

УДК 530.12

© Комаров С. О., Горбачевич А. К., 2018

## КРАСНОЕ СМЕЩЕНИЕ СПЕКТРА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ИСТОЧНИКА, ВХОДЯЩЕГО В ДВОЙНУЮ СИСТЕМУ, ДВИЖУЩУЮСЯ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

Комаров С. О.<sup>a,1</sup>, Горбачевич А. К.<sup>a,2</sup>

<sup>a</sup> Кафедра теоретической физики и астрофизики, физический факультет, Белорусский государственный университет, Минск, 220030, Белоруссия

В работе получены уравнения движения двойной звезды во внешнем поле сверхмассивной черной дыры и на их основе разработан метод расчета красного смещения спектра электромагнитного излучения, излучаемого как точечным, так и протяженным источником, движущимся во внешнем сильном гравитационном поле, как функции собственного времени наземного наблюдателя. Метод применен для случая источника в двойной системе, движущейся в окрестности вращающейся черной дыры.

В начале детально рассмотрен случай движения точечного источника в соответствующем гравитационном поле. В отличие от широко представленных в литературе способов рассмотрения схожих проблем, в данной работе используется метод решения граничной задачи, сводящейся к решению системы обыкновенных нелинейных уравнений. При этом были использованы известные аналитические выражения для изотропных геодезических в метрике Керра. В отличие от методов, где параметры изотропных геодезических выбираются на основе составленных таблиц соответствия этих параметров координатам источника, развиваемый подход опирается на хорошо разработанные численные методы решения уравнений, что позволяет получать более точные результаты. Правомочность сделанных при этом приближений обсуждается в общем виде и на конкретных численных примерах.

Далее рассматривается случай двойной звездной системы во внешнем гравитационном поле. С математической точки зрения, последнюю задачу можно рассматривать как обобщение первой, что следует из предыдущих работ авторов.

Предложенный метод проиллюстрирован на примере двойной звезды, имеющей реалистичные параметры, соответствующие параметрам двойных систем, наблюдаемых в окрестности центра нашей галактики. Полученные результаты обсуждаются.

*Ключевые слова:* гравитационное красное смещение, метрика Керра, уравнения движения в общей теории относительности.

## REDSHIFT OF ELECTROMAGNETIC SPECTRUM OF RADIATION OF THE SOURCE THAT MOVES IN THE FIELD OF ROTATING BLACK HOLE

Komarov S. O.<sup>a,1</sup>, Gorbatsievich A. K.<sup>a,2</sup>

<sup>a</sup> Theoretical Physics and Astrophysics Department, Physics Faculty, Belarusian State University, Minsk, 220030, Belarus

In this paper, we obtained the equations of motion of a binary star in external gravitational field of a supermassive black hole. Using these equations, we developed a method for calculating the redshift of the spectrum of electromagnetic radiation, emitted by the source in a binary star that moves in external gravitational field of black hole, as a function of proper time of an earth observer. The case of a single point-like source is investigated firstly. Unlike widespread works, the proposed in this paper method uses solution of boundary value problem for isotropic geodesics. This problem is solved using the system of non-linear ordinary equations that are based on the analytical expressions of isotropic geodesics in Kerr metric. This gives possibility to find the impact parameters of isotropic geodesic more accurately. The validity of approximations that are used in the method is discussed in general and on the basis of numerical examples.

---

<sup>1</sup>E-mail: StasKomarov@tut.by

<sup>2</sup>E-mail: Gorbatsievich@bsu.by

Also the case of the source in a binary star that moves in external Kerr field is discussed. From the mathematical point of view the last problem can be considered as a certain generalization of the first problem.

The proposed method is illustrated on the mathematical model of binary star with realistic parameters of the objects that are observed in the vicinity of the Center of our Galaxy. The obtained results are discussed.

*Keywords:* gravitational redshift, Kerr metric, equations of motion in general theory of relativity.

PACS: 04.20.-q

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2018.4.57-69

## Введение

На протяжении десятков лет проводились исследования движения звезд в окрестности центра нашей Галактики, в результате которых было установлено, что в этой области находится сверхмассивная черная дыра массы  $M \approx 4 \cdot 10^6 M_{\odot}$ . (см., напр., [1–3];  $M_{\odot}$  — масса Солнца). Подробное изучение движения таких объектов, как звезды S-кластера (см., напр., [3–6]), рентгеновские пульсары и некоторые другие типы компактных объектов (см., напр., [7–9]), находящихся вблизи галактического центра, а следовательно в поле сверхмассивной черной дыры, позволяет проверять различные теории гравитации.

Особый интерес представляет случай, когда наблюдаемый источник электромагнитного излучения является компонентом гравитационно-связанной двойной системы, так как в случае двойных систем дополнительно могут быть исследованы такие эффекты, как взаимодействие собственного момента импульса двойной системы с внешним гравитационным полем, а так же изменение характеристик относительного движения компонент под влиянием приливных сил. Заметим, что значительную часть объектов вблизи Центра галактики составляют именно такие системы (см., напр., ([8, 9])).

В настоящей работе предложен метод вычисления временной зависимости красного смещения излучения, приходящего от источника в двойной системе, которая движется как целое во внешнем гравитационном поле вращающейся черной дыры. Как известно, в рамках общей теории относительности черная дыра в общем случае описывается метрикой Керра-Ньюмена. Однако, учитывая тот факт, что электрический заряд астрофизических объектов вряд ли может иметь заметное значение, мы ограничились рассмотрением черных дыр, описываемых метрикой Керра.

## 1. Уравнения движения двойной звезды

Рассмотрим компактную двойную звезду, движущуюся во внешнем гравитационном поле сверхмассивной черной дыры, обе компоненты которой имеют массы порядка солнечной. В этом случае выполняются следующие условия:

1. Расстояние между компонентами  $\rho$  значительно больше их собственного размера  $R_s$ :

$$\rho \gg R_s; \quad (1)$$

2. Расстояние между компонентами двойной системы намного меньше характерного масштаба неоднородностей гравитационного поля. Например, в случае гравитационного поля сверхмассивной черной дыры массы  $M$ :

$$\rho \ll M; \quad (2)$$

3. Относительное движение компонент является нерелятивистским:

$$\frac{v}{c} \ll 1, \quad (3)$$

где  $v$  - скорость относительного движения компонент двойной системы. При этом, однако, движение центра масс может быть релятивистским, или даже ультрарелятивистским.

В работе [10] было показано, что движение двойной системы во внешнем гравитационном поле, для которой выполняются условия (1) – (3), в хорошем приближении описывается системой уравнений Матиссона–Папаетру в линейном по спину приближении с дополнительным членом, учитывающим квадрупольный момент системы<sup>1</sup>:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \frac{Du^i}{D\tau} = -\frac{1}{2c} R^i{}_{skm} u^s \varepsilon^{mkn} M_b u_n - \frac{1}{3} h^i{}_s \frac{D}{D\tau} (R^s{}_{klm} Q^{kl} u^m), \\ \frac{DS^i}{D\tau} = \frac{1}{c^2} u^i S_n \frac{Du^n}{D\tau}. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $\varepsilon^{mkn}$  – псевдотензор Леви-Чевита,  $R^i{}_{skm}$  – тензор кривизны,  $u^i$  – 4-скорость,  $h^i{}_s = g^i{}_s + \frac{1}{c^2} u^i u_s$  – проективный тензор,  $M_b$  – момент импульса системы,  $Q^{kl}$  – ее квадрупольный момент. Последние определены относительно центра инерции в сопутствующей системе отсчета и удовлетворяют условиям:  $Q^{ij} = Q^{ji}$ ,  $M_i u^i = 0$ ,  $Q^{kj} u_j = 0$ .

Численные оценки показывают, что при правдоподобных значениях параметров двойной системы взаимодействием собственного момента импульса (спина) и квадрупольного момента с кривизной пространства-времени можно пренебречь, и движение центра инерции двойной системы в хорошем приближении можно считать геодезическим.

Относительное движение звезд в сопутствующей системе отсчета в обобщенных координатах Ферми с началом в центре инерции системы, задается уравнениями [10]:

$$\begin{aligned} \frac{dv^{(\varkappa)}}{dT} = & \left( \frac{G(m_1 + m_2)}{r} \right)_{,(\varkappa)} - 2\varepsilon^{(\varkappa)}{}_{(\alpha)(\tau)} \omega^{(\alpha)} v^{(\tau)} - \\ & - \frac{2c(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} R^{(\varkappa)}{}_{(\nu)(\mu)(4)} x^{(\mu)} v^{(\nu)} + 2D^{(\varkappa)}{}_{(\nu)} x^{(\nu)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $x^{(\alpha)}$  – обобщенные координаты Ферми относительного положения компонент двойной системы,  $v^{(\alpha)}$  – их трехмерная относительная скорость,  $m_1$  и  $m_2$  – массы компонент двойной системы.  $\omega^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \varepsilon^{(\alpha)(\varkappa)(\tau)} h_{(\tau)}^k \frac{Dh^k{}_{(\varkappa)}}{D\tau}$  – компоненты угловой скорости сопутствующей тетрады:  $h_{(4)}^i = \frac{1}{c} u^i$ ,  $h^i{}_{(\alpha)} h_{i(\beta)} = \eta_{(\alpha)(\beta)}$ , ( $\eta_{(\alpha)(\beta)}$  – тензор Минковского),  $\varepsilon^{(\alpha)(\beta)(\gamma)}$  – 3-х мерный символ Леви-Чевита,  $R_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)} = h^i{}_{(\alpha)} h^j{}_{(\beta)} h^k{}_{(\gamma)} h^l{}_{(\delta)} R_{ijkl}$  – тетрадные компоненты тензора кривизны,

$$D_{(\mu)(\nu)} = -\frac{c^2}{2} R_{(4)(\mu)(4)(\nu)} + \frac{1}{2} (\delta_{(\mu)(\nu)} \omega^2 - \omega_{(\mu)} \omega_{(\nu)}).$$

Базисную линию  $\xi(\tau)$ , в окрестности которой вводятся координаты Ферми (см. [10]), удобнее всего выбрать как мировую линию центра масс, в связи со сказанным выше, приближенно совпадающую с некоторой времениподобной геодезической.

## 2. Красное смещение

При описании электромагнитного излучения, распространяющегося от источника к наблюдателю, будем использовать приближение геометрической оптики (см., напр. [11]). В этом приближении мировые линии лучей света  $x^i(\nu)$ , где  $\nu$  – аффинный параметр, являются изотропными геодезическими во внешнем гравитационном поле. Волновой 4-вектор  $k^i = dx^i/d\nu$  – является касательным к ним и, следовательно, удовлетворяет уравнениям:

$$k_{i;j} k^j = 0; \quad k_j k^j = 0. \quad (6)$$

<sup>1</sup> Латинские индексы пробегает значения от 1 до 4, греческие от 1 до 3, индексы, заключенные в круглые скобки – тетрадные; сигнатура метрики +2

Красное смещение спектра излучения  $z$  может быть найдено по формуле:

$$z = \frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{(k^i)_s(u^i)_s}{(k^i)_o(u^i)_o} - 1, \quad (7)$$

здесь  $\lambda$  — длина волны испускаемого света,  $\delta\lambda$  — разность между длиной волны принятого и спущенного света,  $(u^i)_s$  — вектор 4-скорости источника излучения,  $(u^i)_o$  — 4-скорость наблюдателя,  $(k^i)_s$  — волновой 4-вектор света в точке испускания,  $(k^i)_o$  — волновой 4-вектор света в точке наблюдения. Если мировые линии источника и наблюдателя известны, то для вычисления  $(k^i)_o$ ,  $(k^i)_s$  необходимо решить граничную задачу для уравнений (6).

Обе задачи: о вычислении красного смещения спектра излучения и о вычислении интервалов времени между приходящими импульсами пульсара, могут быть сведены к одной, если учесть соотношение (см., напр., [8]):

$$t_{TOA}^{(N)} = t_{TOA}^{(N-1)} + T_p(1+z), \quad (8)$$

где  $T_p$  — период пульсара в собственной системе отсчета,  $t_{TOA}^{(j)}$  — время прихода  $j$ -го импульса к наблюдателю, в его собственной системе отсчета.

Мы будем проводить вычисления в такой системе отсчета, относительно которой приемник излучения покоится. Поэтому получим:

$$z = \frac{(k^i)_s(u^i)_s}{A} - 1, \quad (9)$$

здесь  $A = ck_4 = \text{const}$  вдоль изотропной геодезической. Для наблюдателя, покоящегося относительно внешнего стационарного гравитационного поля, красное смещение излучения источника в двойной системе, как функция собственного времени источника, имеет вид [12]:

$$1 + z(\tau) = (1 + z_0) \left( 1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{c} \frac{d}{d\tau} (n_{(\alpha)} x^{(\alpha)}) \right) + O \left( \frac{v^2}{M^2}, \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (10)$$

Чтобы получить красное смещение, как функцию времени наблюдения  $t$ , необходимо перейти в (10) к переменной  $t$ , используя соотношение:

$$t(\tau) = \int_0^\tau (1 + z(\tau')) d\tau'. \quad (11)$$

Обращая численно полученную функцию  $t(\tau)$ , найдем красное смещение  $z = z(\tau(t))$ .

### 3. Метрика Керра

В координатах Бойера-Лидквиста метрика Керра имеет вид:

$$ds^2 = -\rho^2 \frac{\Delta}{\Sigma^2} c^2 dt^2 + \frac{\Sigma^2}{\rho^2} \left[ d\phi - \frac{2aMr}{\Sigma^2} dt \right]^2 \sin^2 \theta + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (12)$$

где  $\{r, \theta, \phi, t\}$  — координаты Бойера-Лидквиста, а также здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta; & \Delta &= r^2 - 2Mr + a^2; \\ \Sigma^2 &= (r^2 + a^2)^2 - a^2 (r^2 - 2Mr + a^2) \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Уравнения геодезических в метрике Керра могут быть приведены к виду, в котором переменные разделяются (см., напр. [13]):

$$\frac{dr}{d\tau_M} = \pm \sqrt{R(r)}; \quad (13)$$

$$\frac{d \cos \theta}{d\tau_M} = \pm \sqrt{\Theta(\cos \theta)}; \quad (14)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau_M} = \Phi(r, \cos \theta); \quad (15)$$

$$\frac{dt}{d\tau_M} = T(r, \cos \theta), \quad (16)$$

где  $\tau_M(q) = \int_0^q dq / (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)$  — так называемый параметр времени Мино ( $q$  — собственное время вдоль геодезической в случае времениподобной геодезической, и некоторый аффинный параметр — в случае изотропной). Явный вид функций  $R(r)$ ,  $\Theta(\cos \theta)$ ,  $\Phi(r, \cos \theta)$ ,  $T(r, \cos \theta)$  для случая как времениподобных, так и изотропных геодезических, приведен в [13]. Для получения времениподобной геодезической, описывающей мировую линию источника, достаточно решить систему уравнений (13)-(16) численно. Для получения мировой линии луча света, удовлетворяющей граничной задаче, будем использовать аналитические выражения для изотропных геодезических в метрике Керра. В рамках рассматриваемой модели, приближение  $a/r_p$ , где  $r_p$  — минимальное значение координаты луча, является оправданным с физической точки зрения, чем мы и воспользуемся в дальнейшем, записывая решения системы (13)-(16) для изотропных геодезических в линейном приближении по этому параметру. Введем обозначения:

$$\xi = L/E; \quad \eta = Q/E^2,$$

где  $L$  и  $E$  — интегралы движения вдоль изотропной геодезической, связанные с аксиальной симметрией и стационарностью метрики Керра соответственно, а интеграл движения  $Q$  (постоянная Картера) связан с существованием тензора Киллинга в метрике Керра (см., напр., [14]).

С целью сокращения записи громоздких формул, будем пользоваться далее безразмерными величинами, выполняя переход:  $u/M \rightarrow u$ ,  $a/M \rightarrow a$ ,  $\xi/M \rightarrow \xi$ ,  $\eta/M^2 \rightarrow \eta$ ,  $c\tau_M/M \rightarrow \tau_M$ . Найдем точный аналитический вид зависимости  $\tau_M(\theta)$  из (14). Из (13) получим:

$$\left( \frac{du}{d\tau_M} \right)^2 = -a^2 \eta u^4 + 2[\eta + (\xi - a)^2]u^3 + (a^2 - \xi^2 - \eta)u^2 + 1. \quad (17)$$

В выбранном приближении, можем пренебречь первым слагаемым в (17). Тогда аналитическое решение для  $u(\theta)$  удобно получить раздельно для четырех различных случаев, определяемых знаком параметра  $\eta$ , с одной стороны, и типом траектории (имеет она перигитр, или нет) — с другой. Мы ограничимся здесь записью в явном виде лишь решения, для которого  $\eta > 0$  и перигитр существует:

$$\begin{aligned} \frac{u_s}{\mathcal{A}_u} = & 1 + 2 \sin \left( \mathcal{E}_u - \frac{2\pi}{3} \right) + 2\sqrt{3} \cos \mathcal{E}_u \operatorname{sn}^2 \left\{ \frac{i \sqrt{\cos(\mathcal{E}_u - \frac{\pi}{3})}}{\sqrt{\cos \mathcal{E}_u 2\sqrt{3}}} \times \right. \\ & \times \left( F \left[ \arccos \left( \frac{a \cos \theta_s}{\cos(\frac{\mathcal{E}_u}{2}) \sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta}} \right), K_\theta \right] - F \left[ \arccos \left( \frac{a \cos \theta_o}{\cos(\frac{\mathcal{E}_u}{2}) \sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta}} \right), K_\theta \right] \right) - \\ & \left. - F \left[ \arcsin \sqrt{\frac{-1 - 2 \sin(\mathcal{E}_u - \frac{2\pi}{3})}{2\sqrt{3} \cos \mathcal{E}_u}}, K_u \right], K_u \right\}, \quad (18) \end{aligned}$$

где  $F[\phi, k]$  — эллиптический интеграл 1-го рода, а  $\operatorname{sn}[\phi, k]$  — эллиптический синус Якоби (для определения см. [15]). Здесь мы использовали обозначения для пространственных координат источника

$\{1/u_s, \theta_s, \phi_s\}$ , и наблюдателя  $\{1/u_o, \theta_o, \phi_o\}$ . Также введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_u &= -\frac{1}{6} \frac{a^2 - \xi^2 - \eta}{\eta + (\xi - a)^2}; \\ \mathcal{E}_u &= \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \arcsin \left( 1 + \frac{54[\eta + (\xi - a)^2]^2}{(a^2 - \xi^2 - \eta)^3} \right); \quad \text{при } \frac{54[\eta + (\xi - a)^2]^2}{(a^2 - \xi^2 - \eta)^3} > -2; \\ \mathcal{E}_u &= -\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{3} \arcsin \left( 1 + \frac{54[\eta + (\xi - a)^2]^2}{(a^2 - \xi^2 - \eta)^3} \right); \quad \text{при } \frac{54[\eta + (\xi - a)^2]^2}{(a^2 - \xi^2 - \eta)^3} < -2; \\ \mathcal{E} &= \arcsin [2a\sqrt{-\eta}/(a^2 - \xi^2 - \eta)], \quad \text{при } a^2 - \xi^2 - \eta > 0; \\ \mathcal{E} &= \pi - \arcsin [2a\sqrt{-\eta}/(a^2 - \xi^2 - \eta)], \quad \text{при } a^2 - \xi^2 - \eta < 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K'_u &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{3} \sin \mathcal{E}_u}{\sqrt{4 \sin^2 \mathcal{E}_u - 1}} \right)}; \quad K_\theta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{\cos(\mathcal{E})} \right]}; \\ K_u &= \sqrt{\frac{1}{2} (1 - \sqrt{3} \operatorname{tg}(\mathcal{E}_u - \pi/3))}. \end{aligned}$$

Оценим теперь погрешность полученного решения. Причем рассмотрим здесь наиболее интересный случай, когда траектория луча света имеет перицентр (она может как проходить его после испускания света источником, так и являться частью бесконечно продолжимой при  $\tau_M \rightarrow -\infty$  кривой, согласно дифференциальным уравнениям). Для этого рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения 2-го порядка, решение которой совпадает с решением (17) при начальном условии  $u(0) = 0$ . Аффинный параметр будем отсчитывать от наблюдателя к источнику. Введем также обозначение  $\varepsilon = a^2\eta$ , и будем считать эту величину независимым параметром:

$$\frac{d^2u}{d\tau_M^2} = (a^2 - \xi^2 - \eta)u + 3[\eta + (\xi - a)^2]u^2 - 2\varepsilon u^3; \quad (19)$$

$$u(0) = 0; \quad \left. \frac{du(\tau_M)}{d\tau_M} \right|_{\tau_M=0} = 1. \quad (20)$$

Продифференцировав (19) по  $\varepsilon$  при  $\varepsilon = 0$  и обозначая

$$\left. \frac{\partial u(\tau_M, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = V(\tau_M),$$

получим задачу Коши для уравнения в вариациях (см., напр. [16]):

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{d\tau_M^2} &= (a^2 - \xi^2 - \eta + 6u[\eta + (\xi - a)^2])V - 2u^3; \\ V(0) &= 0; \quad \left. \frac{dV(\tau_M)}{d\tau_M} \right|_{\tau_M=0} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Данная задача сводится к следующему интегральному уравнению:

$$V(\tau_M) = \frac{2}{\sqrt{\xi^2 + \eta}} \int_0^{\tau_M} d\tau' f(\tau') \sin(\sqrt{\xi^2 + \eta}(\tau' - \tau_M)), \quad (22)$$

где введена функция  $f(\tau') = u^3(\tau') - 3u(\tau')V(\tau') [\eta + (\xi - a)^2]$ . Учтем возможную область изменения параметра  $\tau_M$ :  $0 < \tau_M < \pi/\sqrt{\xi^2 + \eta - a^2} + O(u_p^3)$ . Применяя теорему о среднем значении интеграла к (22) и считая функцию  $V(\tau')$  всюду достаточно малой, чтобы  $f(\tau')$  принимало максимальное значение вместе с  $u^3(\tau')$  (т. е.  $\max f(\tau') \approx u_p^3$ ), получим:

$$|V(\tau_M)| < \frac{4u_p^3}{\xi^2 + \eta - a^2}. \quad (23)$$

Разность решений для  $\varepsilon = a^2\eta$  и  $\varepsilon = 0$  есть  $\Delta u(\tau_M) \approx a^2\eta V$ , следовательно:

$$|\Delta u(\tau_M)| < \frac{4a^2\eta u_p^3}{\xi^2 + \eta - a^2}. \quad (24)$$

Таким образом, для больших значений прицельного параметра  $\xi$  или  $\sqrt{\eta}$  по сравнению с  $a$ , ошибка  $\Delta u$  мала.

Уравнение для полярного угла  $\phi$  получим из (15):

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \frac{d\phi}{d\tau_M} &= \frac{\xi}{1 - \cos^2\theta} + \frac{2ar - a^2\xi}{r^2 + a^2 - 2r} = \frac{\xi}{1 - \cos^2\theta} + \frac{2ra}{r^2 - 2r} - \frac{a^2\xi}{r^2 - 2r} - \\ &- \frac{2ra^3}{(r^2 - 2r)^2} + O(a^4/r^4). \end{aligned} \quad (25)$$

В вычислениях ограничимся лишь первыми двумя слагаемыми в (25), линейными по  $a$ . Тогда получим (для  $\eta > 0$  и траекторий с перигеумом):

$$\begin{aligned} \phi_s(\theta_s) &= \frac{a\sqrt{2\sqrt{3}}}{\sqrt{\cos(\mathcal{E}_u - \pi/3)(\xi^2 + \eta - a^2)}} \left( \frac{1}{1 - \mathcal{A}_u(2 + 4\sin(\mathcal{E}_u - 2\pi/3))} \times \right. \\ &\times \pi \left[ \arcsin \sqrt{\frac{\frac{u_s}{\mathcal{A}_u} - 1 - 2\sin(\mathcal{E}_u - \frac{2\pi}{3})}{2\sqrt{3}\cos\mathcal{E}_u}}, \quad \frac{4\sqrt{3}\cos\mathcal{E}_u}{\frac{1}{\mathcal{A}_u} - 2 - 4\sin(\mathcal{E}_u - \frac{2\pi}{3})}, \quad K_u \right] - \\ &- \text{F} \left[ \arcsin \sqrt{\frac{\frac{u_s}{\mathcal{A}_u} - 1 - 2\sin(\mathcal{E}_u - \frac{2\pi}{3})}{2\sqrt{3}\cos\mathcal{E}_u}}, \quad K_u \right] \Big) + \frac{a^2\xi}{a^2 - \cos^2(\frac{\xi}{2})\sqrt{\cos\mathcal{E}(a^2 - \xi^2 - \eta)}} \times \\ &\times \pi \left[ \arccos \left( \frac{a\cos\theta_s}{\cos\frac{\xi}{2}\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta}} \right), \quad \frac{\xi^2 + \eta - a^2}{\xi^2 + \eta + a^2 \operatorname{tg}^2\frac{\xi}{2}}, \quad K_\theta \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь  $\pi[\phi, c, k]$  — нормальный эллиптический интеграл Лежандра третьего рода (для определения см. [15]). Таким образом, система уравнений (18) и (26) задает траекторию, вдоль которой распространяется луч света, испущенный источником и принятый наблюдателем.

Оценим относительную погрешность угла  $\phi_s$ , вызванную указанным линейным по  $a/r_p$  приближением. Вначале найдем значение угла в нулевом по  $a/r$  приближении:

$$\phi_{s0} = \int_0^{\tau_M} \frac{\xi}{1 - \cos^2\theta} d\tau_M \geq \xi\tau_M. \quad (27)$$

Ошибку в вычислении можно оценить по величине следующего члена разложения в (25):

$$\Delta\phi_s = \int_0^{\tau_M} \frac{a^2\xi}{r^2 - 2r} d\tau_M \lesssim a^2\xi\tau_M u_p^2. \quad (28)$$

Таким образом, относительная погрешность:

$$\frac{\Delta\phi_s}{\phi_{s0}} < a^2 u_p^2. \quad (29)$$

Для решения полной краевой задачи, необходимо еще выразить прицельные параметры  $\xi$  и  $\eta$  через координаты источника и наблюдателя. Для этой цели необходимо решить систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} u_s(\tilde{\theta}_s, \xi, \eta) &= \frac{1}{\tilde{r}_s}; \\ \phi_s(\tilde{\theta}_s, \xi, \eta) &= \tilde{\phi}_s, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $\{\tilde{r}_s, \tilde{\theta}_s, \tilde{\phi}_s\}$  — значения пространственных координат источника, используемые в модели, а функции  $u_s, \phi_s$  — заданы равенствами (18) и (26). Зная прицельные параметры луча, найдем красное смещение по формуле (9).

Решая затем уравнения для относительного движения компонент в выбранном тетрадном базисе, найдем относительные положения компонент двойной системы, как функции собственного времени  $x^{(\alpha)}(\tau)$ . Подставляя найденные функции в (10), получим красное смещение для источника в двойной системе.

Отметим, что до сих пор задача об отыскании прицельных параметров луча света, распространяющегося в метрике Керра, решалась (см., напр., [5, 6]) посредством составления таблиц соответствия прицельных параметров и положения источника. В нашей работе использованы аналитические выражения (18) и (26), благодаря чему решение граничной задачи свелось не к поиску значения в таблице, что может привести к большой погрешности, а к решению системы уравнений.

#### 4. Численные результаты

Нелинейная зависимость функций, определяющих мировую линию луча света, от параметров  $\xi$  и  $\eta$ , не дает возможности заранее оценить погрешность в вычислении прицельных параметров (путем решения системы нелинейных уравнений (30)), вызванную приближением в этих функциях (см. формулы (24), (29)). Однако оценить эту погрешность для характерных случаев можно, используя точечные численные оценки. Для этого можно решить систему уравнений (13)-(16), полагая  $\xi = \xi_1$  и  $\eta = \eta_1$  для изотропной геодезической, численно, в обратном порядке (для распространения света от наблюдателя, к источнику). Найденными таким образом координатами «источника», воспользуемся для определения  $\xi = \xi_2$  и  $\eta = \eta_2$  путем решения системы (30). Тогда погрешности в вычислении прицельных параметров можно найти как  $\Delta\xi = \xi_2 - \xi_1$ ,  $\Delta\eta = \eta_2 - \eta_1$ . Результаты вычисления погрешностей для различных траекторий света представлены в Табл. 1. Если  $\Delta\xi$  и  $\Delta\eta$  — погрешности вычисления прицельных параметров, а  $\Delta z$  — вызванная ими погрешность в вычислении красного смещения, то из общих соотношений (9), (13)-(16), можно получить оценку:

$$\Delta z \sim \left( \Delta\xi + \frac{\Delta\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta}} \right) z, \quad (31)$$

Проанализируем результаты Табл. 1 с точки зрения наблюдения одиночного источника, движущегося во внешнем поле Керра по геодезической (однако, как легко заметить, те же рассуждения будут применимы и для красного смещения от источника в двойной системе, движущейся как целое во внешнем сильном гравитационном поле, так как в последнем случае справедлива формула (10)). Будем рассматривать источник на устойчивых орбитах ( $r_s \gtrsim 10$ ). Тогда результаты, приведенные в этой таблице, показывают, что при испускании света по удаляющейся от черной дыры траектории (т. е. без прохождения ей перигентра), ошибка в вычислении красного смещения остается малой, и убывает при увеличении  $r_s$  (см. также (31)). Однако в случае, когда испущенное излучение проходит перигентр траектории луча, близкий к черной дыре, а затем направляется к наблюдателю, как это и следует из предварительных оценок (см. формулы (24), (29)), ошибка в значении красного смещения может быть значительной, причем рост  $r_s$  ее практически не уменьшает. Данный факт еще раз указывает на то, что при анализе полного графика красного смещения излучения от источника, движущегося в поле черной дыры, с ростом параметра Керра  $a$  необходимо учитывать все больше членов разложения по этому параметру. Хотя очевидно, что с ростом  $r_s$  рассмотренные в последнем случае траектории луча будут играть роль на все меньших относительных интервалах времени, в течении которого регистрируется красное смещение.

Из результатов, приведенных в Табл. 1 также видно, что луч света, имеющий малые значения прицельных параметров и проходящий перигентр своей орбиты, соответствует изображениям более высоких порядков (см., напр., [17, 18]), так как соответствующее изменение азимутального



**Таблица 1**

Сравнение точных прицельных параметров луча для источника во внешнем Поле Керра и найденных путем решения системы нелинейных алгебраических уравнений. Значение параметра Керра  $a = 0.9M$

Траектория луча света не проходит перицентр.

$\theta_o = 1,45$ ; точные значения прицельных параметров $\xi_1 = 5, \eta_1 = 2$ .		
Координаты источника $\{r_s; \theta_s; \phi_s\}$	Вычисленные значения	
	$\xi_2$	$\eta_2$
{10, 4; 1, 59; 0, 51}	4, 986	2, 0003
{25, 2; 1, 50; 0, 20}	4, 998	1, 9998
{50, 1; 1, 48; 0, 10}	4, 9995	1, 9999
{125; 1, 46; 0, 04}	4, 9999	1, 99999
$\theta_o = 1,55$ ; точные значения прицельных параметров $\xi_1 = 6, \eta_1 = 3$ .		
{20, 3; 1, 64; 0, 30}	5, 996	3, 0001
{33, 5; 1, 60; 1, 81}	5, 999	3, 00001
{50, 1; 1, 58; 0, 12}	5, 999	3, 00000

Траектория луча света проходит перицентр.

$\theta_o = 1,45$ ; точные значения прицельных параметров $\xi_1 = 5, \eta_1 = 2$ .		
Координаты источника $\{r_s; \theta_s; \phi_s\}$	Вычисленные значения	
	$\xi_2$	$\eta_2$
{8, 5; 1, 57; 3, 82}	5, 2	3, 70
{14, 5; 1, 50; 4, 07}	5, 3	3, 05
{25, 0; 1, 46; 4, 23}	5, 3	2, 88
{49, 5; 1, 44; 4, 33}	5, 35	2, 82
{3846; 1, 41; 4, 43}	5, 4	2, 73
$\theta_o = 1,55$ ; точные значения прицельных параметров $\xi_1 = 6, \eta_1 = 3$ .		
{11, 6; 1, 41; 3, 54}	6, 13	5, 51
{24, 8; 1, 44; 3, 85}	6, 28	4, 07
{48, 1; 1, 40; 3, 97}	6, 32	3, 90
{1250; 1, 38; 4, 09}	6, 36	3, 81

угла для него  $\phi_s > \pi$ . Для таких лучей погрешности вычисления красного смещения предложенным методом наиболее велики. По этой причине, здесь мы будем в основном рассматривать красное смещение излучения, распространяющегося от источника к наблюдателю именно по траекториям, имеющим главный порядок (для которых  $\phi_s < \pi$ ). Соответствующая часть красного смещения может быть легко отделена от остальных его частей, соответствующим лучам более высших порядков, так как в первом случае излучение имеет наибольшую интенсивность. Если луч имеет порядок  $n$ , то интенсивность принятого излучения пропорциональна величине  $\sim e^{-2\pi n}$ . Стоит также отметить, что в некоторых случаях, анализ лучей, приходящих к наблюдателю по траекториям более высоких порядков также является полезным для решения некоторых задач (см., напр. [17, 19]). Результаты вычисления красного смещения для случая точечного источника, движущегося во внешнем гравитационном поле Керра, полученные авторами, опубликованы в [20].

Для численного решения системы уравнений относительного движения компонент, необходимо выбрать тетраду во внешнем гравитационном поле. Выберем ее в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 h^i_{(1)} &= \{0, 0, 1, L/E\} (1/\sqrt{N_1}); \\
 h^i_{(2)} &= \{1, 0, M_3, M_4\} (1/\sqrt{N_2});
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

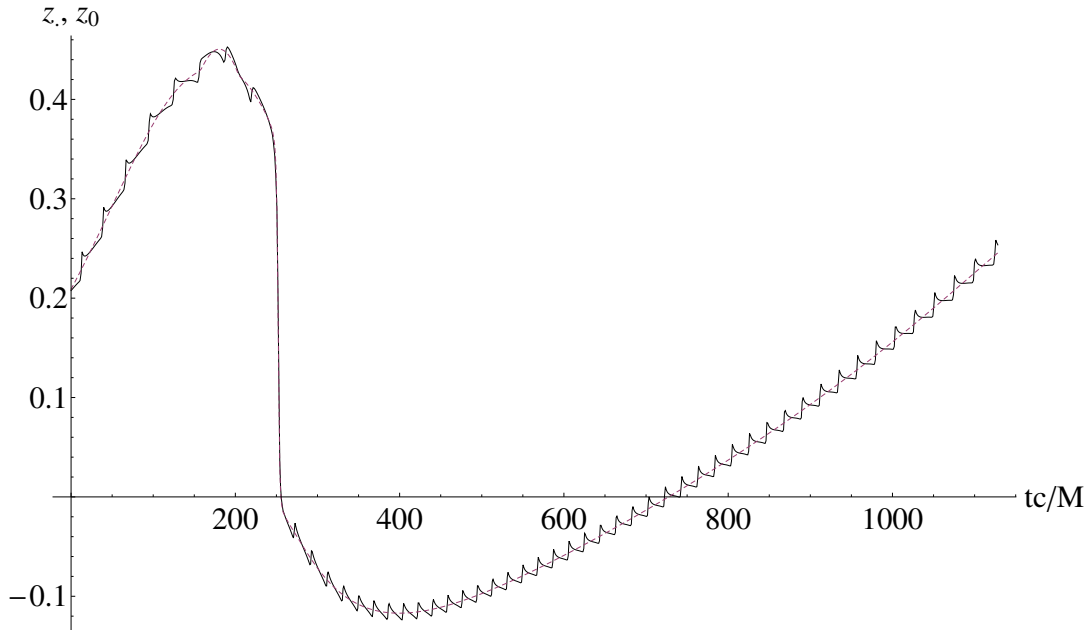
$$h^i_{(3)} = \{1, \mathcal{F}, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\} (1/\sqrt{\mathcal{N}_3});$$

$$h^i_{(4)} = \{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \mathcal{U}_4\},$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \frac{1}{\rho^2} \sqrt{(E(a^2 + r^2) - aL)^2 - \Delta((L - aE)^2 + Q + r^2)}; \\ \mathcal{U}_2 &= \frac{1}{\rho^2} \sqrt{Q - \cos^2 \theta (a^2(1 - E^2) + L^2/\sin^2 \theta)}; \\ \mathcal{U}_3 &= (2aEr + L(\rho^2 - 2r)/\sin^2 \theta)/(\Delta\rho^2); \\ \mathcal{U}_4 &= (E\Sigma^2 - 2aLr)/(\Delta\rho^2); \\ \mathcal{M}_1 &= \frac{\rho^2 \mathcal{U}_3}{\sqrt{((r^2 + a^2)E - aL)^2 - \Delta(Q + (L - aE)^2 + r^2)}}; \\ \mathcal{M}_2 &= \frac{\rho^2 \mathcal{U}_4}{\sqrt{(E(a^2 + r^2) - aL)^2 - \Delta((L - aE)^2 + Q + r^2)}}; \\ \mathcal{M}_3 &= \frac{\rho^2 \mathcal{U}_1 (2aEr \sin^2 \theta + L(\rho^2 - 2r))}{\Delta(-4aELr \sin^2 \theta + E^2 \Sigma^2 \sin^2 \theta - L^2(\rho^2 - 2r))}; \\ \mathcal{M}_4 &= \frac{\rho^2 \sin^2 \theta \mathcal{U}_4 \sqrt{(E(a^2 + r^2) - aL)^2 - \Delta((L - aE)^2 + Q + r^2)}}{(-4aELr \sin^2 \theta + E^2 \Sigma^2 \sin^2 \theta - L^2(\rho^2 - 2r))}; \\ \mathcal{F} &= \frac{-\rho^2 \mathcal{U}_1 + \Delta(E\mathcal{M}_2 - L\mathcal{M}_1)}{\Delta\rho^2 \mathcal{U}_2}. \end{aligned} \quad (33)$$

$\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$  — соответствующие нормировочные множители. Результаты вычисления красного смещения излучения от источника в компактной двойной системе приведены на Рис. 1



**Рис. 1.** Красное смещение  $z(t)$  (сплошная) и  $z_0(t)$  (штрихованная), как функция времени наблюдения  $t$ . Выбранные параметры движения двойной системы следующие: параметр Керра  $a = 0,1M$ ; удельный момент импульса на единицу массы,  $L = 4,9M$ ; удельная постоянная Картера на единицу массы  $Q = 3,0$ ; удельная энергия на единицу массы,  $E = 0,984$ ; масса источника,  $m_1 = 8,89 \cdot 10^{-7}M$ ; масса звезды-компаньона,  $m_2 = 4,45 \cdot 10^{-7}M$ ; начальное относительное положение,  $x^i = \{0; 0,04M; 0\}$ ; начальная относительная скорость,  $v^i/Mc = \{0,002; 0; 0,0015\}$ .

## Заключение

Из результатов вычисления красного смещения, представленных на графике (см. Рис. 1) видно, что в данной зависимости выделяются две структуры: медленно меняющаяся со временем, которая соответствует движению двойной системы как целого, и быстро меняющаяся, соответствующая относительному движению компонент. Эти свойства полученной зависимости могут быть полезны при решении обратной задачи — восстановлении параметров движения двойной системы, по известному из наблюдений красному смещению.

## Список литературы

1. Gillessen S., Plewa P., Eisenhauer F., et. al. An update on monitoring stellar orbits in the galactic center. *Astrophys. J.* 2017; 837: S. 19.
2. Mark R., Morris. The environment of the galaxy's central black hole. In *The galactic black hole. Lectures on General Relativity and Astrophysics*, edited by H. F. Falcke and F. W. Hehl. S. 95–122. Ltd 2003.
3. Eisenhauer F., Genzel R., Gillessen S. The galactic center massive black hole and nuclear star cluster. *Rev. Mod. Phys.* 2010; 82: S. 3121–3195.
4. Gillessen S., Eisenhauer F., Trippe S., et. al. Monitoring stellar orbits around the massive black hole in the galactic center. *Astrophys. J.* 2009; 692: S. 1075–1109.
5. Youjun Lu, Fupeng Zhang, Qingjuan Yu. On testing the kerr metric of the massive black hole in the galactic center via stellar orbital motion: full general relativistic treatment. *Astrophys. J.* 2015; 809: S. 27.
6. Paumard T., Grould M., Vincent F.H., Perrin G. General relativistic effects on the orbit of the s2 star with gravity. *Astronomy and Astrophysics.* 2017; 608: S. A60, 1–22.
7. Psaltis D., Wex N., Kramer M. A quantitative test of the no-hair theorem with sgr A\* using stars, pulsars, and the event horizon telescope. *Astrophys. J.* 2016; 818: S. 19.
8. Fupeng Zhang, Prasenjit Saha. Probing the spinning of the massive black hole in the galactic center via pulsar timing: A full relativistic treatment. *Astrophys. J.* 2017; 849: S. 15.
9. Hailey C.J., Mori K., Bauer F.E., et al. A density cusp of quiescent x-ray binaries in the central parsec of the galaxy. *Nature (London).* 2018; 556: S. 70–73.
10. Gorbatsievich A., Bobrik A. The equations of motion of compact binaries in the neighbourhood of supermassive black hole. In *The Sun, The Stars, The Universe and General Relativity: International Conference in Honor of Ya.B. Zeldovich's 95th Anniversary* vol. 1205: S. 87–96. AIP 2010; 10.17238/issn2226-8812.2018.4.57-691 0.1063/1.3382338.
11. Stephani H. Relativity. An introduction to Special and General Relativity. Third English edition: "Cambridge University Press"; 2004.
12. Komarov S., Gorbatsievich A., Tarasenko A. Redshift of a compact binary star in the neighborhood of a supermassive black hole. *General Relativity and Gravitation.* 2018; 50: S. 132.
13. Ryuichi Fujita, Wataru Hikida. Analytical solutions of bound timelike geodesic orbits in kerr spacetime. *arXiv:0906.1420v2.* 2012.
14. Chandrasechar S. The mathematical theory of black holes. New York: Oxford University press; 1983.
15. Korn G.A., Korn T.M. Mathematical handbook for scientists and engineers; definitions, theorems and formulas; for reference and review. New York, San Francisco, Toronto, London, Sidney: McGraw-Hill Book company; 1968.
16. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Издание четвертое, 368 с. Ижевск: Редакция журнала "Регулярная и хаотическая динамика"; 2000.
17. Bisnovatyi-Kogan G.S., Tsupko Yu. Strong gravitational lensing by schwarzschild black holes. *Astrophysics.* 2008; 51: S. 99–111.
18. Gorbatsievich A., Komarov S., Tarasenko A. Optical appearance of a compact binary system in the neighbourhood of supermassive black hole. *arXiv:1702.08381.* 2017;.
19. Tarasenko A. Reconstruction of a compact object motion in the vicinity of a black hole by its electromagnetic radiation. *Phys. rev. D.* 2010; 81: S. 123005.

20. Комаров С.О., Горбачевич А.К., Тарасенко А.Н. Красное смещение излучения точечного источника, движущегося в поле вращающейся черной дыры // *Докл. Нац. акад. наук Беларуси*. 2018. 62. №6. С. 668–673.

## References

1. Gillessen S., Plewa P., Eisenhauer F., et. al. An update on monitoring stellar orbits in the galactic center. *Astrophys. J.*, 2017, vol. 837, pp. 19.
2. Mark R., Morris. The environment of the galaxy's central black hole. In *The galactic black hole. Lectures on General Relativity and Astrophysics*, edited by H. F. Falcke and F. W. Hehl, pp. 95–122. Ltd 2003.
3. Eisenhauer F., Genzel R., Gillessen S. The galactic center massive black hole and nuclear star cluster. *Rev. Mod. Phys.*, 2010, vol. 82, pp. 3121–3195.
4. Gillessen S., Eisenhauer F., Trippe S., et. al. Monitoring stellar orbits around the massive black hole in the galactic center. *Astrophys. J.*, 2009, vol. 692, pp. 1075–1109.
5. Youjun Lu, Fupeng Zhang, Qingjuan Yu. On testing the kerr metric of the massive black hole in the galactic center via stellar orbital motion: full general relativistic treatment. *Astrophys. J.*, 2015, vol. 809, pp. 1–27.
6. Paumard T., Grould M., Vincent F.H., Perrin G. General relativistic effects on the orbit of the s2 star with gravity. *Astronomy and Astrophysics*, 2017, vol. 608, pp. A60, 1–22.
7. Psaltis D., Wex N., Kramer M. A quantitative test of the no-hair theorem with sgr A\* using stars, pulsars, and the event horizon telescope. *Astrophys. J.*, 2016, vol. 818, pp. 1–19.
8. Fupeng Zhang, Prasenjit Saha. Probing the spinning of the massive black hole in the galactic center via pulsar timing: A full relativistic treatment. *Astrophys. J.*, 2017, vol. 849, pp. 1–15.
9. Hailey C.J., Mori K., Bauer F.E., et al. A density cusp of quiescent x-ray binaries in the central parsec of the galaxy. *Nature (London)*, 2018, vol. 556, pp. 70–73.
10. Gorbatsievich A., Bobrik A. The equations of motion of compact binaries in the neighbourhood of supermassive black hole. In *The Sun, The Stars, The Universe and General Relativity: International Conference in Honor of Ya.B. Zeldovich's 95th Anniversary* vol. 1205 pp. 87–96. AIP 2010. 10.17238/issn2226-8812.2018.4.57-691 0.1063/1.3382338.
11. Stephani H. *Relativity. An introduction to Special and General Relativity*. Third English edition: "Cambridge University Press"; 2004.
12. Komarov S., Gorbatsievich A., Tarasenko A. Redshift of a compact binary star in the neighborhood of a supermassive black hole. *General Relativity and Gravitation*, 2018, vol. 50, pp. 132.
13. Ryuichi Fujita, Wataru Hikida. Analytical solutions of bound timelike geodesic orbits in kerr spacetime. *arXiv:0906.1420v2*, 2012.
14. Chandrasechar S. *The mathematical theory of black holes*. New York: Oxford University press; 1983.
15. Korn G.A., Korn T.M. *Mathematical handbook for scientists and engineers; definitions, theorems and formulas; for reference and review*. New York, San Francisco, Toronto, London, Sidney: McGraw-Hill Book company; 1968.
16. Arnold V.I. *Usual differential equations*. Izhevsk, "Regularnaya i haoticheskaya dinamika" Publ., 2000, 368 p. (In Russian)
17. Bisnovaty-Kogan G.S., Tsupko Yu. Strong gravitational lensing by schwarzschild black holes. *Astrophysics*, 2008, vol. 51, pp. 99–111.
18. Gorbatsievich A., Komarov S., Tarasenko A. Optical appearance of a compact binary system in the neighbourhood of supermassive black hole. *arXiv:1702.08381*, 2017.
19. Tarasenko A. Reconstruction of a compact object motion in the vicinity of a black hole by its electromagnetic radiation. *Phys. rev. D*, 2010, vol. 81, pp. 123005.
20. Komarov S.O., Gorbatsievich A.K., Tarasenko A.N. Redshift of radiation of a point-like source moving in the external Kerr field. *Reports of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 6, pp. 668–673. (In Russian)

## Авторы

**Комаров Станислав Олегович**, аспирант, кафедра теоретической физики и астрофизики, физический факультет, Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, Минск, 220030, Белоруссия.

E-mail: StasKomarov@tut.by

**Горбачевич Александр Константинович**, д. ф.-м. н., профессор, кафедра теоретической физики и астрофизики, физический факультет, Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, Минск, 220030, Белоруссия.

E-mail: Gorbatsievich@bsu.by

## Просьба сослаться на эту статью следующим образом:

Комаров С. О., Горбачевич А. К. Красное смещение спектра электромагнитного излучения источника, входящего в двойную систему, движущуюся в гравитационном поле вращающейся черной дыры // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2018. № 4. С. 57–69.

## Authors

**Komarov Stanislav Olegovich**, postgraduate at the Theoretical Physics and Astrophysics Department, Physics Faculty, Belarusian State University, Nezavisimosti av., 4, Minsk, 220030, Belarus.

E-mail: StasKomarov@tut.by

**Gorbatsievich Alexander Konstantinovich**, Dr. Prof. Theoretical Physics and Astrophysics Department, Physics Faculty, Belarusian State University, Nezavisimosti av., 4, Minsk, 220030, Belarus.

E-mail: Gorbatsievich@bsu.by

## Please cite this article in English as:

Komarov S. O., Gorbatsievich A. K. Redshift of electromagnetic spectrum of radiation of the source that moves in the field of rotating black hole. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2018, no. 4, pp. 57–69.