УДК 514.763: 514.8

О ПРОЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЯХ 5-МЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ. II. H-ПРОСТРАНСТВА ТИПА $\{41\}$

Аминова А. В.[a,1], Хакимов Д. Р.[b,2]

[a] Кафедра теории относительности и гравитации, Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия
[b] Кафедра геометрии, отделение математики, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, 420008, Россия

Исследуются пятимерные псевдоримановы многообразия (M, g), допускающие инфинитезимальные проективные преобразования. Для n-мерных собственно римановых и лоренцевых пространств эта задача была решена в работах Т. Леви-Чивита, А. З. Петрова, А. С. Солодовникова и А. В. Аминовой. Проблема классификации псевдоримановых многообразий произвольных сигнатуры и размерности по алгебрам и группам Ли проективных преобразований, поставленная более ста лет назад, остается открытой. В данной работе с помощью метода косонормального репера (Аминова) определяются пятимерные h-пространства типа $\{41\}$ и устанавливаются необходимые и достаточные условия существования проективных движений того же типа.

Ключевые слова: пятимерное псевдориманово многообразие, проективное преобразование, h-пространство типа $\{41\}$.

ON PROJECTIVE MOTIONS OF 5-DIMENSIONAL SPACES II. H-SPACES OF THE TYPE $\{41\}$

Aminova A. V.[a,1], Khakimov D. R.[b,2]

[a] Department of Relativity and Gravitation, Institute of Physics, Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, 420008, Russia
[b] Department of Geometry, Division of Mathematics, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, 420008, Russia

We study five-dimensional pseudo-Riemannian manifolds (M, g) that admit non-homothetic infinitesimal projective transformations. A similar problem for n-dimensional proper Riemannian and Lorentzian spaces was solved by T. Levi-Civita, A. Z. Petrov, A. S. Solodovnikov, and A. V. Aminova. For pseudo-Riemannian manifolds of arbitrary signature and dimension the problem of their classification on algebras and Lie groups of projective transformations, set over a hundred years ago, remains open. In this paper, using the method of the skew-normal frame (Aminova), five-dimensional h-spaces of type $\{41\}$ are defined and necessary and sufficient conditions for the existence of projective motions of the same type are established.

Keywords: five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, projective motion, h-space of the type $\{41\}$.

PACS: 11.10.Kk
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2019.1.45-55

[1]E-mail: asya.aminova@kpfu.ru
[2]E-mail: dzhamoliddink@mail.ru

Введение

Принципиальное значение для нахождения решений уравнений физических полей имеет выбор анзаца – общей конфигурации полевых потенциалов, устанавливаемой из теоретико-групповых соображений (анзац Виттена, процедура Форгача–Мантона построения анзацев янг-миллсовских и хиггсовских полей для широкого класса пространственно-временных симметрий и др.). Симметрии используются также для построения законов сохранения, составляющих основу любой физической теории. Согласно теореме Э. Нётер и исследованиям группы американских ученых проективные и аффинные движения приводят к фундаментальным механическим и полевым законам сохранения. Главная трудность при построении таких законов сохранения заключается, по мнению авторов, в нахождении указанных движений

Векторное поле X на многообразии M с проективной структурой Π называется *инфинитезимальным проективным преобразованием*, или *проективным движением* (п.д.), если порождаемая этим полем в окрестности каждой точки $p \in M$ локальная 1-параметрическая группа состоит из (локальных) проективных преобразований, т.е. автоморфизмов проективной структуры. Для этого необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$L_X g = h \tag{1}$$

(*обобщенное уравнение Киллинга*) и

$$\nabla h(Y,Z,W) = 2g(Y,Z)W\varphi + g(Y,W)Z\varphi + g(Z,W)Y\varphi \tag{2}$$

(*уравнение Эйзенхарта*), где $Y,Z,W \in TM$, $(n+1)\varphi = \mathrm{div}X$. Если $\varphi = const$, т. е. $\mathrm{div}X = const$, то проективное движение является аффинным, в частности, при $h = cg$ гомотетическим (преобразование подобия), а при $h = 0$ изометрическим (сохраняющим метрику g).

Данная статья посвящена проблеме определения псевдоримановх многообразий (M,g), допускающих алгебры Ли инфинитезимальных проективных (в частности, аффинных) преобразований, более широкие, чем алгебры Ли инфинитезимальных гомотетий. Подобная задача для n-мерных собственно римановых и лоренцевых пространств была решена в работах Т. Леви-Чивита, А. С. Солодовникова, А. З. Петрова и А. В. Аминовой ([4], см. обзор в [9]). Для псевдоримановых многообразий произвольных сигнатуры и размерности проблема их классификации по алгебрам и группам Ли проективных преобразований, поставленная более ста лет назад, остается открытой.

Классификация пространств, допускающих негомотетические проективные движения, основана на разбиении их по типам в соответствии с алгебраической структурой производной Ли $L_X g$ метрики g в направлении проективного движения X, определяемой в каждой точке $p \in V \subseteq M$ характеристикой Сегре χ тензора $h = L_X g$. Тип тензора $L_X g$ определяет тип проективного движения X и тип метрики g в области V. Такие метрики будем называть *h-метриками типа χ*, а соответствующие пространства – *h-пространствами типа χ*.

В работах [10] и [11] исследованы пятимерные h-пространства типов соответственно $\{221\}$ и $\{32\}$. В данной работе с помощью метода косонормального репера ([9], см. также [11], где приведены необходимые сведения, касающиеся определения и свойств косонормального репера) определяются пятимерные h-пространства типа $\{41\}$ (теорема 1) и устанавливаются необходимые и достаточные условия существования проективного движения типа $\{41\}$ (теорема 2).

1. Вычисление 1-формы связности.

Пусть $(Y_h = \underset{h}{\xi}{}^i \partial/\partial x^i)$ – косонормальный репер в области $V \subseteq M$, θ_h – каноническая 1-форма, сопряженная с Y_h. В терминах локальной координатной системы каноническая форма $\theta = \theta^i E_i$ задается соотношением ([9], с. 96)

$$\theta^i = \Theta^i_j dx^j \quad \left(dx^k = \underset{i}{\xi}{}^k \theta^i\right), \tag{3}$$

где $\left(\Theta^i_j\right)$ – обратная матрица для $\left(\underset{j}{\xi}{}^k\right)$:

$$\underset{k}{\xi}{}^i \Theta^k_j = \delta^i_j. \tag{4}$$

Пусть θ_h – каноническая 1-форма, сопряженная с Y_h, (Y_h) – (канонический) косонормальный репер в области $V \subseteq M$, в котором билинейные формы g и h имеют канонический вид

$$g|_V = \sum_{p=1}^{2} g_p, \;\; h|_V = \sum_{p=1}^{2} (\lambda_p + 2\varphi) g_p + h_0 \equiv a + 2\varphi g, \;\; 2\varphi = \sum_{p=1}^{2} \lambda_p,$$

где λ_1, λ_2 – не равные друг другу характеристические числа билинейной формы $a = h - 2\varphi g$ кратностей соответственно 4 и 1 (тип $\{41\}$),

$$g_1 = e_1(\theta_1\theta_4 + \theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_2 + \theta_4\theta_1), \quad g_2 = e_2\theta_5\theta_5,$$

$$h_0 = a_0 = e_1(\theta_1\theta_3 + \theta_2\theta_2 + \theta_3\theta_1) \tag{5}$$

$$(\tilde{1} = 4, \; \tilde{2} = 3, \; \tilde{3} = 2, \; \tilde{4} = 1, \; \tilde{5} = 5), \; e_1, e_2 = \pm 1.$$

Коэффициенты вращения Риччи $\gamma_{lpk} = -\gamma_{plk}$ определяются в области $V \subseteq M$ равенствами ([8], § 30)

$$\nabla_{Y_k} Y_l \equiv \sum_{p=1}^{5} e_p \gamma_{lpk} Y_{\tilde{p}} = \gamma^p_{lk} Y_p,$$

где $\gamma^p_{lk} = e_p \gamma_{l\tilde{p}k}$ – компоненты 1-формы связности ω^i_j в косорепере (Y_h):

$$\omega^i_j = \gamma^i_{jl}\theta^l = e_i \gamma_{j\tilde{i}l}\theta^l = \sum_{h=1}^{5} e_h e_i \gamma_{j\tilde{i}h}\theta_{\tilde{h}}. \tag{6}$$

После замены $h = a + 2\varphi g$ уравнение Эйзенхарта (2) в косонормальном репере (Y_h) примет вид

$$Y_r \bar{a}_{pq} + \sum_{h=1}^{5} e_h (\bar{a}_{hq}\gamma_{\tilde{h}pr} + \bar{a}_{ph}\gamma_{\tilde{h}qr}) = \bar{g}_{qr} Y_p\varphi + \bar{g}_{pr} Y_q\varphi$$

$(p, q, r = 1, \ldots, 5)$, что равносильно

$$d\bar{a}_{pq} + \sum_{h=1}^{n} e_h (\bar{a}_{hq}\omega_{p\tilde{h}} + \bar{a}_{ph}\omega_{q\tilde{h}}) = (Y_q\varphi)\theta_p + (Y_p\varphi)\theta_q, \tag{7}$$

где $\omega_{pq} = -\omega_{qp}$ есть 1-форма связности.

Подставив в (7) вместо $\bar{g}_{pq}$ и $\bar{a}_{pq}$ соответствующие канонические значения для типа $\{41\}$, получим

$$Y_1\varphi = Y_2\varphi = Y_3\varphi = 0, \;\; d\lambda_1 = \frac{1}{2}(Y_4\varphi)\theta_1, \;\; d\lambda_2 = 2(Y_5\varphi)\theta_5, \tag{8}$$

$$\omega_{13} = \frac{1}{2}(Y_4\varphi)\theta_1, \;\; \omega_{14} = -(Y_4\varphi)\theta_2, \;\; \omega_{15} = \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}\theta_1,$$

$$\omega_{24} = -(Y_4\varphi)\theta_3, \;\; \omega_{25} = \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}\theta_1 + \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}\theta_2,$$

$$\omega_{34} = -(Y_4\varphi)\theta_4, \;\; \omega_{35} = \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^3}\theta_1 + \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}\theta_2 + \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}\theta_3,$$

$$\omega_{45} = \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^4}\theta_1 + \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^3}\theta_2 + \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}\theta_3 + \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}\theta_4 + \frac{Y_4\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}\theta_5.$$

Ипользуя (6), найдем отсюда коэффициенты вращения Риччи:

$$\gamma_{314}=-\gamma_{134}=\frac{1}{2}e_1Y_4\varphi,\ \gamma_{413}=-\gamma_{143}=-e_1Y_4\varphi,\ \gamma_{422}=-\gamma_{242}=-e_1Y_4\varphi,$$

$$\gamma_{431}=-\gamma_{341}=-e_1Y_4\varphi,\ \gamma_{514}=-\gamma_{154}=\frac{e_1Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1},\ \gamma_{523}=-\gamma_{253}=\frac{e_1Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1},$$

$$\gamma_{524}=-\gamma_{254}=\frac{e_1Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2},\ \gamma_{532}=-\gamma_{352}=\frac{e_1Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1},$$

$$\gamma_{533}=-\gamma_{353}=\frac{e_1Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2},\ \gamma_{534}=-\gamma_{354}=\frac{e_1Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^3},$$

$$\gamma_{541}=-\gamma_{451}=\frac{e_1Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1},\ \gamma_{542}=-\gamma_{452}=\frac{e_1Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2},$$

$$\gamma_{543}=-\gamma_{453}=\frac{e_1Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^3},\ \gamma_{544}=-\gamma_{454}=\frac{e_1Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1},$$

$$\gamma_{545}=-\gamma_{455}=\frac{e_2Y_4\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

Остальные коэффициенты γ_{ijk} равны нулю.

Из (8) следуют равенства

$$Y_i\lambda_1=\frac{1}{2}\delta_{i4}Y_4\varphi,\quad Y_i\lambda_2=2\delta_{i5}Y_5\varphi. \tag{9}$$

Используя полученные соотношения и формулу

$$[Y_k,Y_h]\equiv\nabla_{Y_k}Y_h-\nabla_{Y_h}Y_k=\sum_{l=1}^{n}e_l\left(\gamma_{lkh}-\gamma_{lhk}\right)Y_{\tilde{l}},$$

составим скобки Ли векторных полей $Y_1,...,Y_5$:

$$\begin{aligned}
&[Y_1,Y_2]=0, && [Y_1,Y_3]=0, && [Y_1,Y_4]=-\frac{1}{2}(Y_4\varphi)Y_2,\\
&[Y_1,Y_5]=\frac{Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}Y_1, && [Y_2,Y_3]=0, && [Y_2,Y_4]=-(Y_4\varphi)Y_3,\\
&[Y_2,Y_5]=\frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}Y_1+\frac{Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}Y_2, && && [Y_3,Y_4]=-\frac{3}{2}(Y_4\varphi)Y_4,\\
&[Y_3,Y_5]=\frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^3}Y_1+\frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}Y_2+\frac{Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}Y_3,\\
&[Y_4,Y_5]=\frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^4}Y_1+\frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^3}Y_2+\frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}Y_3+\frac{Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}Y_4+\frac{Y_4\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}Y_5,
\end{aligned} \tag{10}$$

остальные скобки Ли равны нулю.

Напомним, что система линейных дифференциальных уравнений в частных производных с неизвестной функцией u:

$$Y_s\theta\equiv\underset{s}{\xi}{}^i(x^1,\ldots,x^n)\frac{\partial u}{\partial x^i}=0\quad(s=1,\ldots,p;\ i=1,\ldots,n),$$

где $\underset{s}{\xi}{}^i$ — компоненты p векторов косонормального репера $(Y_1,\ldots,Y_n)$, является вполне интегрируемой, т. е. допускает $n-p$ независимых решений $u^1,\ldots,u^p$, если и только если все коммутаторы операторов системы ([8], с. 143)

$$[Y_s,Y_t]\equiv Y_sY_t-Y_tY_s=\sum_{r=1}^{n}e_r(\gamma_{rst}-\gamma_{rts})Y_r\quad(s,t=1,\ldots,p), \tag{11}$$

где

$$\gamma_{ijk} = \underset{i}{\xi}_{l,m} \underset{j}{\xi}^{l} \underset{k}{\xi}^{m} \tag{12}$$

— коэффициенты вращения Риччи, линейно выражаются через операторы системы $Y_1, \ldots, Y_p$ ([7], с. 12).

Из приведенных выше формул следует, что системы дифференциальных уравнений

$$Y_1 u = Y_2 u = Y_3 u = Y_5 u = 0,$$
$$Y_1 u = Y_2 u = Y_5 u = 0,$$
$$Y_1 u = Y_5 u = 0,$$

являются вполне интегрируемыми. Обозначим единственное решение первой системы и одно из двух независимых решений второй системы через u^4, решение второй системы – через u^3; решения третьей системы обозначим u^2, а решения уравнения $Y_5 u = 0$ – через u^1, u^2, u^3, u^4. Система $Y_1 u = Y_2 u = Y_3 u = Y_4 u = 0$ также является вполне интегрируемой, ее единственное решение обозначим u^5. В новых координатах $x^{i'} = u^i$, опустив штрихи, получим

$$\underset{1}{\xi}^{i} = Q(x)\delta^i_1, \quad \underset{5}{\xi}^{i} = P(x)\delta^i_5, \quad \underset{2}{\xi}^{3} = \underset{2}{\xi}^{4} = \underset{2}{\xi}^{5} = \underset{3}{\xi}^{4} = \underset{3}{\xi}^{5} = \underset{4}{\xi}^{5} = 0.$$

Из (8) и (9) следует, что λ_1 зависит только от x^4, а λ_2 – только от x^5: $\lambda_1 \equiv f_1(x^4)$, $\lambda_2 \equiv f_2(x^5)$, при этом

$$\varphi = \frac{1}{2}(4f_1 + f_2).$$

2. Основные уравнения.

Приравнивая в каждой координатной окрестности U координаты векторных полей в правых и левых частях уравнений (10), с учетом формулы

$$[Y_k, Y_h]|_U = (\underset{k}{\xi}^i \partial_i \underset{h}{\xi}^j - \underset{h}{\xi}^i \partial_i \underset{k}{\xi}^j)\partial x^j$$

получим следующую систему нелинейных уравнений в частных производных с неизвестными $\underset{i}{\xi}^j$:

$$1^\circ \quad \underset{1}{\xi}^1 \partial_1 \underset{2}{\xi}^1 - \underset{2}{\xi}^1 \partial_1 \underset{1}{\xi}^1 - \underset{2}{\xi}^2 \partial_2 \underset{1}{\xi}^1 = 0,$$

$$2^\circ \quad \underset{1}{\xi}^1 \partial_1 \underset{2}{\xi}^2 = 0,$$

$$3^\circ \quad \underset{1}{\xi}^1 \partial_1 \underset{3}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^1 \partial_1 \underset{1}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^2 \partial_2 \underset{1}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^3 \partial_3 \underset{1}{\xi}^1 = 0,$$

$$4^\circ \quad \underset{1}{\xi}^1 \partial_1 \underset{3}{\xi}^2 = 0,$$

$$5^\circ \quad \underset{1}{\xi}^1 \partial_1 \underset{3}{\xi}^3 = 0,$$

$$6^\circ \quad \underset{1}{\xi}^1 \partial_1 \underset{4}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^1 \partial_1 \underset{1}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^2 \partial_2 \underset{1}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^3 \partial_3 \underset{1}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^4 \partial_4 \underset{1}{\xi}^1 = -\underset{4}{\xi}^4 f_1' \underset{2}{\xi}^1,$$

$$7^\circ \quad \underset{1}{\xi}^1 \partial_1 \underset{4}{\xi}^2 = -\underset{4}{\xi}^4 f_1' \underset{2}{\xi}^2,$$

$$8^\circ \quad \underset{1}{\xi}^1 \partial_1 \underset{4}{\xi}^3 = 0,$$

$$9^\circ\quad \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^4=0,$$

$$10^\circ\quad \underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{1}{\xi}^1=-\frac{1}{2}\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{1}{\xi}^1,$$

$$11^\circ\quad \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^5=0,$$

$$12^\circ\quad \underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^1+\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^1-\underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^1-\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^1-\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^1=0,$$

$$13^\circ\quad \underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^2+\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^2-\underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^2-\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^2-\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^2=0,$$

$$14^\circ\quad \underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^3+\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^3=0,$$

$$15^\circ\quad \underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^1+\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^1-\underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^1-\underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^1-\underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^1-\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{2}{\xi}^1=-2\underset{4}{\xi}^4 f_1'\underset{3}{\xi}^1,$$

$$16^\circ\quad \underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^2+\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^2-\underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^2-\underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^2-\underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^2-\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{2}{\xi}^2=-2\underset{4}{\xi}^4 f_1'\underset{3}{\xi}^2,$$

$$17^\circ\quad \underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^3+\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^3=-2\underset{4}{\xi}^4 f_1'\underset{3}{\xi}^3,$$

$$18^\circ\quad \underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^4+\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^4=0,$$

$$19^\circ\quad \underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^5+\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^5=0,$$

$$20^\circ\quad \underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{2}{\xi}^1=-\frac{1}{2}\frac{1}{(f_2-f_1)^2}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{1}{\xi}^1-\frac{1}{2}\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{2}{\xi}^1,$$

$$21^\circ\quad \underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{2}{\xi}^2=-\frac{1}{2}\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{2}{\xi}^2,$$

$$22^\circ\quad \underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^1+\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^1+\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^1-\underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^1-\underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^1-\underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{3}{\xi}^1-\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^1=-3\underset{4}{\xi}^4 f_1'\underset{4}{\xi}^1,$$

$$23^\circ\quad \underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^2+\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^2+\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^2-\underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^2-\underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^2-\underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{3}{\xi}^2-\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^2=-3\underset{4}{\xi}^4 f_1'\underset{4}{\xi}^2,$$

$$24^\circ\quad \underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^3+\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^3+\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^3-\underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^3-\underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^3-\underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{3}{\xi}^3-\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^3=-3\underset{4}{\xi}^4 f_1'\underset{4}{\xi}^3,$$

$$25^\circ\quad \underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^4+\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^4+\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^4=-3f_1'(\underset{4}{\xi}^4)^2,$$

$$26^\circ\quad \underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{3}{\xi}^1=-\frac{1}{2}\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{3}{\xi}^1-\frac{1}{2}\frac{1}{(f_2-f_1)^2}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{2}{\xi}^1-\frac{1}{2}\frac{1}{(f_2-f_1)^3}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{1}{\xi}^1,$$

$$27^\circ\quad \underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{3}{\xi}^2=-\frac{1}{2}\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{3}{\xi}^2-\frac{1}{2}\frac{1}{(f_2-f_1)^2}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{2}{\xi}^2,$$

$$28^\circ\quad \underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{3}{\xi}^3=-\frac{1}{2}\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{3}{\xi}^3,$$

$$29^\circ\quad \underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^5+\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^5+\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{5}{\xi}^5=0,$$

$$30^\circ\quad \underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{4}{\xi}^1=-\frac{1}{2}\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{4}{\xi}^1-\frac{1}{2}\frac{1}{(f_2-f_1)^2}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{3}{\xi}^1-$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(f_2-f_1)^3}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{2}{\xi}^1-\frac{1}{2}\frac{1}{(f_2-f_1)^4}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{1}{\xi}^1,$$

$$31^\circ \quad \underset{5}{\xi}^5 \partial_5 \underset{4}{\xi}^2 = -\frac{1}{2}\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5 f_2' \underset{4}{\xi}^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{(f_2-f_1)^2}\underset{5}{\xi}^5 f_2' \underset{3}{\xi}^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{(f_2-f_1)^3}\underset{5}{\xi}^5 f_2' \underset{2}{\xi}^2,$$

$$32^\circ \quad \underset{5}{\xi}^5 \partial_5 \underset{4}{\xi}^3 = -\tfrac{1}{2}\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5 f_2' \underset{4}{\xi}^3 - \frac{1}{2}\frac{1}{(f_2-f_1)^2}\underset{5}{\xi}^5 f_2' \underset{3}{\xi}^3,$$

$$33^\circ \quad \underset{5}{\xi}^5 \partial_5 \underset{4}{\xi}^4 = -\frac{1}{2}\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5 f_2' \underset{4}{\xi}^4,$$

$$34^\circ \quad \underset{4}{\xi}^1 \partial_1 \underset{5}{\xi}^5 + \underset{4}{\xi}^2 \partial_2 \underset{5}{\xi}^5 + \underset{4}{\xi}^3 \partial_3 \underset{5}{\xi}^5 + \underset{4}{\xi}^4 \partial_4 \underset{5}{\xi}^5 = \frac{2}{f_2-f_1}\underset{4}{\xi}^4 f_1' \underset{5}{\xi}^5 \tag{13}$$

(штрих означает производную функции по ее аргументу, например, $f_1' \equiv df_1/dx^4$).

Интегрируя уравнения $10^\circ, 2^\circ, 20^\circ, 5^\circ, 14^\circ, 27^\circ, 11^\circ, 19^\circ, 29^\circ$ и 34°, найдем

$$\underset{1}{\xi}^1 = \frac{1}{(f_2-f_1)^{1/2}}T_1(x^1,x^2,x^3,x^4), \quad \underset{2}{\xi}^2 = \frac{1}{(f_2-f_1)^{1/2}}T_2(x^2,x^3,x^4),$$

$$\underset{3}{\xi}^3 = \frac{1}{(f_2-f_1)^{1/2}}T_3(x^3,x^4), \quad \underset{5}{\xi}^5 = \frac{1}{(f1-f_2)^2}T_5(x^5).$$

После преобразования координат

$$x^{1'} = \int T_1^{-1}dx^1, \quad x^{2'} = \int T_2^{-1}dx^2, \quad x^{3'} = \int T_3^{-1}dx^3,$$

$$x^{4'} = x^4, \quad x^{5'} = \int T_5^{-1}dx^5,$$

не меняющего полученных ранее результатов, опустив штрихи, имеем

$$\underset{1}{\xi}^1 = \underset{2}{\xi}^2 = \underset{3}{\xi}^3 = \frac{1}{(f_2-f_1)^{1/2}}, \quad \underset{5}{\xi}^5 = \frac{1}{(f_1-f_2)^2}. \tag{14}$$

Интегрируя уравнения $9^\circ, 18^\circ, 25^\circ$ и 33°, найдем

$$\underset{4}{\xi}^4 = \frac{1}{3(f_2-f_1)^{1/2}(f_1'(x^3)+\omega(x^4))}.$$

Возможны два случая: $f_1' \neq 0$ и $f_1' = 0$. В первом случае сделаем замену координат $\bar{x}^4 = f_1(x^4)$, $\bar{x}^k = x^k \quad (p \neq 4)$ и положим $\bar{\omega} = (f_1')^{-1}\omega$, тогда

$$\underset{4}{\bar{\xi}}^4 = \frac{1}{3(f_2-f_1)^{1/2}(x^3+\bar{\omega})}, \quad \underset{4}{\bar{\xi}}^p = \underset{4}{\xi}^p \quad (p \neq 4).$$

Во втором случае сделаем замену $\bar{x}^4 = 3\int \omega dx^4$. Опустив черту, объединим оба случая формулами

$$f_1 = \varepsilon_1 x^4 + (1-\varepsilon_1)c_1 \quad (c_1 = \mathrm{const}),$$

$$\underset{4}{\xi}^4 = \frac{1}{(f_2-f_1)^{1/2}A} \quad \left(A \equiv 3\varepsilon_1\left(x^3+\omega(x^4)\right) + 1 - \varepsilon_1\right),$$

где ε_1 равно 0 или 1.

Интегрирование уравнений 1° и 20° дает следующий результат:

$$\underset{2}{\xi}^1 = \frac{1}{2(f_2-f_1)^{1/2}}(\Sigma_1 + D(x^2,x^3,x^4)),$$

где введено обобзначение

$$\Sigma_1 \equiv \frac{1}{f_2-f_1}.$$

Выполнив замену координат

$$x^{1'} = x^1 - \frac{1}{2}\int D dx^2, \quad x^{p'} = x^p \quad (p \neq 1),$$

опустив штрихи, получим

$$\underset{2}{\xi}^1 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)^{1/2}}\Sigma_1. \tag{15}$$

Интегрирование уравнений 3°, 12° и 26° дает

$$\underset{3}{\xi}^1 = \frac{1}{8(f_2 - f_1)^{1/2}}(2\Sigma_2 + (\Sigma_1)^2 + 2\Lambda(x^3, x^4)),$$

где

$$\Sigma_2 \equiv \frac{1}{(f_2 - f_1)^2}.$$

В новых координатах

$$x^{1'} = x^1 - \frac{1}{2}\int \Lambda dx^3, \quad x^{p'} = x^p \quad (p \neq 1),$$

опустив штрихи, имеем

$$\underset{3}{\xi}^1 = \frac{1}{8(f_2 - f_1)^{1/2}}((\Sigma_1)^2 + 2\Sigma_2). \tag{16}$$

Интегрирование уравнений 4°, 13° и 27° дает

$$\underset{3}{\xi}^2 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)^{1/2}}(\Sigma_1 + F(x^3, x^4)).$$

Сделаем замену координат

$$x^{2'} = x^2 - \int F dx^3, \quad x^{p'} = x^p \quad (p \neq 2),$$

будем иметь

$$\underset{3}{\xi}^2 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)^{1/2}}\Sigma_1. \tag{17}$$

В результате интегрирования уравнений 8°, 17°, 24° и 32° получим

$$\underset{4}{\xi}^3 = \frac{1}{2A(f_2 - f_1)^{1/2}}\left(A\Sigma_1 + 3P(x^4) - 4\varepsilon_1 x^2\right).$$

После замены координат

$$x^{3'} = x^3 - \int P dx^4, \quad x^{p'} = x^p \quad (p \neq 3)$$

в новых координатах, опустив штрихи, будем иметь

$$\underset{4}{\xi}^3 = \frac{1}{2A(f_2 - f_1)^{1/2}}\left(A\Sigma_1 - 4\varepsilon_1 x^2\right). \tag{18}$$

Интегрируя уравнения 7°, 16°, 23° и 31°, найдем

$$\underset{4}{\xi}^2 = \frac{1}{8A(f_2 - f_1)^{1/2}}\left(2A\Sigma_2 + A(\Sigma_1)^2 + 3Q(x^4) - 8\varepsilon_1 x^1\right).$$

Выполнив замену координат

$$x^{2'} = x^2 - \int Q dx^4, \quad x^{p'} = x^p \quad (p \neq 2),$$

получим

$$\underset{4}{\xi}^2 = \frac{1}{8A(f_2 - f_1)^{1/2}}\left(2A\Sigma_2 + A(\Sigma_1)^2 - 8\varepsilon_1 x^1\right). \tag{19}$$

Интегрируя уравнения 6°, 15°, 22° и 30°, будем иметь

$$\underset{4}{\xi}^1 = \frac{1}{6(f_2 - f_1)^{1/2}}\left(\Sigma_3 + \frac{3}{4}\Sigma_1\Sigma_2 + \frac{1}{8}(\Sigma_1)^3\right), \tag{20}$$

где

$$\Sigma_3 \equiv \frac{1}{(f_2 - f_1)^3}.$$

3. h-пространства типа $\{41\}$.

Используя найденные значения компонент векторов кософнормального репера

$$\underset{1}{\xi}^1=\underset{2}{\xi}^2=\underset{3}{\xi}^3=\frac{1}{(f_2-f_1)^{1/2}},$$

$$\underset{2}{\xi}^1=\frac{1}{2(f_2-f_1)^{3/2}},\quad \underset{3}{\xi}^1=\frac{3}{8(f_2-f_1)^{5/2}},$$

$$\underset{3}{\xi}^2=\frac{1}{2(f_2-f_1)^{3/2}},\quad \underset{4}{\xi}^1=\frac{5}{16(f_2-f_1)^{7/2}},$$

$$\underset{4}{\xi}^2=\frac{1}{8(f_2-f_1)^{1/2}}\left(\frac{3}{(f_2-f_1)^2}-\frac{8}{A}\varepsilon_1x^1\right),$$

$$\underset{4}{\xi}^3=\frac{1}{2(f_2-f_1)^{1/2}}\left(\frac{1}{f_2-f_1}-\frac{4}{A}\varepsilon_1x^2\right),$$

$$\underset{4}{\xi}^4=\frac{1}{A(f_2-f_1)^{1/2}},\quad \underset{5}{\xi}^5=\frac{1}{(f_1-f_2)^2},$$

$A=3\varepsilon_1\left(x^3+\omega(x^4)\right)+1-\varepsilon_1$, по формулам (3), (4) вычислим компоненты канонических 1-форм в натуральном репере

$$\theta_1=(f_2-f_1)^{1/2}Adx^4,$$

$$\theta_2=(f_2-f_1)^{1/2}\left(dx^3-\left(\frac{1}{2}\frac{A}{f_2-f_1}-2\varepsilon_1x^2\right)dx^4\right),$$

$$\theta_3=(f_2-f_1)^{1/2}\left(dx^2-\frac{1}{2}\frac{dx^3}{f_2-f_1}-\left(\frac{1}{8}\frac{A}{(f_2-f_1)^2}-\varepsilon_1x^1+\frac{\varepsilon_1x^2}{f_2-f_1}\right)dx^4\right),$$

$$\theta_4=(f_2-f_1)^{1/2}\left(dx^1-\frac{1}{2}\frac{dx^2}{f_2-f_1}-\frac{1}{8}\frac{dx^3}{(f_2-f_1)^2}-\right.$$
$$\left.\left(\frac{1}{16}\frac{A}{(f_2-f_1)^3}+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1x^1}{f_2-f_1}+\frac{1}{4}\frac{\varepsilon_1x^2}{(f_2-f_1)^2}\right)dx^4\right),$$

$$\theta_5=(f_1-f_2)^2dx^5$$

и затем по формулам (5) – компоненты метрики g и билинейной формы h в натуральном репере (X_i). Подсчитав символы Кристоффеля найденной метрики g, непосредственной проверкой убедимся в том, что тензорные поля g, h и φ удовлетворяют уравнению Эйзенхарта. В итоге получим следующие результаты.

Теорема 1 *Пусть M есть 5-мерное многообразие с метрикой g и связностью Леви-Чивита ∇. Пусть 0-форма φ и симметричная билинейная форма h характеристики $\chi=\{41\}$ определены в M или в некоторой области $V\subseteq M$ и пусть f_1,f_2 – различные характеристические корни билинейной формы $h-2\varphi g$ кратностей соответственно 4 и 1. Для того чтобы h, g и φ удовлетворяли уравнению Эйзенхарта, т. е. для того чтобы M было h-пространством типа $\chi=\{41\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$g=g_1+g_2, \tag{21}$$

$$h=(4f_1+f_2)g+f_1g_1+f_2g_2+h_0,$$
$$\varphi=2f_1+\frac{1}{2}f_2 \tag{22}$$

и вокруг каждой точки $p \in V \subseteq M$ существовала каноническая карта (x,U), в которой

$$\begin{gathered}
e_1 g_1|_U = 2A(f_2-f_1)dx^1dx^4 + 2(f_2-f_1)dx^2dx^3 + 2\left(2\varepsilon_1(f_2-f_1)x^2 - A\right)dx^2dx^4 - \\
{dx^3}^2 + 2\varepsilon_1\left((f_2-f_1)x^1 - 2x^2\right)dx^3dx^4 + \\
4\varepsilon_1\left((f_2-f_1)x^1x^2 - {x^2}^2 - \frac{1}{2}Ax^1\right){dx^4}^2, \\
e_2 g_2|_U = (f_1-f_2)^4 {dx^5}^2, \\
e_1 h_0|_U = 2A(f_2-f_1)dx^2dx^4 + (f_2-f_1){dx^3}^2 + 2\left(2\varepsilon_1(f_2-f_1)x^2 - A\right)dx^3dx^4 + \\
4\varepsilon_1\left((f_2-f_1)\left({x^2}^2 + \frac{1}{2}Ax^1\right) - Ax^2\right){dx^4}^2,
\end{gathered} \tag{23}$$

где $f_1 = \varepsilon_1 x^4 + (1-\varepsilon_1)c_1$, $f_2 = \varepsilon_2 x^5 + (1-\varepsilon_2)c_2$; $c_1, c_2 - const$, $A = 3\varepsilon_1\left(x^4 + \omega(x^5)\right) + 1 - \varepsilon_1$, ε_1, ε_2 принимают независимо значения 0 или 1, $e_1, e_2 = \pm 1$, ω – функция x^5.

Отсюда следует

Теорема 2 *Векторное поле $X \in TM$ тогда и только тогда является (локальным) проективным движением типа $\{41\}$ на 5-мерном псевдоримановом многообразии (M,g), когда выполняется равенство $L_X g = h$, где метрика g и билинейная форма h определены формулами* (21)–(23) *(теорема 1).*

Список литературы

1. Levi–Civita T. Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche. *Ann. di Mat.* 1896; № 24 (2): S. 255–300.

2. Петров А. З. О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики. Учен. зап. Казан. ун-та, 1949, 109 (3), с. 7–36.

3. Солодовников А. С. Проективные преобразования римановых пространств // УМН. 1956. № 11. С. 45–116.

4. Аминова А. В. Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий. // УМН. 1995. № 50 (1). С. 69–142.

5. Аминова А. В. Автоморфизмы геометрических структур как симметрии дифференциальных уравнений. // Изв. вузов. Матем. 1994. № 2. С. 3–11.

6. Аминова А. В. Проективные преобразования и симметрии дифференциальных уравнений // Матем. сб. 1995. № 186 (12). С. 21–37.

7. Эйзенхарт Л. П. Непрерывные группы преобразований. Москва: Ин. лит., 1947.

8. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. Москва: Ин. лит., 1948.

9. Аминова А.В. Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. Москва: Янус-К, 2003. 619 с.

10. Аминова А.В., Хакимов Д.Р. О проективных движениях пятимерных пространств специального вида // Изв. вузов. Матем. 2017. № 5. С. 97–102.

11. Аминова А.В., Хакимов Д.Р. О проективных движениях 5-мерных пространств. I. h-пространства типа $\{32\}$ // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2018. № 4. С. 21–31.

References

1. Levi–Civita T. Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche. *Ann. di Mat.*, 1896, no. 24 (2), pp. 255–300.
2. Petrov A. Z. *On the geodesic mapping of Riemannian spaces of indefinite metric.* Uchen. Zap. Kazan. un-ta, 1949, 109 (3), pp. 7–36. (in Russian)
3. Solodovnikov A. S. Projective transformations of Riemannian spaces. *UMN*, 1956, no. 11, pp. 45–116. (in Russian)
4. Aminova. A. V. Lie algebras of infinitesimal projective transformations of Lorentzian manifolds. *UMN*, 1995, no. 50 (1), pp. 69–142. (in Russian)
5. Aminova. A. V. Automorphisms of geometric structures as symmetries of differential equations. *Izv. vuzov. Matem.*, 1994, no. 2, pp. 3–11. (in Russian)
6. Aminova. A. V. Projective transformations and symmetries of differential equations. *Matem. sb.*, 1995, no. 186 (12), pp. 21–37. (in Russian)
7. Eisenhart L.P. *Continous groups of transformations.* Moscow, IL Publ. 1947. (in Russian)
8. Eisenhart L.P. *Riemannian geometry.* Moscow, IL Publ. 1948. (in Russian)
9. Aminova A. V. *Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds.* Moscow, Yanus-K Publ. 2003. 619 p. (in Russian)
10. Aminova A.V., Khakimov D.R. On projective motions of five-dimensional spaces of special type. *Izv. vuzov. Matem.*, 2017, no. 5, pp. 97–102. (in Russian)
11. Aminova A.V., Khakimov D.R. On projective motions of 5-dimensional spaces. I. h-spaces of type 32. *Space, Time and Fundamental Interactions, 2018, no. 4, pp. 21-31. (in Russian)*

Авторы

Аминова Ася Васильевна, профессор, д.ф.-м.н., профессор кафедры теории относительности и гравитации, Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Хакимов Джамолиддин Рахмонович, аспирант, кафедра геометрии, отделение математики, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: dzhamoliddink@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Аминова А. В., Хакимов Д. Р. О проективных движениях 5-мерных пространств. II. h-пространства типа $\{41\}$ // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2019. № 1. С. 45—55.

Authors

Aminova Asya Vasiljevna, Professor, Dr. of Science, Dept. Relativity and Gravitation, Institute of Physics, Kazan (Volga Region) Federal University, Kremlyovskaya str., 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Khakimov Dzhamoliddin, postgraduate student, Department of Geometry, Division of Mathematics, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan (Volga Region) Federal University, Kremlyovskaya str., 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: dzhamoliddink@mail.ru

Please cite this article in English as:

Aminova A. V., Khakimov D. R. On projective motions of 5-dimensional spaces II. h-spaces of the type $\{41\}$. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2019, no. 1, pp. 45–55.