

**ГРАВИТАЦИЯ, КОСМОЛОГИЯ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОЛЯ****\*\*\***

УДК 524.68

© Абдуллин И. Г., Попов В. А., 2019

**ГАЛО БОЗЕ-КОНДЕНСАТА ТЕМНОЙ МАТЕРИИ С НЕВЫРОЖДЕННОЙ КОМПОНЕНТОЙ\***Абдуллин И. Г.<sup>a,1</sup>, Попов В. А.<sup>a,2</sup><sup>a</sup> Институт физики, Казанский федеральный университет, Казань, 420008, Россия

Галактическое гало темной материи рассматривается как слабо неидеальный разреженный бозе-газ. Внутреннюю область гало занимает ядро, в котором одна часть бозонов образует конденсат Бозе–Эйнштейна, а другая остается в невырожденном состоянии. Невырожденная компонента описывается как газ элементарных возбуждений в приближении Хартри–Фока–Боголюбова, которое позволяет учесть весь энергетический спектр квазичастиц. Вокруг ядра находится облако неконденсированных бозонов. Численные решения уравнений, описывающие распределение плотности темной материи, показывают, что радиус гало может значительно меняться в зависимости от доли частиц в конденсате, в то время как размер самого конденсата остается практически постоянным. Когда размер конденсата сравним с размером гало, невырожденная компонента, из-за ограничения на отношение сечения рассеяния к массе частиц темной материи, не дает заметного вклада в профиль плотности и кривые вращения по сравнению с моделями, где гало целиком состоит из конденсата. Показано, что бозоны с массой  $m \sim 100$  эВ не нарушают этого ограничения, если образуют относительно небольшие «капли» конденсата (их радиус порядка 100 астрономических единиц) внутри гало, состоящего из неконденсированных частиц.

*Ключевые слова:* темная материя, кривые вращения, конденсат Бозе–Эйнштейна, квазичастицы.

**BOSE-CONDENSED DARK MATTER HALOS WITH NON-DEGENERATE COMPONENT**Abdullin I. G.<sup>a,1</sup>, Popov V. A.<sup>a,2</sup><sup>a</sup> Institute of Physics, Kazan Federal University, Kazan, 420008, Russia

A galactic halo of dark matter is considered as a weakly interacting dilute Bose gas. The halo involves a core, in which some bosons form Bose-Einstein condensate, while the others remain in the non-degenerate state. The non-degenerate component is described as a gas of elementary excitations in the Hartree–Fock–Bogolyubov approximation taking into account the overall quasiparticle energy spectrum. A cloud of non-condensed bosons surrounds the core. Numerical solutions to the equations describing a dark matter density distribution show that the halo radius grows significantly when the condensate particle number fraction decreases. At the same time the radius of the condensate core remains almost the same. If the halo has comparable-sized condensate core, the non-degenerate component gives only insignificant contributions to the dark matter density profile and rotation curves when confronted with the pure condensate models. This conclusion is caused by constraints

\* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности Казанского (Приволжского) федерального университета.

<sup>1</sup>E-mail: videns42@gmail.com<sup>2</sup>E-mail: vladipopov@mail.ru

on the scattering cross section to the mass of dark matter particles ratio obtained from the Bullet Cluster measurements. It is shown that bosons with masses  $m \sim 100$  eV do not violate these constraints if they form relatively small condensate “drops” (with a radius of about 100 astronomical units) inside a halo consisting of non-condensed particles.

*Keywords:* dark matter, rotation curves, Bose-Einstein condensate, quasiparticles.

PACS: 03.75.Hh, 05.30.Jp, 14.80.Va, 95.35.+d

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2019.1.26-44

## Введение

В последние десятилетия астрономические наблюдения предоставили целый ряд убедительных доказательств того, что около 23% плотности энергии Вселенной состоит из небарионной темной материи (ТМ). Считается, что она состоит из нейтральных слабо взаимодействующих массивных частиц, которые не входят в Стандартную модель физики элементарных частиц. Некоторые из них содержатся в расширениях Стандартной модели — аксионы, суперсимметричные частицы и т. п. — и потому являются естественными кандидатами на роль частиц ТМ. Не исключены и другие кандидаты, параметры которых определяются из космологических наблюдений и экспериментов по прямому детектированию ТМ.

С точки зрения космологии предпочтительными являются модели, в которых ТМ уже на стадии выхода из равновесия с космической плазмой была нерелятивистской (холодная ТМ). Бесстолкновительные слабо взаимодействующие массивные частицы (WIMP) соответствуют этому условию и естественным образом дают нужную для современной эпохи остаточную плотность, а численное моделирование с этими частицами в рамках задачи  $N$  тел воспроизводит основные свойства крупномасштабных структур. Серьезной проблемой этой модели является возникновение центрального каспа в профиле плотности гало. Говоря иначе, моделирование показывает, что при приближении к центру гало плотность  $\rho \propto r^{-1}$ , в то время как наблюдения свидетельствуют об отсутствии сингулярностей. Кроме того, прогнозируемое количество карликовых галактик оказывается значительно больше, чем это следует из наблюдений.

Другим типом холодной ТМ являются легкие бозоны в состоянии бозе-эйнштейновского конденсата (БЭК). Наиболее популярным представителем этого класса являются аксионы — псевдоскалярные бозоны с предполагаемой массой  $m \sim 10^{-9} - 10^{-4}$  эВ. Аксионы являются естественным претендентом на роль частиц ТМ, поскольку входят в одно из расширений Стандартной модели как частицы, обеспечивающие сохранение  $CP$ -инвариантности в квантовой хромодинамике. Аксионы и другие легкие бозоны, обладают слишком малой массой, чтобы холодная ТМ из этих частиц могла появиться за счет процессов, происходящих в космической плазме на ранних стадиях эволюции Вселенной. В этом случае, выходя из равновесия с обычным веществом, частицы были бы релятивистскими. Поэтому их возникновение связывают с альтернативными, не тепловыми, механизмами рождения.

По всей видимости, впервые на возможность формирования БЭК ТМ было указано в статье [1], за которой последовали многочисленные работы [2–12] (см. также обзор [13] и ссылки в нем). Важным достоинством БЭК ТМ является естественное отсутствие сингулярности в распределении плотности гало, так как все бозоны находятся в одном квантовом состоянии и гравитационный коллапс невозможен благодаря принципу неопределенности Гейзенберга [8]. Этот же механизм обеспечивает существование минимального радиуса гравитационно связанного БЭК, что может способствовать решению проблемы дефицита карликовых галактик без нарушения иерархии крупномасштабных структур [7].

Первые работы [2, 4] рассматривали гало, сформированное идеальным бозе-газом ниже тем-

пературы конденсации

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \left( \frac{\zeta(3/2)}{n} \right)^{2/3}, \quad (1)$$

где  $n$  — плотность частиц,  $\zeta$  — дзета функция Римана, а ее значение  $\zeta(3/2) \approx 2.61$ .

Поскольку взаимодействие частиц не принималось во внимание, то равновесие достигалось за счет так называемого квантового давления, обусловленного кинетической энергией частиц. Чтобы радиус БЭК был сопоставим с наблюдаемыми размерами гало, массы бозонов должны быть  $m \sim 10^{-24}$  эВ.

Учет межчастичного взаимодействия позволил рассматривать гало БЭК для более тяжелых частиц [3, 5, 6, 8], используя уравнение Гросса–Питаевского. Это соответствует тому, что все бозоны находятся в БЭК при нулевой температуре. Такое приближение вполне оправдано для легких частиц холодной ТМ, так как тепловое движение происходит с нерелятивистскими скоростями и соответствующая температура  $T \sim mv^2/k_B$  много меньше  $T_c$ .

При температурах, отличных от нуля (но ниже  $T_c$ ), определенная доля бозонов не попадает в конденсат, образуя невырожденную компоненту. Частицы могут переходить из нее в конденсат и обратно, хотя в равновесии число частиц конденсата остается постоянным. Свойства невырожденной, или как ее еще называют, тепловой компоненты могут быть описаны на языке квазичастиц с боголюбовским спектром энергии, который в области малых энергий описывает акустические фононы, а для высоких энергий соответствует свободным частицам. Этот подход хорошо разработан [14–20] как для пространственно однородных систем, так и для неоднородных газов, находящихся во внешнем потенциале.

В работах [10, 11] исследовалась модель ТМ, состоящей из БЭК и невырожденной компоненты в квазиклассическом приближении, когда боголюбовский спектр заменяется энергией свободных частиц. Кроме того, в этом приближении игнорируется аномальное среднее, которое всегда дает вклад в термодинамические величины при наличии конденсата.

В данной работе мы анализируем влияние неконденсированных частиц на структуру гало ТМ в приближении Хартри–Фока–Боголюбова (ХФБ), в котором учитывается весь спектр квазичастиц, а аномальное среднее естественным образом входит в самосогласованную систему уравнений.

В разделе 1 дан краткий обзор теории БЭК в пространственно неоднородном слабо неидеальном бозе-газе и описываются основные этапы вывода соотношений между компонентами газа в приближении ХФБ. В разделе 2 полученные выражения используются для описания структуры гало БЭК ТМ при наличии неконденсированных частиц. Параметры модели анализируются в контексте ограничений, вытекающих из астрономических наблюдений. В заключении коротко обсуждаются выводы и возможные перспективы модели.

## 1. Разреженный слабо неидеальный бозе-газ

### 1.1. Эффективный гамильтониан

Гамильтониан для неидеального разреженного бозе-газа в гейзенберговском представлении имеет вид [18–20]:

$$\hat{H}(t) = \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + mV(\mathbf{r}) \right) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \quad (2)$$

где  $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)$  и  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$  — бозевские операторы рождения и уничтожения частиц в точке  $\mathbf{r}$  и момент времени  $t$ ,  $U(\mathbf{r})$  — потенциал двухчастичного взаимодействия и  $V(\mathbf{r})$  — потенциал внешнего поля.

Для слабо неидеального газа, когда радиус действия межчастичного взаимодействия мал по сравнению со средним расстоянием между частицами, потенциал  $U(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  может быть заменен контактным псевдопотенциалом  $U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , в котором константа связи  $g$  определена выражением

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}, \quad (3)$$

где  $m$  и  $a$  — масса частиц и их амплитуда  $s$ -рассеяния в борновском приближении. Это приближение означает, что для частиц с импульсами  $p \ll \hbar/a$  значение потенциала взаимодействия остается постоянным.

При понижении температуры, в результате спонтанного нарушения симметрии конечная доля частиц оказывается в одном и том же одночастичном состоянии, образуя БЭК. Операторы  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$  могут быть представлены в виде суммы [14]

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \hat{\psi}_c(\mathbf{r}, t) + \hat{\psi}_n(\mathbf{r}, t), \quad (4)$$

где операторы  $\hat{\psi}_c(\mathbf{r}, t)$  и  $\hat{\psi}_n(\mathbf{r}, t)$  соответствуют конденсату и неконденсированным частицам, причем средние значения операторов

$$\langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \hat{\psi}_c(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad \langle \hat{\psi}_n(\mathbf{r}) \rangle = 0. \quad (5)$$

Операторы для конденсата и неконденсированных частиц ортогональны

$$\int \hat{\psi}_c^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}_n(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = 0, \quad (6)$$

так как действуют на разные одночастичные состояния системы [20].

Из (4) и (6) следует, что оператор числа частиц

$$\hat{N} = \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \hat{N}_c + \hat{N}_n, \quad (7)$$

где

$$\hat{N}_c = \int \hat{\psi}_c^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}_c(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \quad \hat{N}_n = \int \hat{\psi}_n^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}_n(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \quad (8)$$

так что полное число частиц складывается из частиц конденсата и невырожденной компоненты,  $N = N_c + N_n$ , а число частиц каждого сорта определено соответствующими средними

$$N = \langle \hat{N} \rangle, \quad N_c = \langle \hat{N}_c \rangle, \quad N_n = \langle \hat{N}_n \rangle. \quad (9)$$

Рассматриваемая система частиц образует большой канонический ансамбль [14, 21], который описывается эффективным гамильтонианом

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H} - \mu_c \hat{N}_c - \mu_n \hat{N}_n - \hat{\Lambda}. \quad (10)$$

Второе и третье слагаемые в (10) появляются благодаря условиям (8) и (9), а лагранжевы множители  $\mu_c$  и  $\mu_n$  являются химическими потенциалами конденсата и невырожденной компоненты соответственно. Существенным является то, что средние вычисляются по состояниям с произвольными, а не заданными значениями  $N_c$  и  $N_n$ , в силу чего средние значения (9) будут, вообще говоря, функциями от химических потенциалов [14].

Последнее слагаемое в (10) и имеет вид

$$\hat{\Lambda} = \int \left( \lambda(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}_c^\dagger(\mathbf{r}, t) + \lambda^*(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}_n(\mathbf{r}, t) \right) d\mathbf{r}, \quad (11)$$

где комплексные множители Лагранжа  $\lambda$  обеспечивают выполнение условия (5).

В работе [21] многочастичные системы с эффективным гамильтонианом вида (10), где для набора статистических операторов  $\hat{A}_i$  учитываются все условия вида  $\langle \hat{A}_i \rangle = A_i$ , называются репрезентативным ансамблем.

## 1.2. Уравнение Гросса–Питаевского

Уравнения движения для операторов конденсата и неконденсированных частиц

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}_c(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = [\hat{\psi}_c(\mathbf{r}, t), \hat{H}_{\text{eff}}], \quad i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}_n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = [\hat{\psi}_n(\mathbf{r}, t), \hat{H}_{\text{eff}}] \quad (12)$$

принимают вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi_c(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + mV(\mathbf{r}) - \mu_c + gn_c(\mathbf{r}, t) + 2gn_n(\mathbf{r}, t) \right) \psi_c(\mathbf{r}, t) + g\psi_c^*(\mathbf{r}, t)\sigma_n(\mathbf{r}, t) + g\langle \hat{\psi}_n^\dagger(\mathbf{r}, t)\hat{\psi}_n(\mathbf{r}, t)\hat{\psi}_n(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (13)$$

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}_n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + mV(\mathbf{r}) + 2gn_c(\mathbf{r}, t) - \mu_n \right) \hat{\psi}_n(\mathbf{r}, t) + g\left( \psi_c^2(\mathbf{r}, t)\hat{\psi}_n^\dagger(\mathbf{r}, t) + \hat{\psi}_n^\dagger(\mathbf{r}, t)\hat{\psi}_n(\mathbf{r}, t)\hat{\psi}_n(\mathbf{r}, t) \right) + g\left( \psi_c^*(\mathbf{r}, t)\hat{\psi}_n(\mathbf{r}, t)\hat{\psi}_n(\mathbf{r}, t) + 2\psi_c(\mathbf{r}, t)\hat{\psi}_n^\dagger(\mathbf{r}, t)\hat{\psi}_n(\mathbf{r}, t) \right) + \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + mV(\mathbf{r}) + g|\psi_c(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \psi_c(\mathbf{r}, t) - \lambda(\mathbf{r}, t), \quad (14)$$

где оператор конденсата  $\hat{\psi}_c(\mathbf{r}, t)$  заменен классической функцией  $\psi_c(\mathbf{r}, t)$ , которая называется волновой функцией конденсата. Такая замена обусловлена тем, что когда число частиц  $N_c$  в когерентном состоянии велико, то

$$\int d\mathbf{r} \hat{\psi}_c(\mathbf{r}, t)\hat{\psi}_c^\dagger(\mathbf{r}, t) |N_c\rangle = (N_c + 1) |N_c\rangle \approx N_c |N_c\rangle = \int d\mathbf{r} \hat{\psi}_c^\dagger(\mathbf{r}, t)\hat{\psi}_c(\mathbf{r}, t) |N_c\rangle. \quad (15)$$

Это значит, что операторы  $\hat{\psi}_c^\dagger(\mathbf{r}, t)$  и  $\hat{\psi}_c(\mathbf{r}, t)$  могут рассматриваться как коммутирующие и, следовательно, ведут себя как классическое поле<sup>1</sup>.

В уравнении (13) учтено условие (5) и введены обозначения

$$n_c(\mathbf{r}, t) = \psi_c^*(\mathbf{r}, t)\psi_c(\mathbf{r}, t), \quad n_n(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{\psi}_n^\dagger(\mathbf{r}, t)\hat{\psi}_n(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (16)$$

которые, в силу (8) и (9), интерпретируются как плотности частиц конденсата и невырожденной компоненты соответственно, а величина

$$\sigma_n(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{\psi}_n(\mathbf{r}, t)\hat{\psi}_n(\mathbf{r}, t) \rangle \quad (17)$$

называется аномальным средним. Уравнение (13) известно как обобщенное уравнение Гросса–Питаевского [22, 23].

Если частицы вне конденсата не принимаются во внимание, а сам конденсат находится в состоянии равновесия, то (13) приобретает вид стандартного уравнения Гросса–Питаевского [19]

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + mV(\mathbf{r}) + gn_c(\mathbf{r}) - \mu_c \right) \psi_c(\mathbf{r}) = 0, \quad (18)$$

которое описывает распределение конденсата во внешнем потенциале  $V(\mathbf{r})$ . Уравнение (18) имеет вид уравнения Шредингера с эффективным потенциалом, состоящим из внешнего потенциала  $V(\mathbf{r})$  и энергии среднего поля  $gn_c(\mathbf{r})$ , а химический потенциал  $\mu_c$  играет роль собственного значения гамильтониана  $H_{\text{eff}}$  при отсутствии невырожденной компоненты.

<sup>1</sup>Этот переход можно было выполнить на этапе разбиения операторов  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$  на конденсатную и невырожденную компоненты. Тогда уравнение для волновой функции конденсата можно получить путем варьирования эффективного гамильтониана  $\hat{H}_{\text{eff}}$  [20], т. е.  $i\hbar \frac{\partial \psi_c}{\partial t} = \frac{\delta \hat{H}_{\text{eff}}}{\delta \psi_c^*}$

Для систем с большим числом частиц в уравнении (18) можно пренебречь слагаемым с производными, которое отвечает кинетической энергии. В этом случае

$$mV(\mathbf{r}) + gn_c(\mathbf{r}) = \mu_c. \quad (19)$$

Это приближение называется приближением Томаса–Ферми [19], а уравнение (19) выражает тот факт, что частица получает одинаковую энергию в любой точке конденсата.

### 1.3. Квазиклассическое приближение

Простейшим способом включить в уравнении Гросса–Питаевского неконденсированные частицы является квазиклассическое приближение или приближение статического теплового облака [19]. В этом приближении равновесный БЭК описывается обобщенным уравнением Гросса–Питаевского (13)

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + mV(\mathbf{r}) - \mu_c + gn_c(\mathbf{r}) + 2gn_n(\mathbf{r}) \right) \psi_c(\mathbf{r}) = 0, \quad (20)$$

в котором отброшены трехчастичное и аномальное средние. Плотность невырожденной компоненты вычисляется как интеграл по импульсам от равновесной функции распределения Бозе–Эйнштейна

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = (\exp[\beta(\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - \mu_c)] - 1)^{-1}, \quad (21)$$

где химический потенциал неконденсированных частиц совпадает с химическим потенциалом конденсата, а сами они рассматриваются как свободные частицы с энергией

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + mV(\mathbf{r}) + 2gn(\mathbf{r}), \quad (22)$$

которая помимо кинетической и потенциальной энергии включает в себя энергию среднего поля окружающих частиц.

Недостатком квазиклассического подхода является то, что в нем принимаются во внимание только те частицы невырожденной компоненты, которые обладают большими импульсами, а вклад остальных пренебрегают. Кроме того, полностью игнорируется аномальное среднее, которое всегда отлично от нуля при наличии конденсата.

### 1.4. Приближение Хартри–Фока–Боголюбова

Более последовательный подход, учитывающий неконденсированные частицы, состоит в замене произведений операторов  $\hat{\psi}_n^\dagger(\mathbf{r})$  и  $\hat{\psi}_n(\mathbf{r})$  приближенными выражениями, основанными на теореме Вика [15]. Этот подход называется приближением Хартри–Фока–Боголюбова (ХФБ). Двухчастичные произведения заменяют их средними (16) и (17), а трехчастичные — выражениями вида

$$\hat{\psi}_n^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}_c(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}_n(\mathbf{r}, t) \approx 2n_n(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}_n(\mathbf{r}, t) + \sigma_n(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}_n^\dagger(\mathbf{r}, t) \quad (23)$$

Как следствие, последнее слагаемое в уравнении (13) обратится в ноль, а уравнение (14) и сопряженное ему становятся линейными по операторам  $\hat{\psi}_n^\dagger(\mathbf{r})$  и  $\hat{\psi}_n(\mathbf{r})$ . В результате, равновесное уравнение Гросса–Питаевского в приближении Томаса–Ферми приобретает вид

$$mV(\mathbf{r}) + gn_c(\mathbf{r}) + 2gn_n(\mathbf{r}) + g\sigma_n(\mathbf{r}) = \mu_c, \quad (24)$$

где принято во внимание, что в рассматриваемом случае волновая функция конденсата является действительной функцией [20].

Для вычисления средних (16) и (17) операторная часть гамильтониана (10) диагонализуется с помощью канонических преобразований Боголюбова [14], которые для равновесного бозе-газа имеют вид

$$\hat{\psi}_n(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} [u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{-i(\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{r})t/\hbar - \mathbf{k}\mathbf{r})} \hat{b}_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) e^{i(\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{r})t/\hbar - \mathbf{k}\mathbf{r})} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger], \quad (25)$$

где  $\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$  и  $\hat{b}_{\mathbf{k}}$  — операторы рождения и уничтожения квазичастиц с энергией  $\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{r})$  и импульсом  $\mathbf{k}$ , удовлетворяющие бозевским правилам коммутации. Энергия и амплитуды  $u_k(\mathbf{r})$  и  $v_k(\mathbf{r})$  медленно меняются по сравнению с фазой, то есть

$$|\nabla\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{r})| \ll k|\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{r})|, \quad |\nabla u_k(\mathbf{r})| \ll k|u_k(\mathbf{r})|, \quad |\nabla v_k(\mathbf{r})| \ll k|v_k(\mathbf{r})|. \quad (26)$$

Подстановка (25) в (14) с учетом (26) дает систему уравнений

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})u_k(\mathbf{r}) + g\sigma(\mathbf{r})v_k(\mathbf{r}) &= \varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{r})u_k(\mathbf{r}), \\ \omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})v_k(\mathbf{r}) + g\sigma(\mathbf{r})u_k(\mathbf{r}) &= -\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{r})v_k(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (27)$$

где введены обозначения

$$\omega(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} + mV(\mathbf{r}) - \mu_n(\mathbf{r}) + 2gn(\mathbf{r}), \quad (28)$$

$$n(\mathbf{r}) = n_c(\mathbf{r}) + n_n(\mathbf{r}), \quad \sigma(\mathbf{r}) = \psi_c^2(\mathbf{r}) + \sigma_n(\mathbf{r}), \quad (29)$$

а последние две строки в уравнении (14) зануляются за счет подбора лагранжева множителя  $\lambda(\mathbf{r})$ .

В ряде работ [16, 18] химические потенциалы конденсата и невырожденной компоненты полагаются равными, и уравнения (27) приводят к возникновению щели в энергетическом спектре квазичастиц при малых импульсах, что противоречит теореме Гугенгольца-Пайнса [24]. Простейшим способом обойти эту проблему является игнорирование аномального среднего [17]. Однако, при таком подходе возникают проблемы с законами сохранения числа частиц и углового момента.

Исключить появление щели в энергетическом спектре удалось в [25] путем учета всех однопетлевых диаграмм до второго порядка по взаимодействию. Этот подход был развит в рамках теории возмущений [26] и обобщен в [21] для произвольных систем, которые рассматриваются как репрезентативные статистические ансамбли с гамильтонианом (10). В этом случае химические потенциалы конденсата и неконденсированных частиц связаны между собой соотношением  $\mu_c - \mu_n = 2g\sigma_n$ , энергетический спектр возбуждений остается безщелевым и нарушения теоремы Гугенгольца-Пайнса не возникает.

В представлении квазичастиц плотность невырожденной компоненты и аномальное среднее вычисляются как [15, 20]

$$n_n(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} [f(\mathbf{k}, \mathbf{r})|u_k(\mathbf{r})|^2 + (1 + f(\mathbf{k}, \mathbf{r}))|v_k(\mathbf{r})|^2], \quad (30)$$

$$\sigma_n(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} [(1 + 2f(\mathbf{k}, \mathbf{r}))u_k(\mathbf{r})v_k^*(\mathbf{r})], \quad (31)$$

где квазичастицы имеют распределение Бозе-Эйнштейна

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = (e^{\beta\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{r})} - 1)^{-1} \quad (32)$$

с энергией

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \left\{ \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} \left[ \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} + 2g\sigma(\mathbf{r}) \right] \right\}^{1/2}, \quad (33)$$

вид которой определяется из условия совместности уравнений (27). Для больших импульсов  $k \gg (mg\sigma/\hbar)^{1/2}$  выражение (33) переходит в энергию свободных частиц (22), а при малых импульсах дает линейную зависимость энергии от импульса, характерную для фононов.

Решением уравнений (27) являются амплитуды  $u_k(\mathbf{r})$  и  $v_k(\mathbf{r})$  в виде

$$u_k^2(\mathbf{r}) = \frac{\omega(\mathbf{k}, \mathbf{r}) + \varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{r})}{2\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{r})}, \quad v_k^2(\mathbf{r}) = \frac{\omega(\mathbf{k}, \mathbf{r}) - \varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{r})}{2\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{r})}, \quad (34)$$

так как для амплитуд преобразования бозевских операторов (25) должно выполняться  $u_k^2(\mathbf{r}) - v_k^2(\mathbf{r}) = 1$ .

Совершая стандартный переход от суммирования к интегрированию по импульсам, получим, что плотности неконденсированных частиц и аномальное среднее определяется следующими выражениями [20]:

$$n_n(\mathbf{r}) = \frac{(mg\sigma(\mathbf{r}))^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} \left( 1 + \frac{3}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\sqrt{t^2+1}-1}}{e^{\beta g\sigma(\mathbf{r})t} - 1} dt \right), \quad (35)$$

$$\sigma_n(\mathbf{r}) = \frac{(mg\sigma(\mathbf{r}))^{3/2}}{\pi^2\hbar^3} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\sqrt{t^2+1}-1}}{\sqrt{t^2+1}(e^{\beta g\sigma(\mathbf{r})t} - 1)} dt \right). \quad (36)$$

## 2. Конденсат Бозе–Эйнштейна темной материи

### 2.1. Конденсат темной материи при нулевой температуре

Описание галактического гало ТМ в состоянии бозе-конденсата опирается на уравнения, полученные в разделе 1 из гамильтониана (10), где  $V(\mathbf{r})$  — гравитационный потенциал, создаваемый бозе-газом. Предполагается, что темная материя состоит из нерелятивистских частиц, поэтому уравнения гравитационного поля записываются в ньютоновском приближении:

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = 4\pi G m n(\mathbf{r}). \quad (37)$$

В случае, когда все частицы ТМ в гало находятся в конденсате,  $n(\mathbf{r}) = n_c(\mathbf{r})$ , что соответствует температуре  $T = 0$ , распределение плотности ТМ описывается уравнением (19) в приближении Томаса–Ферми [3, 5, 6]. Исключение составляют ультралегкие частицы с массами  $m \lesssim 10^{-22}$  эВ, для которых первое слагаемое в (18), соответствующее кинетической энергии, оказывается сравнимым с остальными членами уравнения [8].

Уравнения (19) и (37) могут быть представлены как уравнение Лейна–Эмдена с показателем политропы равным единице

$$\nabla^2 n_c(\mathbf{r}) + \frac{1}{R_c^2} n_c(\mathbf{r}) = 0, \quad (38)$$

которое имеет аналитическое решение [27]

$$n_c(r) = n_0 \frac{\sin(r/R_c)}{r/R_c}, \quad (39)$$

где  $n_0$  — центральная плотность гало, а величина

$$R_c^2 = \frac{g}{4\pi G m^2} = \frac{\hbar^2 a}{G m^3} \quad (40)$$

определяет характерное расстояние, на котором меняется плотность. Радиус гало в этой модели равен  $\pi R_c$  и не зависит от массы гало. Это означает, что галактики, состоящие практически только из одной ТМ (на сегодняшний день известно большое число галактик такого типа [28]), должны иметь одинаковый размер, отличаясь по массе. Этот вывод, очевидно, противоречит наблюдениям, которые показывают, что галактики, где доля ТМ составляет не менее 98%, имеют различные размеры [28].

Одним из критериев реалистичности модели ТМ является сравнение расчетных и наблюдаемых кривых вращения. Скорость вращения на расстоянии  $r$  от центра определяется текущей массой гало

$$v^2(r) = \frac{GM(r)}{r}, \quad (41)$$

и для чистого конденсата может быть вычислена аналитически

$$v^2(r) = 4\pi G m n_0 R_c^2 \left( \frac{\sin(r/R_c)}{r/R_c} - \cos(r/R_c) \right). \quad (42)$$



Кривые вращения, соответствующие формуле (42), исследовались в работах [5,6,29] при наличии других компонент галактики (диск, балдж, горячий газ), дающих вклад в кривые вращения. Было продемонстрировано, что с учетом вкладов всех компонент, БЭК ТМ дает удовлетворительное согласие с наблюдательными данными для некоторых галактик. Однако, как показано в [29], подгонка параметров БЭК для кривых вращения приводит к тому, что по крайней мере один параметр ТМ (в [29] это амплитуда рассеяния) оказывается различным для галактик низкой и высокой поверхностной яркости.

Чтобы устранить указанные недостатки и получить более широкие возможности в моделировании свойств ТМ, исследовались вращающийся БЭК ТМ [12], БЭК с нарушенной топологической структурой, в результате чего в гало ТМ формируются вихри [9], а также ТМ в состоянии частичного вырождения, когда наряду с конденсатом присутствует невырожденная компонента, создаваемая неконденсированными частицами [10,11].

В работе [10] была предпринята попытка аналитически построить профиль гало ТМ, состоящего из БЭК и газа возбуждений в квазиклассическом приближении, когда энергия квазичастиц определяется выражением (22). В рамках сделанных в работе предположений, полученные профили плотности мало отличались от профиля чистого конденсата (39).

В [11] рассматривалась ТМ, в которой центральная часть гало представляет из себя БЭК при ненулевой температуре вместе с газом из неконденсированных частиц. Размер этого ядра оценивается как  $R_c \sim 1 - 10$  кпк. Область вокруг ядра занимает полностью неконденсированный бозе-газ. Также как и в [10], невырожденная компонента состоит только из свободных частиц. В этом приближении вклад фононов в давление

$$P_{\text{ph}} = \frac{\pi^2 (k_B T)^4}{90 \hbar^3} \left( \frac{m}{gn_c} \right)^{3/2} \quad (43)$$

значительно меньше давления конденсата

$$P_c = \frac{gn_c^2}{2}. \quad (44)$$

Параметры модели оцениваются по характерным кривым вращения и данным численного моделирования скопления Пуля [30]. В результате, авторы приходят к выводу, что модель с невырожденной компонентой является несостоятельной моделью ТМ.

Следует заметить, что отношение давления фононов и конденсата, как это следует из (43) и (44)

$$\frac{P_{\text{ph}}}{P_c} = \frac{2\sqrt{2} \pi^{7/2}}{45 n_c \Lambda^3} \left( \frac{k_B T}{gn_c} \right)^{5/2}, \quad (45)$$

где  $\Lambda = (2\pi\hbar^2/mk_B T)^{1/2}$  — длина волны де Бройля, может быть порядка единицы, если энергия взаимодействия мала. Кроме того, когда газ находится в равновесии во внешнем потенциале, основную роль играет градиент давления, поэтому, чтобы оценить состоятельность модели, имеет смысл рассмотреть весь спектр квазичастиц.

## 2.2. Гало в приближении Хартри–Фока–Боголюбова

Гало ТМ в состоянии БЭК при наличии невырожденной компоненты описывается в приближении ХФБ уравнениями (24), (29) и (37), которые сводятся к безразмерному уравнению

$$\nabla_{\xi}^2 (x_c + 2x_n + x_a) + x_c + x_n = 0, \quad (46)$$

где введены нормированные плотности частиц конденсата, неконденсированных частиц и аномального среднего

$$x_c = \frac{n_c}{n_0}, \quad x_n = \frac{n_n}{n_0}, \quad x_a = \frac{\sigma_n}{n_0}, \quad (47)$$

а  $n_0 = n_c(0) + n_n(0)$  — центральная плотность гало. Пространственное распределение этих величин зависит от безразмерной радиальной координаты  $\xi = r/R_c$ , где  $R_c$  определено в (40). Символ  $\nabla_\xi^2$  обозначает лапласиан в безразмерных координатах.

В приближении ХФБ плотность неконденсированных частиц и аномальная плотность определены интегралами (35) и (36) и являются функциями плотности конденсата. Для соответствующих безразмерных величин получим

$$x_n = \frac{1}{\nu} X_n(\gamma[x_c + x_a]), \quad X_n(z) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{3/2} \left( 1 + \frac{3}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\sqrt{t^2+1}-1}}{e^{zt}-1} dt \right), \quad (48)$$

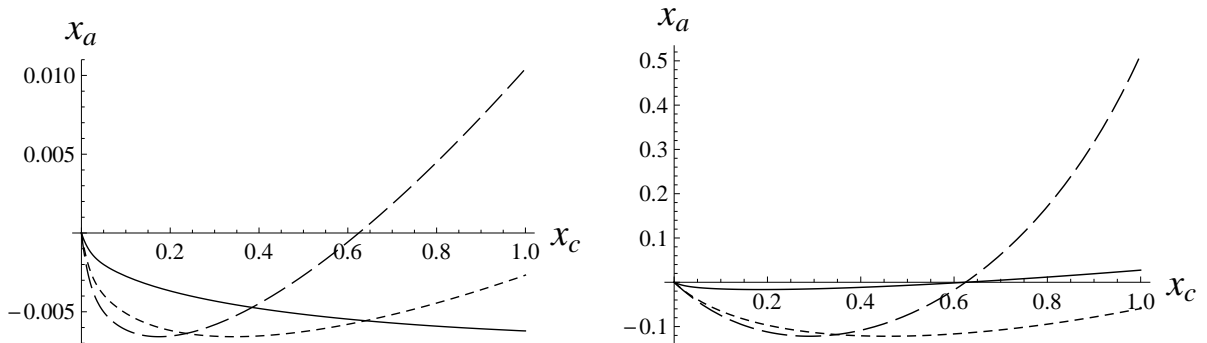
$$x_a = \frac{1}{\nu} X_a(\gamma[x_c + x_a]), \quad X_a(z) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} z^{3/2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\sqrt{t^2+1}-1}}{\sqrt{t^2+1}(e^{zt}-1)} dt \right). \quad (49)$$

Плотности  $x_n$  и  $x_a$  содержат два безразмерных параметра. Один из них,  $\nu = n_0 \Lambda^3$ , дает число частиц в центре гало внутри объема, размер которого определяется длиной волны де Бройля  $\Lambda$ . Второй параметр,  $\gamma = 2\nu a/\Lambda = gn_0/k_B T$ , выражает отношение энергии среднего поля к тепловой энергии частиц.

Подставляя (48) и (49) в (46), получим уравнение

$$\left( 1 + \frac{\gamma}{\nu} \cdot \frac{2X'_n + X'_a}{1 - \frac{\gamma}{\nu} X'_a} \right) \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{dx_c}{d\xi} \right) + \frac{\gamma^2}{\nu} \cdot \frac{2X''_n - X''_a - \frac{\gamma}{\nu} (X'_n X'_a)'}{\left( 1 - \frac{\gamma}{\nu} X'_a \right)^3} \left( \frac{dx_c}{d\xi} \right)^2 + x_c + \frac{1}{\nu} X_n = 0, \quad (50)$$

которое определяет профиль плотности конденсата. В уравнении (50) подразумевается, что  $x_c$  является функцией безразмерной координаты  $\xi$ , аргументы функций  $X_n$  и  $X_a$  определены в (48) и (49), а штрихи означают производные по аргументу. Надо заметить, что (49) по сути является алгебраическим уравнением, которое неявно определяет зависимость аномального среднего от плотности конденсата. Рис. 1 дает представление об этой зависимости для некоторых значений параметров  $\gamma$  и  $\nu$ .



**Рис. 1.** График нормированного аномального среднего как функции нормированной плотности конденсата. На левом рисунке фиксировано значение параметра  $\nu = 50$ . Сплошная линия соответствует  $\gamma = 0.1$ , короткий пунктир — значению  $\gamma = 0.5$ , длинный пунктир — значению  $\gamma = 1$ . На правом рисунке параметр  $\gamma = 1$ . Короткий пунктир соответствует  $\nu = 2.7$ , длинный пунктир — значению  $\nu = 10$ , сплошная линия — значению  $\nu = 50$ .

Уравнение (50) описывает распределение ТМ внутри конденсатного ядра, где частицы могут находиться в конденсате или принадлежать невырожденной компоненте. Вне конденсатного ядра все частицы находятся в неконденсированном состоянии из-за того, что плотность становится меньше плотности вырождения. В этой области все частицы являются свободными и подчиняется распределению Бозе–Эйнштейна с энергией (22). Плотность частиц за пределами ядра можно найти, интегрируя функцию распределения (21) по импульсам [19]

$$n(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Lambda^3} g_{3/2}(z), \quad (51)$$

где

$$g_s(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i^s}, \quad (52)$$

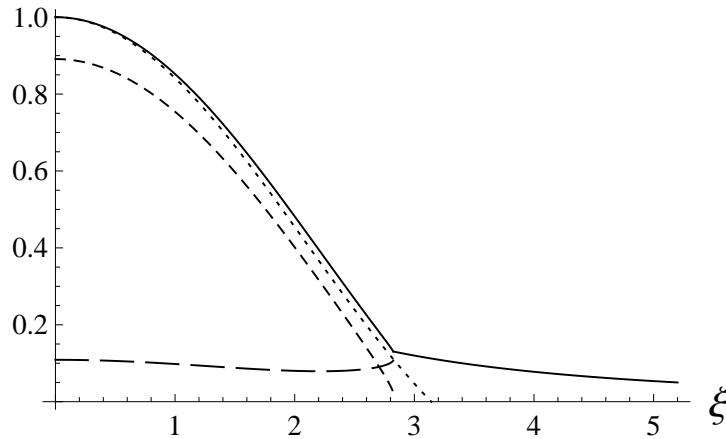
а  $z = \exp\{\beta(\mu - mV(\mathbf{r}) - 2gn(\mathbf{r}))\}$  — фугитивность бозе-газа.

Вместе с уравнением для гравитационного потенциала (37) соотношение (51) составляет самосогласованную систему уравнений, описывающих ТМ за пределами конденсатного ядра. После несложных вычислений можно получить уравнение для нормированной плотности частиц  $x = n(\mathbf{r})/n_0$

$$\left(1 + \frac{2\gamma}{\nu} g_{1/2}(z)\right) \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{dx(\xi)}{d\xi}\right) + \nu \frac{g_{-1/2}(z)}{(g_{1/2}(z))^2} \left(\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right)^2 + \frac{\gamma}{\nu} g_{1/2}(z)x(\xi) = 0, \quad (53)$$

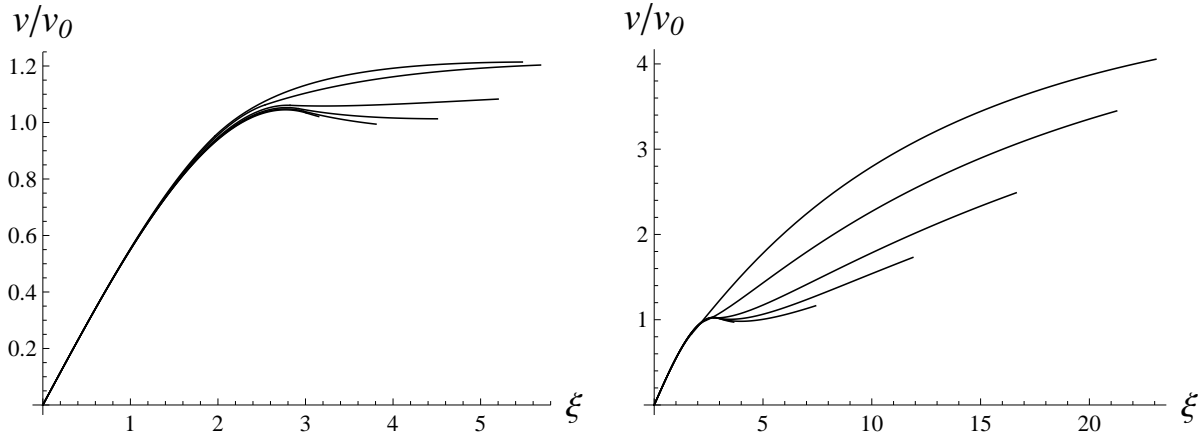
в котором значение  $z$  определяется из уравнения  $g_{3/2}(z) = \nu x(\xi)$ .

Решения уравнений (50) и (53) сшиваются на границе конденсатного ядра, которая определяется значением  $x_c = 0$ . Условием сшивки является непрерывность плотности невырожденной компоненты, потенциала гравитационного поля и его производной.



**Рис. 2.** Нормированные плотности компонент ТМ (47) как функции  $\xi = r/R_c$ , полученные в результате численного решения уравнений (50) и (53) при  $\gamma = 2$  и  $\nu = 20$ . Доля конденсата в центре при этих значениях  $x_c(0) \approx 0.89$ . Сплошной линией показана полная плотность, коротким пунктиром — плотность конденсата, длинным пунктиром — плотность вырожденной компоненты. Точками отмечен профиль плотности чистого конденсата, определяемого формулой (39).

Пример профиля плотности гало, полученного в результате численного решения уравнений (50) и (53) представлен на рис. 2. При любых значениях параметров  $\gamma$  и  $\nu$  профили плотности имеют аналогичный вид; они отличаются разной долей конденсата и невырожденных частиц, а также размером гало. С ростом  $\nu$  вклад невырожденной компоненты довольно быстро падает и распределение плотности становится практически неотличимым от решения для чистого конденсата (39). Это легко объяснить тем, что наличие конденсата в бозе-газе определяется условием



**Рис. 3.** Модельные кривые вращения для  $\gamma = 2$  (слева) и  $\gamma = 0.1$  (справа) при значениях параметра  $\nu = 5, 10, 20, 30, 40, 50$  (сверху вниз).

$\nu > g_{3/2}(1) = \zeta(3/2)$ , и большие значения  $\nu$  означают, что практически все частицы находятся в конденсате.

Найденные распределения плотности использовались для моделирования кривых вращения. Выражение (41) для квадрата скорости в безразмерных переменных трансформируется в

$$v^2(\xi) = \frac{v_0^2}{\xi} \int_0^\xi x(s) s^2 ds, \quad (54)$$

где  $v_0^2 = 4\pi G m n_0 R_c^2$ . Графики функции  $v(\xi)$  представлены на рис. 3 и 2.

Рис. 3 иллюстрирует отмеченный выше факт, что при больших значениях  $\nu$  невырожденная компонента практически отсутствует. При  $\nu = 50$  (самые нижние кривые на обоих рисунках) график кривых вращения практически совпадает с графиком, построенным по формуле (42).

Реалистичные кривые соответствуют значениям параметра  $\gamma \gtrsim 0.5$ . При меньших значениях  $\gamma$  радиус гало становится больше (при одном и том же значении  $\nu$ ) и графики имеют четко выраженную впадину на границе конденсатного ядра, после чего происходит рост скорости. Такая зависимость существенно отличается от наблюдаемых профилей скоростей вращения.

Верхние кривые на рис. 3 соответствуют распределению ТМ, где доля бозонов в конденсате невелика. Впадина на границе конденсатного ядра на этих кривых сглаживается, а радиус гало становится больше по сравнению с графиками для больших  $\nu$ .

Эти характерные черты кривых вращения проявляются сильнее при дальнейшем уменьшении  $\gamma$ . Радиус гало продолжает расти, а размер конденсатного ядра практически не меняется. Как видно на рис. 2, на графиках с  $\nu \lesssim 40$  конденсатное ядро уже не играет существенной роли в зависимости скоростей вращения от расстояния.

### 2.3. Оценка состоятельности модели

В представленной выше модели гало ТМ состоит из ядра, включающего в себя конденсат и неконденсированные частицы, и из окружающего ядро облака свободных частиц. Радиус ядра практически не отличается от радиуса гало чистого конденсата, а размер облака вокруг может быть существенно больше. В такой модели естественным образом появляется минимальный размер гало, где практически все частицы оказываются в конденсате и окружающий его слой неконденсированных частиц практически отсутствует. Характерный размер конденсатного ядра в этом случае соответствует размеру карликовых галактик  $R_c \sim 1$  кпк [31].

Характеристики частиц можно оценить, анализируя вклад, который вносят в уравнение (50) слагаемые, содержащие  $X_n$  и  $X_a$ . При фиксированных массе и амплитуде рассеяния частиц и

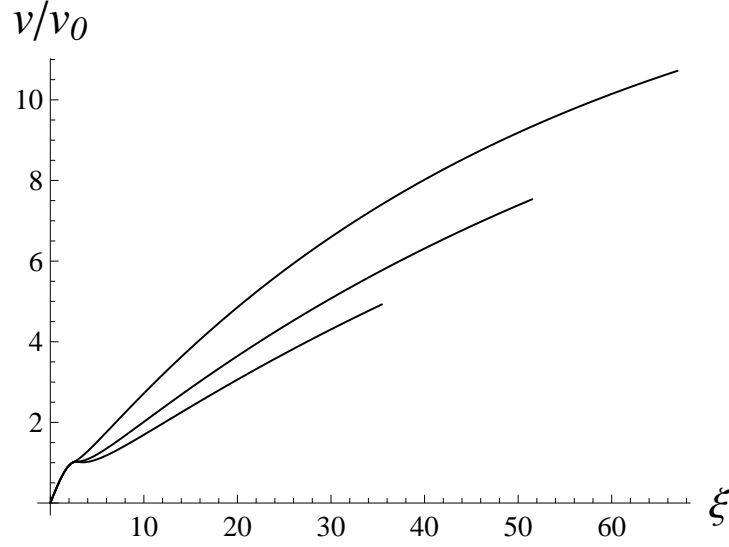


Рис. 4. Модельные кривые вращения для  $\gamma = 0.01$  при значениях параметра  $\nu = 10, 20, 30$  (сверху вниз).

заданной центральной плотности величина параметра  $\gamma$  определяет область температур, в которой находится система. Значение  $\gamma \gg 1$  соответствует температурам, близким к нулю, а  $\gamma \ll 1$  — температурам около точки конденсации. Ниже исследуется асимптотическое поведение уравнения (50) в каждой из указанных температурных областей с учетом границ применимости приближения ХФБ.

Когда  $\gamma \gg 1$ , значения интегралов в (48) и (49) существенно меньше единицы и  $X_{n,a} \propto z^{3/2}$ . После простых вычислений получим, что вклад квазичастиц в уравнение (50) определяется функциями, которые с точностью до числового множителя ведут себя следующим образом:

$$\frac{1}{\nu} X_{n,a} \propto (a^3 n_0)^{1/2} x_c^{3/2}, \quad \frac{\gamma}{\nu} X'_{n,a} \propto (a^3 n_0)^{1/2} x_c^{1/2}, \quad \frac{\gamma^2}{\nu} X''_{n,a} \propto (a^3 n_0)^{1/2} x_c^{-1/2}, \quad (55)$$

где безразмерный параметр  $a^3 n_0 \ll 1$  для разреженного газа. Оценка (55) показывает, что при низких температурах главным фактором оказывается неидеальность бозе-газа. Температурные поправки проявляются в следующих членах разложения по малому параметру  $\gamma^{-1}$ . Рост последнего выражения в (55) происходит только в узком слое на границе конденсатного облака, где плотность конденсата падает до нуля, ( $x_c \rightarrow 0$ ) и не играет решающей роли для оценки параметров.

Заметный вклад квазичастицы будут давать, если  $a^3 n_0 \sim 0.01$ . Принимая во внимание (40), получим, что для галактического ядра с характерным размером  $R_c$

$$a^3 n_0 = \frac{G^3 R_c^6 m^8 \rho_0}{\hbar^6}, \quad (56)$$

где  $\rho_0 = m n_0$ . Отсюда следует оценка для массы бозонов

$$m \sim 69.2 \left( \frac{R_c}{1 \text{ кпк}} \right)^{-3/4} \left( \frac{\rho_0}{10^{-24} \text{ г/см}^3} \right)^{-1/8} \text{ эВ}. \quad (57)$$

В области температур, близких к точке конденсации, функции  $X_{n,a}$  могут быть разложены по малому параметру  $\gamma \ll 1$ :

$$X_n(z) = \zeta(3/2) + \frac{3\pi^{3/2}}{4} \gamma^{1/2} + \dots, \quad X_a(z) = -\sqrt{2\pi} \gamma^{1/2} + \dots, \quad (58)$$

Соответствующие вклады в уравнение (50) даются выражениями

$$\frac{1}{\nu} X_n \approx \frac{\zeta(3/2)}{\nu}, \quad \frac{\gamma}{\nu} X'_{n,a} \propto \left( \frac{a}{\Lambda^4 n_0} \right)^{1/2} x_c^{-1/2}, \quad \frac{\gamma^2}{\nu} X''_{n,a} \propto \left( \frac{a}{\Lambda^4 n_0} \right)^{1/2} x_c^{-3/2}. \quad (59)$$

Так как  $\nu > \zeta(3/2)$  в области, где присутствует конденсат, то безразмерный параметр

$$\frac{a}{\Lambda^4 n_0} = \frac{\gamma}{2\nu^2} \ll 1. \quad (60)$$

Оценивая температуру частиц по средней скорости теплового движения  $k_B T \sim m v^2$ , получим, что

$$\frac{a}{\Lambda^4 n_0} \sim \frac{G R_c^2 m^8 v^4}{(2\pi)^2 \hbar^6 \rho_0}, \quad (61)$$

откуда

$$m \sim 30.9 \left( \frac{R_c}{1 \text{ кпк}} \right)^{-1/4} \left( \frac{v}{100 \text{ км/с}} \right)^{-1/2} \left( \frac{\rho_0}{10^{-24} \text{ г/см}^3} \right)^{1/8} \text{ эВ}. \quad (62)$$

В промежуточной области, когда  $\gamma \sim 1$ , для оценок можно воспользоваться тем, что отношение длины волны де Бройля к амплитуде рассеяния  $\Lambda/a \sim \nu$ . Следовательно, внутри конденсатного ядра заведомо будет выполняться  $\Lambda/a > \zeta(3/2)$  или

$$\frac{2\pi \hbar^6}{G^2 m^8 R_c^4 v^2} > \zeta^2(3/2), \quad (63)$$

которое приводит к ограничению

$$m < 64.7 \left( \frac{R_c}{1 \text{ кпк}} \right)^{-1/2} \left( \frac{v}{100 \text{ км/с}} \right)^{-1/4} \text{ эВ}. \quad (64)$$

Таким образом, объединяя полученные оценки, можно заключить, что вклад невырожденной компоненты нужно принимать во внимание для бозонов с массой  $m \sim 10 - 100$  эВ.

Как было отмечено в [11], такая оценка массы плохо согласуется с результатами наблюдений и численного моделирования процесса столкновения обычного вещества и ТМ в скоплении Пуля [30]. Результаты исследования [30] накладывают ограничение на отношение сечения рассеяния частиц к их массе,  $\sigma/m < 1.25 \text{ см}^2/\text{г}$ . Близкие значения получены при анализе скопления MACS J0025.4-1222 [32]. Эти оценки являются модельно-зависимыми, так как были найдены в результате численных экспериментов для классических частиц (задача  $N$  тел) с учетом гравитационного взаимодействия и контактных столкновений. Тем не менее, этот результат можно считать ориентиром и для других моделей — слишком большое отличие от него указывает на то, что модель не способна объяснить процессы столкновения галактик и скоплений. Учитывая формулу  $\sigma = 8\pi a^2$ , для моделей БЭК ТМ отношение сечения рассеяния к массе может быть выражено через характерный размер конденсатного ядра  $R_c$

$$\frac{\sigma}{m} = \frac{8\pi G^2 m^5 R_c^4}{h^4}. \quad (65)$$

Это соотношение дает ограничение на массу частиц БЭК ТМ [11]

$$m \lesssim 3.9 \cdot 10^{-4} \left( \frac{R_c}{1 \text{ кпк}} \right)^{-4/5} \text{ эВ}. \quad (66)$$

Из-за того, что масса частиц входит в соотношение (65) в пятой степени, то массам порядка 10–100 эВ будет соответствовать неоправданно большое значение  $\sigma/m$ .

Используя ограничение на массу частиц (66) можно оценить, какой вклад согласно (56) и (61) будет вносить невырожденная компонента в структуру гало ТМ:

$$(a^3 n_0)^{1/2} \lesssim 4.4 \cdot 10^{-21} \left( \frac{R_c}{1 \text{ кпк}} \right)^3 \left( \frac{m}{10^{-3} \text{ эВ}} \right)^4 \left( \frac{\rho_0}{10^{-24} \text{ г/см}^3} \right)^{1/2}, \quad (67)$$

$$\left( \frac{a}{\Lambda^4 n_0} \right)^{1/2} \lesssim 1.1 \cdot 10^{-19} \left( \frac{R_c}{1 \text{ кпк}} \right) \left( \frac{m}{10^{-3} \text{ эВ}} \right)^4 \left( \frac{v}{100 \text{ км/с}} \right)^2 \left( \frac{\rho_0}{10^{-24} \text{ г/см}^3} \right)^{-1/2}, \quad (68)$$

$$\nu \gtrsim 1.8 \cdot 10^{18} \left( \frac{m}{10^{-3} \text{ эВ}} \right)^{-4} \left( \frac{v}{100 \text{ км/с}} \right)^{-3} \left( \frac{\rho_0}{10^{-24} \text{ г/см}^3} \right). \quad (69)$$

Таким образом, ограничения на модели ТМ, полученные в результате анализа столкновений скоплений галактик, приводят к следующему выводу: если частицы темной материи образуют равновесный бозе-конденсат галактических размеров, то есть его характерный радиус  $R_c \sim 1$  кпк, то масса частиц не превышает  $10^{-3}$  эВ и элементарные возбуждения не играют существенной роли в структуре гало.

### Заключение

В основе модели ТМ, состоящей из бозонов, образующих БЭК, лежат квантовые свойства бозе-газа, обусловленные тождественностью частиц. Для пространственно однородного бозе-газа они проявляются в том, что ниже температуры вырождения конечная доля частиц оказывается в состоянии с нулевым импульсом и вторично-квантованные операторы рождения и уничтожения частиц в этом состоянии представляются классическими полевыми функциями. Взаимодействие бозонов вносит лишь малые поправки к основным характеристикам системы. В равновесном распределении неоднородного газа взаимодействие играет существенную роль и определяет профиль плотности конденсата во внешнем потенциале, даже если пренебречь квантовыми флуктуациями. Поэтому описание галактического гало как классического комплексного скалярного поля с самодействием характерно для большинства моделей БЭК ТМ.

Равновесие конденсата достигается за счет противодействия гравитационного притяжения и давления, которое включает в себя две компоненты. Первая компонента, называемая квантовым давлением, определяется кинетической энергией частиц. Она играет заметную роль, когда размеры системы сравнимы с корреляционным радиусом конденсата. Это условие выполняется только для ультралегких частиц. Вторая часть связана с энергией взаимодействия частиц и равна  $P = gn_c^2/2$ . Если к тому же учитываются частицы, не входящие в конденсат, то давление будет включать в себя дополнительные слагаемые, зависящие от плотности невырожденной компоненты.

В этой работе вклад невырожденной компоненты вычисляется в приближении ХФБ, что позволяет рассматривать квазичастицы всего боголюбовского спектра (33). Кроме того, принимается во внимание аномальное среднее, которое отлично от нуля в присутствии конденсата. Имея в виду наблюдательные ограничения на параметры ТМ, можно сделать вывод, что для бозе-конденсата ТМ галактических размеров элементарные возбуждения не оказывают существенного влияния на структуру гало. Аналогичный вывод был получен ранее в [11] в рамках полуклассического приближения, когда невырожденная компонента состоит только из свободных частиц.

На полученные результаты можно взглянуть под другим углом. Приняв ограничение на отношение сечения рассеяния к массе  $\sigma/m \lesssim 1$  см<sup>2</sup>/г, проанализируем безразмерные величины, характеризующие вклад невырожденной компоненты. Оценка параметров (56) и (61) дает

$$a^3 n_0 \lesssim 2.4 \cdot 10^{-42} \left( \frac{\sigma/m}{1 \text{ см}^2/\text{г}} \right)^{3/2} \left( \frac{m}{50 \text{ эВ}} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho_0}{10^{-24} \text{ г/см}^3} \right), \quad (70)$$

$$\frac{a}{\Lambda^4 n_0} \lesssim 6.9 \cdot 10^{-14} \left( \frac{\sigma/m}{1 \text{ см}^2/\text{г}} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{50 \text{ эВ}} \right)^{11/2} \left( \frac{v}{100 \text{ км/с}} \right)^4 \left( \frac{\rho_0}{10^{-24} \text{ г/см}^3} \right)^{-1}. \quad (71)$$

Они оказываются малы для любых реалистичных моделей. Единственным параметром в уравнении (50), не содержащим отношение  $\sigma/m$ , является  $\nu$ . В него входит только одна характеристика самих бозонов — масса и его значение может быть вычислено как

$$\nu \sim 3.4 \left( \frac{m}{50 \text{ эВ}} \right)^{-4} \left( \frac{v}{100 \text{ км/с}} \right)^{-3} \left( \frac{\rho_0}{10^{-24} \text{ г/см}^3} \right). \quad (72)$$

Когда  $\nu \sim 1$ , то в уравнении (50) необходимо учитывать последнее слагаемое, соответствующее плотности невырожденной компоненты, которая будет постоянной во всем облаке БЭК. Радиус

этого облака оценивается как

$$R_c = \left( \frac{(\sigma/m) \hbar^4}{8\pi G^2 m^5} \right)^{1/4} \lesssim 79 \left( \frac{\sigma/m}{1 \text{ см}^2/\Gamma} \right)^{1/4} \left( \frac{m}{50 \text{ эВ}} \right)^{-5/4} \text{ а. е.} \quad (73)$$

За пределами сферы радиуса  $R_c$  бозоны находятся в неконденсированном состоянии и описываются уравнением (53). Характерное расстояние, на котором изменяется плотность неконденсированных частиц существенно больше  $R_c$ . В этом случае гало ТМ будет состоять из невырожденных бозонов с массами  $m \sim 10 - 100$  эВ, а внутри гало могут находиться «капли» меньших размеров более плотного БЭК. Такие компактные объекты принято называть бозе-звездами. Они достаточно давно являются предметом отдельного исследования [33], а в работе [34] исследовалось формирование бозе-звезд внутри гало, целиком состоящего из БЭК, в котором бозоны взаимодействуют только гравитационно. Стабильность звезд в этом случае достигается за счет квантового давления. В отличие от [34], описанное выше формирование «капель» БЭК происходит на фоне невырожденного бозе-газа в результате установления баланса между гравитационным притяжением и отталкивающим парным взаимодействием.

### Список литературы

1. Baldeschi M., Gelmini G., Ruffini R. On massive fermions and bosons in galactic halos. *Physics Letters B*. 1983; vol. 122. № 3-4: S. 221–224.
2. Sin S. J. Late-time phase transition and the galactic halo as a Bose liquid. *Physical Review D*. 1994; vol. 50. № 6: S. 3650.
3. Lee J. W., Koh I. G. Galactic halos as boson stars. *Physical Review D*. 1996; vol. 53. № 4: S. 2236.
4. Guzman F. S., Matos T., Villegas H. Scalar fields as dark matter in spiral galaxies: comparison with experiments. *Astronomische Nachrichten: News in Astronomy and Astrophysics*. 1999; vol. 320. № 3: S. 97–104.
5. Arbey A., Lesgourgues J., Salati P. Galactic halos of fluid dark matter. *Physical Review D*. 2003; vol. 68. № 2: S. 023511.
6. Boehmer C., Harko T. Can dark matter be a Bose-Einstein condensate? *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. 2007; vol. 2007. № 06: S. 025.
7. Lee J. W., Lim S. Minimum mass of galaxies from BEC or scalar field dark matter. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. 2010; vol. 2010. № 01: S. 007.
8. Chavanis P. H. Mass-radius relation of newtonian self-gravitating Bose-Einstein condensates with short-range interactions. I. Analytical results. *Physical Review D*. 2011; vol. 84. № 4: S. 043531. <http://arxiv.org/abs/1103.2050v2>.
9. Rindler-Daller T., Shapiro P. R. Angular momentum and vortex formation in Bose-Einstein-condensed cold dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2012; vol. 422. № 1: S. 135–161.
10. Harko T., Madarassy E. J. Finite temperature effects in Bose-Einstein condensed dark matter halos. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. 2012; vol. 2012. № 01: S. 020.
11. Slepian Z., Goodman J. Ruling out bosonic repulsive dark matter in thermal equilibrium. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2012; vol. 427. № 1: S. 839–849.
12. Zhang X., Chan M., Harko T., et al. Slowly rotating Bose-Einstein condensate galactic dark matter halos, and their rotation curves. *The European Physical Journal C*. 2018; vol. 78: S. 1–20.
13. Suárez A., Robles V. H., Matos T. A review on the scalar field/Bose-Einstein condensate dark matter model. *Accelerated Cosmic Expansion, Astrophysics and Space Science Proceedings*. Springer. 2014; S. 107–142.
14. Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.). Введение в квантовую статистическую механику. М.: Наука, 1984. 384 с.
15. Griffin A. Conserving and gapless approximations for an inhomogeneous Bose gas at finite temperatures. *Physical Review B*. 1996; vol. 53. № 14: S. 9341. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/9602036v1>.
16. Hutchinson D., Zaremba E., Griffin A. Finite temperature excitations of a trapped Bose gas. *Physical Review Letters*. 1997; vol. 78. № 10: S. 1842. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/9611023v1>.



17. Proukakis N.P., Morgan S.A., Choi S., Burnett K. Comparison of gapless mean-field theories for trapped Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*. 1998; vol. 58. № 3: S. 2435.
18. Dalfvo F., Giorgini S., Pitaevskii L.P., Stringari S. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Reviews of Modern Physics*. 1999; vol. 71. № 3: S. 463.
19. Griffin A., Nikuni T., Zaremba E. Bose-condensed gases at finite temperatures. Cambridge University Press; 2009. 462 S.
20. Yukalov V. Basics of Bose-Einstein condensation. *Physics of Particles and Nuclei*. 2011; vol. 42. № 3: S. 460–513. <http://arxiv.org/abs/1105.4992v1>.
21. Yukalov V. Representative ensembles in statistical mechanics. *International Journal of Modern Physics B*. 2007; vol. 21. № 01: S. 69–86. <http://arxiv.org/abs/0704.1089v1>.
22. Gross E. P. Structure of a quantized vortex in boson systems. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*. 1961; vol. 20. № 3: S. 454–477.
23. Питаевский Л. П. Вихревые нити в неидеальном бозе-газе. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1961. Т. 40. № 2. С. 646–651.
24. Hugenholtz N., Pines D. Ground-state energy and excitation spectrum of a system of interacting bosons. *Physical Review*. 1959; vol. 116. № 3: S. 489.
25. Беляев С. Т. Энергетический спектр неидеального бозе-газа. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1958. Т. 34. № 2. С. 433-446.
26. Fedichev P., Shlyapnikov G. Finite-temperature perturbation theory for a spatially inhomogeneous Bose-condensed gas. *Physical Review A*. 1998; vol. 58. № 4: S. 3146. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/9805015v2>.
27. Зельдович Б. Я., Блииников С. И., Шакура Н. И. Физические основы строения и эволюции звезд. М.: МГУ, 1981. 150 с.
28. Dokkum P., Abraham R., Merritt A., et al. Forty-seven milky way-sized, extremely diffuse galaxies in the coma cluster. *The Astrophysical Journal*. 2015; vol. 798. № 2: S. 45.
29. Dwornik M., Keresztes Z., Kun E., Gergely L. Bose-Einstein condensate dark matter halos confronted with galactic rotation curves. *Advances in High Energy Physics*. 2017; vol. 2017. <http://arxiv.org/abs/1406.0388v4>.
30. Randall S., Markevitch M., Clowe D., et al. Constraints on the self-interaction cross-section of dark matter from numerical simulations of the merging galaxy cluster 1E 0657-5. *The Astrophysical Journal*. 2008; vol. 679. № 2: S. 1173.
31. Strigari L., Bullock J., Kaplinghat M., et al. A common mass scale for satellite galaxies of the milky way. *Nature*. 2008; vol. 454. № 7208: S. 1096.
32. Bradač M., Allen S., Treu T., et al. Revealing the properties of dark matter in the merging cluster MACS J0025.4–1222. *The Astrophysical Journal*. 2008; vol. 687. № 2: S. 959. <http://arxiv.org/abs/0806.2320v2>.
33. Kaup D.J. Klein-Gordon Geon. *Physical Review*. 1968; vol. 172. № 5: S. 1331.
34. Levkov D., Panin A., Tkachev I. Gravitational Bose-Einstein condensation in the kinetic regime. *Physical Review Letters*. 2018; vol. 121. № 15: S. 151301. <http://arxiv.org/abs/1804.05857v2>.

## References

1. Baldeschi M., Gelmini G., Ruffini R. On massive fermions and bosons in galactic halos. *Physics Letters B*, 1983, vol. 122, no. 3-4, pp. 221–224.
2. Sin S. Late-time phase transition and the galactic halo as a Bose liquid. *Physical Review D*, 1994, vol. 50, no. 6, pp. 3650.
3. Lee J., Koh I. Galactic halos as boson stars. *Physical Review D*, 1996, vol. 53, no. 4, pp. 2236.
4. Guzman F., Matos T., Villegas H. Scalar fields as dark matter in spiral galaxies: comparison with experiments. *Astronomische Nachrichten: News in Astronomy and Astrophysics*, 1999, vol. 320, no. 3, pp. 97–104.
5. Arbey A., Lesgourgues J., Salati P. Galactic halos of fluid dark matter. *Physical Review D*, 2003, vol. 68, no. 2, pp. 023511.
6. Boehmer C., Harko T. Can dark matter be a Bose-Einstein condensate? *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2007, vol. 2007, no. 06, pp. 025.
7. Lee J., Lim S. Minimum mass of galaxies from BEC or scalar field dark matter. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010, vol. 2010, no. 01, pp. 007.

8. Chavanis P. Mass-radius relation of newtonian self-gravitating Bose-Einstein condensates with short-range interactions. I. Analytical results. *Physical Review D*, 2011, vol. 84, no. 4, pp. 043531.
9. Rindler-Daller T., Shapiro P. Angular momentum and vortex formation in Bose-Einstein-condensed cold dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2012, vol. 422, no. 1, pp. 135–161.
10. Harko T., Madarassy E. Finite temperature effects in Bose-Einstein condensed dark matter halos. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012, vol. 2012, no. 01, pp. 020.
11. Slepian Z., Goodman J. Ruling out bosonic repulsive dark matter in thermal equilibrium. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2012, vol. 427, no. 1, pp. 839–849.
12. Zhang X., Chan M., Harko T. et al. Slowly rotating Bose-Einstein condensate galactic dark matter halos, and their rotation curves. *The European Physical Journal C*, 2018, vol. 78, pp. 1–20.
13. Suárez A., Robles V., Matos T. A review on the scalar field/Bose-Einstein condensate dark matter model. *Accelerated Cosmic Expansion*, 2014, pp. 107–142.
14. Bogolubov N. N., Bogolubov N. N. (Jr.) *Introduction to quantum statistical mechanics*. World Scientific Publishing Company, 2009. 422 p.
15. Griffin A. Conserving and gapless approximations for an inhomogeneous Bose gas at finite temperatures. *Physical Review B*, 1996, vol. 53, no. 14, pp. 9341.
16. Hutchinson D., Zaremba E., Griffin A. Finite temperature excitations of a trapped Bose gas. *Physical Review Letters*, 1997, vol. 78, no. 10, pp. 1842.
17. Proukakis N., Morgan S., Choi S., Burnett K. Comparison of gapless mean-field theories for trapped Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*, 1998, vol. 58, no. 3, pp. 2435.
18. Dalfovo F., Giorgini S., Pitaevskii L., Stringari S. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Reviews of Modern Physics*, 1999, vol. 71, no. 3, pp. 463.
19. Griffin A., Nikuni T., Zaremba E. *Bose-condensed gases at finite temperatures*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
20. Yukalov V. Basics of Bose-Einstein condensation. *Physics of Particles and Nuclei*, 2011, vol. 42, no. 3, pp. 460–513.
21. Yukalov V. Representative ensembles in statistical mechanics. *International Journal of Modern Physics B*, 2007, vol. 21, no. 01, pp. 69–86.
22. Gross E. Structure of a quantized vortex in boson systems. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 1961, vol. 20, no. 3, pp. 454–477.
23. Pitaevskii L. Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Soviet Physics - JETP*, 1961, vol. 13, no. 2, pp. 451–454.
24. Hugenholtz N., Pines D. Ground-state energy and excitation spectrum of a system of interacting bosons. *Physical Review*, 1959, vol. 116, no. 3, pp. 489.
25. Beliaev S. Energy spectrum of a non-ideal Bose gas. *Sov. Phys. JETP*, 1958, vol. 7, no. 2, pp. 299.
26. Fedichev P., Shlyapnikov G. Finite-temperature perturbation theory for a spatially inhomogeneous Bose-condensed gas. *Physical Review A*, 1998, vol. 58, no. 4, pp. 3146.
27. Zeldovich B., Blinnikov C., Shakura N. *Physical fundamentals of the structure and evolution of stars*. Moscow: Moscow St. Univ. Publ., 1981, 150 p. (In Russian)
28. Dokkum P., Abraham R., Merritt A. et al. Forty-seven milky way-sized, extremely diffuse galaxies in the coma cluster. *The Astrophysical Journal*, 2015, vol. 798, pp. L45.
29. Dwornik M., Keresztes Z., Kun E., Gergely L. Bose-Einstein condensate dark matter halos confronted with galactic rotation curves. *Advances in High Energy Physics*, 2017.
30. Randall S., Markevitch M., Clowe D. et al. Constraints on the self-interaction cross-section of dark matter from numerical simulations of the merging galaxy cluster 1E 0657-5. *The Astrophysical Journal*, 2008, vol. 679, no. 2, pp. 1173.
31. Strigari L., Bullock J., Kaplinghat M. et al. A common mass scale for satellite galaxies of the milky way. *Nature*, 2008, vol. 454, no. 7208, pp. 1096.
32. Bradač M., Allen S., Treu T. et al. Revealing the properties of dark matter in the merging cluster MACS J0025.4–1222. *The Astrophysical Journal*, 2008, vol. 687, no. 2, pp. 959.
33. Kaup D. Klein-Gordon Geon. *Physical Review*, 1968, vol. 172, no. 5, pp. 1331.
34. Levkov D., Panin A., Tkachev I. Gravitational Bose-Einstein condensation in the kinetic regime. *Physical Review Letters*, 2018, vol. 121, no. 15, pp. 151301.

**Авторы**

**Абдуллин Искандер Гусманович**, магистрант 2-го года, Институт физики, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, 18., г. Казань, 420008, Россия.

E-mail: videns42@gmail.com

**Попов Владимир Александрович**, к.ф.-м.н., доцент, кафедра теории относительности и гравитации, Институт физики, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, 18., г. Казань, 420008, Россия.

E-mail: vladipopov@mail.ru

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Абдуллин И. Г., Попов В. А. Гало бозе-конденсата темной материи с невырожденной компонентой // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2019. № 1. С. 26–44.

**Authors**

**Abdullin Iskander Gusmanovich**, second year undergraduate, Institute of Physics, Kazan Federal University, Kremlyovskaya st. 18, Kazan 420008, Russia.

E-mail: videns42@gmail.com

**Popov Vladimir Aleksandrovich**, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Institute of Physics, Kazan Federal University, Kremlyovskaya st. 18, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: vladipopov@mail.ru

**Please cite this article in English as:**

Abdullin I. G., Popov V. A. Bose-condensed dark matter halos with non-degenerate component. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2019, no. 1, pp. 26–44.