица. Вывод уравнений представлен в аппендиксе.

*Ключевые слова:* магнитосфера, уравнение питч-угловой диффузии, перпендикулярный дифференциальный поток, взаимодействия волна-частица, новая модель.

**THE ANALYTICAL DESCRIPTION OF THE EARTH'S RING CURRENT PROTON FLUX FOR THE PITCH ANGLE OF 90 DEGREES**Smolin S. V.<sup>a,1</sup><sup>a</sup> Siberian Federal University (SFU), Krasnoyarsk, 660041, Russia

As mathematical model is offered the ordinary differential equation for the analytical description of a perpendicular differential flux of the charged particles in the Earth's magnetosphere which depends on time  $t$  and several parameters (the McIlwain parameter, the magnetic local time or geomagnetic eastern longitude, the geomagnetic activity index, parameter of the charged particle pitch angle distribution or the pitch angle distribution anisotropy index but is taken for the pitch angle of 90 degrees at  $t = 0$ , the average parameter of the charged particle pitch angle distribution on an interval of time of calculation, the lifetime due to wave-particle interactions). Under the certain geophysical conditions and on a time interval approximately no more than three hours (when a geomagnetic activity index  $Kp = \text{const}$ ) or on a greater time interval, when  $Kp \approx \text{const}$ , the equation is solved analytically. The simple analytical solution is received which depends on time and several parameters. Comparison of results on the offered model and on full model for the pitch angle range from 0

<sup>1</sup>E-mail: smolinsv@inbox.ru

up to 180 degrees is lead. For a perpendicular differential flux of the Earth's ring current protons very good consent with the maximal relative error approximately some percent (for the considered example 3.23 percent) is received. Experimental data have been collected by the Cluster satellite. The model allows to estimate also for different geophysical conditions a lifetime due to wave-particle interactions. A conclusion of the equations is presented in an appendix.

*Keywords:* magnetosphere, pitch angle diffusion equation, perpendicular differential flux, wave-particle interactions, new model.

PACS: 52.65.-y, 94.30.-d

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2019.2.64-69

## Введение

Земной кольцевой ток - это электрический ток, текущий к западу вокруг Земли, обычно располагается на расстояниях между  $\sim 2$  и  $9 R_E$  ( $R_E$  - средний радиус Земли). Его источник, рост и спад сильно связаны с геомагнитными бурями. Захваченные энергичные ( $\sim$  десятки кэВ) положительные ионы ( $H^+$ ,  $He^+$  и  $O^+$ ) подвергаются азимутальному дрейфу и составляют кольцевой ток бури. Три первичных процесса находят ответственными за спад кольцевого тока: процессы кулоновских столкновений и обмена зарядами вместе с питч-угловой диффузией электромагнитными ионно-циклотронными волнами [1].

Недавно были выполнены численные исследования по динамике во время бури энергичных частиц радиационных поясов и также для частиц кольцевого тока Земли, так как их потоки находят сильно изменяющимися. Такая сильная вариация динамики радиационных поясов и кольцевого тока Земли рассматривается как вклад от взаимодействий волна-частица и от дрейфового резонанса, связанного с усиленными ультра низкочастотными волнами. Однако одновременное наблюдение и соответствующее моделирование питч-углового рассеяния протонов кольцевого тока электромагнитными ионно-циклотронными волнами во время магнитоспокойного периода ( $Kp < 3$ ) было сообщено редко [2]. Поэтому это первичная цель этого исследования.

## 1. Математическая модель

Одномерное модифицированное уравнение Фоккера-Планка (или уравнение питч-угловой диффузии) для плотности фазового пространства, описывающее только "чистую" питч-угловую диффузию с потерями от взаимодействий волна-частица, может быть выражено [3, 4]

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \sin \alpha \cdot D_{\alpha\alpha} \frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha \cos \alpha}{2L} \frac{dL}{dt} f \right) - \frac{f}{T_{wp}} + S_{\perp} \sin^2 \alpha \cdot f. \quad (1)$$

Здесь  $f$  - плотность фазового пространства (или функция распределения),  $t$  - время,  $L$  - параметр МакИлвейна,  $\alpha$  - локальный питч-угол от 0 до 180 градусов,  $D_{\alpha\alpha}$  - коэффициент питч-угловой диффузии [3, 4],  $dL/dt$  - радиальная скорость [3, 4],  $T_{wp}$  - время жизни вследствие взаимодействий волна-частица [3, 4],  $S_{\perp}$  - перпендикулярный коэффициент функции источника частиц ( $\alpha = 90^\circ$ ) [3, 4].

Уравнение (1) - это оригинальная модель в пространстве скоростей, которая содержит некоторые математические модели питч-угловой диффузии как частные случаи, например [5 - 7].

Используя (1), как новая математическая модель предлагается обыкновенное дифференциальное уравнение для аналитического описания перпендикулярного дифференциального потока заряженных частиц ( $\alpha = 90^\circ$ ) в магнитосфере Земли, которое зависит от времени и нескольких параметров:

$$\frac{dj_{\perp}}{dt} + \left( -\frac{1}{2L} \frac{dL}{dt} + \frac{\gamma_{\perp} - \gamma_{\perp 0}}{\gamma_{\perp 0} (\gamma_{\perp 0} + 2) T_{wp}} \right) j_{\perp} = 0, \quad (2)$$

где  $j_{\perp}$  - перпендикулярный дифференциальный поток заряженных частиц ( $j = 2mEf$ ,  $m$  - масса заряженных частиц,  $E$  - энергия частиц),  $\gamma_{\perp 0}$  - хорошо известный (когда  $j = j_{\perp} \sin^{\gamma} \alpha$ ) показатель питч-углового распределения заряженных частиц (или индекс анизотропии питч-углового распределения), но берется для питч-угла  $90^{\circ}$  при  $t = 0$ ,  $\gamma_{\perp}$  - средний показатель питч-углового распределения заряженных частиц на интервале времени вычисления (предполагается, что  $\gamma_{\perp} \approx \text{const}$ ).

Вывод уравнения (2) представлен в аппендиксе.

При определенных геофизических условиях и на временном интервале приблизительно не более чем три часа (когда индекс геомагнитной активности  $Kp = \text{const}$ ) или на большем временном интервале, когда  $Kp \approx \text{const}$ , уравнение (2) может быть решено аналитически.

Тогда аналитическое решение уравнения (2) есть

$$j_{\perp}(t) = j_{\perp 0} \exp \left( - \left( \frac{\pi \phi_2 L^3 \cos \phi}{7948800} + \frac{\gamma_{\perp} - \gamma_{\perp 0}}{\gamma_{\perp 0} (\gamma_{\perp 0} + 2) T_{wp}} \right) t \right). \quad (3)$$

Здесь  $j_{\perp 0}$  - перпендикулярный дифференциальный поток заряженных частиц при  $t = 0$ ,  $\phi_2$  в [8], а  $\phi$  - азимутальный угол (местное время LT = 0 ч в полночь) или геомагнитная восточная долгота в плоскости магнитного экватора.

Вывод уравнения (3) представлен в аппендиксе.

## 2. Экспериментальные данные и расчеты

Дальше будет использовано коррелированное наблюдение усиленных электромагнитных ионно-циклотронных волн и динамической эволюции потока протонов кольцевого тока, собранное спутником Cluster около положения  $L = 4,5$  в течение 26 – 27 марта 2003 г. в магнитоспокойный период ( $D_{st} > -10$  нТл) [2]. Показано, что потоки энергичных (5 – 30 кэВ) протонов находят спадающими быстро (например, за полчаса) для маленьких питч-углов, соответствуя активностям интенсивных электромагнитных ионно-циклотронных волн.

Для расчета мы должны взять следующие данные [2]:  $j_{\perp 0}(t = 0 \text{ с}) = 5,5894 \cdot 10^5$  ( $\text{см}^2 \text{ с стер кэВ}^{-1}$ ),  $j_{\perp}(t = 1800 \text{ с}) = 2,1073 \cdot 10^5$  ( $\text{см}^2 \text{ с стер кэВ}^{-1}$ ),  $Kp = 2,66$  или 3 -,  $L = 4,17$ ,  $\phi \equiv \text{MLT} = 22,58$  ч,  $\gamma_{\perp 0} = 0,5157$ ,  $\gamma_{\perp} = 0,5801$ ,  $E = 17,1$  кэВ. Затем используя (3) находим  $T_{wp} = 91,4988$  с и зависимость  $j_{\perp}$  от  $t$  на интервале  $t = (0 - 1800)$  с (Рис. 1).

Проведено сравнение результатов по предложенной модели (2) или (3) и по полной модели (1) для области питч-углов от 0 до 180 градусов. Получено для перпендикулярного дифференциального потока протонов кольцевого тока Земли очень хорошее согласие с максимальной относительной ошибкой приблизительно 3,23 %.

## Заключение

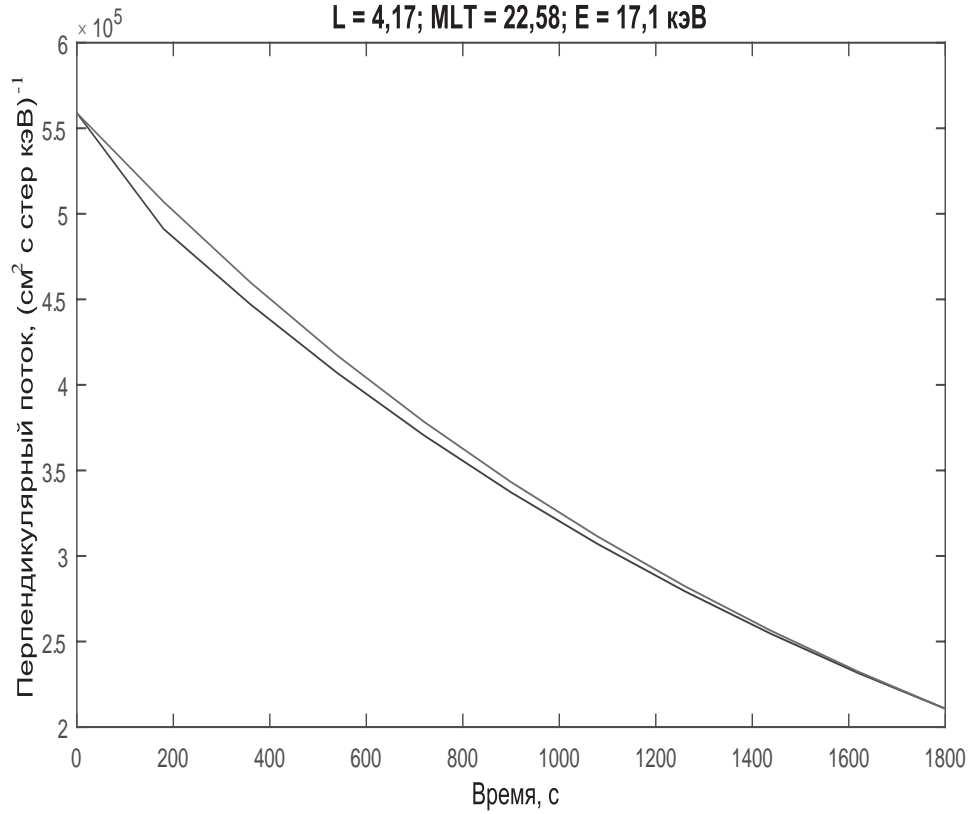
Как математическая модель предлагается обыкновенное дифференциальное уравнение для аналитического описания перпендикулярного дифференциального потока заряженных частиц в магнитосфере Земли, которое зависит от времени и нескольких параметров.

Модель позволяет также оценивать для разных геофизических условий время жизни вследствие взаимодействий волна-частица

Получено в рассмотренном примере для перпендикулярного дифференциального потока протонов кольцевого тока Земли очень хорошее согласие с максимальной относительной ошибкой приблизительно 3,23 %.

## Аппендикс

Вывод уравнений (2) и (3).



**Рис. 1.** Дифференциальные потоки протонов для питч-угла  $90^\circ$  по полной модели (1) – нижняя (синяя) линия и по предложенной модели (2) или (3) – верхняя (красная) линия.

Учитывая, что  $j = 2mEf$ ,  $m = \text{const}$ ,  $E = \text{const}$  и коэффициент питч-угловой диффузии предлагается определять [3, 4] следующим образом

$$D_{\alpha\alpha} = D_{\perp} \sin^2 \alpha = \frac{1}{\gamma_{\perp 0} (\gamma_{\perp 0} + 2) T_{wp}} \sin^2 \alpha, \quad (\text{A1})$$

сначала из (1) получаем уравнение

$$\frac{\partial j}{\partial t} = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \sin \alpha \cdot D_{\perp} \sin^2 \alpha \frac{\partial j}{\partial \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha \cos \alpha}{2L} \frac{dL}{dt} j \right) - \frac{j}{T_{wp}} + S_{\perp} \sin^2 \alpha \cdot j. \quad (\text{A2})$$

Затем берем производные и в итоге получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial j}{\partial t} = & D_{\perp} \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 j}{\partial \alpha^2} + \sin \alpha \cos \alpha \left( 3D_{\perp} - \frac{1}{2L} \frac{dL}{dt} \right) \frac{\partial j}{\partial \alpha} + \\ & + \left( - (2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \frac{1}{2L} \frac{dL}{dt} - \frac{1}{T_{wp}} + S_{\perp} \sin^2 \alpha \right) j. \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

При  $\alpha = 90^\circ$  и  $\frac{\partial j}{\partial \alpha}|_{\perp} = 0$  уравнение (A3) упрощается

$$\frac{dj}{dt}|_{\perp} \equiv \frac{dj_{\perp}}{dt} = D_{\perp} \frac{\partial^2 j}{\partial \alpha^2}|_{\perp} + \left( \frac{1}{2L} \frac{dL}{dt} - \frac{1}{T_{wp}} + S_{\perp} \right) j_{\perp}. \quad (\text{A4})$$

Исходя из зависимости  $j = j_{\perp} \sin^{\gamma} \alpha$ ,  $\gamma = \text{const} = \gamma_{\perp}$  можно доказать [7], что

$$\frac{\partial^2 j}{\partial \alpha^2}|_{\perp} = -\gamma_{\perp} j_{\perp}. \quad (\text{A5})$$

Тогда используя [3, 4]

$$S_{\perp} = \frac{(\gamma_{\perp 0} + 3)}{(\gamma_{\perp 0} + 2) T_{wp}}$$

и (A1), (A4), (A5), получается уравнение (2)  $\equiv$  (A6):

$$\begin{aligned} \frac{dj_{\perp}}{dt} + \left( -\frac{1}{2L} \frac{dL}{dt} + \frac{1}{T_{wp}} - S_{\perp} + D_{\perp} \gamma_{\perp} \right) j_{\perp} &= 0, \\ \frac{dj_{\perp}}{dt} + \left( -\frac{1}{2L} \frac{dL}{dt} + \frac{\gamma_{\perp} - \gamma_{\perp 0}}{\gamma_{\perp 0} (\gamma_{\perp 0} + 2) T_{wp}} \right) j_{\perp} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

Чтобы получить уравнение (3), возьмем следующее приближенное равенство [3, 4], используя баунс-усредненную радиальную дрейфовую скорость движения заряженных частиц (измеренную в [1/c]) в магнитосфере Земли

$$\frac{dL}{dt} \approx \left\langle \frac{dL}{dt} \right\rangle = -\Omega \frac{\phi_2}{\phi_0} L^4 \cos \phi = -\frac{2\pi \phi_2 L^4 \cos \phi}{24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 92}, \quad (\text{A7})$$

где  $\phi$  - азимутальный угол (местное время  $LT = 0$  часов в полночь) или геомагнитная восточная долгота в плоскости магнитного экватора,  $\Omega$  - угловая скорость вращения Земли,  $\phi_0 = 92$  кВ, а зависимость  $\phi_2$  (измеренная в [кВ]) от геомагнитной активности, т.е. от  $Kp$  - индекса, определяется по формуле [8]

$$\phi_2 = \frac{0,045}{(1 - 0,16Kp + 0,01Kp^2)^3}.$$

Полагая все параметры в уравнении (A6) постоянными (или приблизительно постоянными), находим точное (или приближенное) аналитическое решение уравнения (A6)  $\equiv$  (2) в виде (A8)  $\equiv$  (3):

$$j_{\perp}(t) = j_{\perp 0} \exp \left( - \left( \frac{\pi \phi_2 L^3 \cos \phi}{7948800} + \frac{\gamma_{\perp} - \gamma_{\perp 0}}{\gamma_{\perp 0} (\gamma_{\perp 0} + 2) T_{wp}} \right) t \right). \quad (\text{A8})$$

## Список литературы

1. Xiao F., Chen L., He Y., Su Z., Zheng H. Modeling for precipitation loss of ring current protons by electromagnetic ion cyclotron waves. *J. Atmos. Sol. Terr. Phys.* 2011; V. 73. № 1: pp. 106-111.
2. Xiao F., Yang C., Zhou Q., He Z., He Y., Zhou X., Tang L. Nonstorm time scattering of ring current protons by electromagnetic ion cyclotron waves. *J. Geophys. Res.* 2012; V. 117. A08204. doi: 10.1029/2012JA017922.
3. Смолин С.В. Моделирование питч-углового распределения на дневной стороне магнитосферы Земли // Журнал Сиб. Федерал. Унив. Сер. Мат. Физ. 2012. Т. 5. №. 2. С. 269-275.
4. Smolin S.V. Modeling the pitch angle distribution on the nightside of the Earth's magnetosphere. *Geomagnetism and Aeronomy.* 2015; V. 55. № 2: pp. 166-173.
5. Kennel C.F., Petschek H.E. Limit on stably trapped particle fluxes. *J. Geophys. Res.* 1966; V. 71. № 1: pp. 1-14.
6. Lyons L.R., Williams D.J. Quantitative aspects of magnetospheric physics. N.Y.: Springer; 1984.
7. Смолин С.В. Моделирование питч-угловой диффузии в магнитосфере Земли. Красноярск: редакционно-издательское предприятие "Либра", 1996. 205 с.
8. Nishida A. Geomagnetic diagnosis of the magnetosphere. N.Y.: Springer-Verlag; 1978.

## References

1. Xiao F., Chen L., He Y., Su Z., Zheng H. Modeling for precipitation loss of ring current protons by electromagnetic ion cyclotron waves. *J. Atmos. Sol. Terr. Phys.*, 2011, vol. 73, no. 1, pp. 106-111.
2. Xiao F., Yang C., Zhou Q., He Z., He Y., Zhou X., Tang L. Nonstorm time scattering of ring current protons by electromagnetic ion cyclotron waves. *J. Geophys. Res.*, 2012, vol. 117, A08204. doi: 10.1029/2012JA017922.
3. Smolin S.V. Modeling of pitch angle distribution on the dayside of the Earth's magnetosphere. *Zh. Sib. Federal. Univ., Ser. Mat. Fiz.*, 2012, vol. 5, no. 2, pp. 269-275. (in Russ.)

4. Smolin S.V. Modeling the pitch angle distribution on the nightside of the Earth's magnetosphere. *Geomagnetism and Aeronomy*, 2015, vol. 55, no. 2, pp. 166-173.
5. Kennel C.F., Petschek H.E. Limit on stably trapped particle fluxes. *J. Geophys. Res.*, 1966, vol. 71, no. 1, pp. 1-14.
6. Lyons L.R., Williams D.J. *Quantitative aspects of magnetospheric physics*. N.Y.: Springer, 1984. 312 p.
7. Smolin S.V. *Modeling of pitch angle diffusion in the Earth's magnetosphere*. Krasnoyarsk, "Libra" Publ., 1996. 205 p. (in Russ.)
8. Nishida A. *Geomagnetic diagnosis of the magnetosphere*. N.Y.: Springer-Verlag, 1978, 301 p.

## Авторы

**Смолин Сергей Викторович**, к.ф.-м.н., доцент, Сибирский федеральный университет (СФУ), проспект Свободный, д. 79, г. Красноярск, 660041, Россия.  
E-mail: smolinsv@inbox.ru

## Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Смолин С.В. Аналитическое описание потока протонов кольцевого тока Земли для питч-угла 90 градусов // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2019. № 2. С. 64–69.

## Authors

**Smolin Sergei Viktorovich**, Ph.D., Associate Professor, Siberian Federal University (SFU), Svobodny av., 79, Krasnoyarsk, 660041, Russia.  
E-mail: smolinsv@inbox.ru

## Please cite this article in English as:

Smolin S. V. The analytical description of the Earth's ring current proton flux for the pitch angle of 90 degrees. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2019, no. 2, pp. 64–69.