УДК 530.12

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ, ОСНОВАННАЯ НА ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ЛОГИКЕ

Гуц А. К.[a,1]

[a] Кафедра кибернетики, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, г. Омск, 644077, Россия

В статье излагается теория гравитация, основанная на инфинитозимальном анализе Кока-Ловера. Переход от классического дифференциального и интегрального исчисления к анализу Кока-Ловера означает переход от классической двузначной логики к интуиционистской логике. Теория множеств не может уже служить способом интерпретации объектов такой теории, и приходится использовать теорию гладких топосов. Топосные модели представляют окружающий нас Внешний Мир более многогранным, многовариантным, состоящим из бесконечного многообразия различных многомерных «параллельных» миров, наделённых новыми физическими свойствами.

Ключевые слова: общая теория относительности, интуиционистская логика, инфинитозимал, гладкий инфинитозимальный анализ, топосы, интуиционистская теория гравитации, принцип эквивалентности, антигравитация, космология.

GENERAL RELATIVITY BASED ON INTUITIONISTIC LOGIC

Guts A. K.[a,1]

[a] Dostoevsky Omsk State University, Omsk, 644077, Russia

The article represents the theory gravity based on Kock-Lower's infinitosimal analysis. Transition from classical differential and integral calculus to Kock-Lower's analysis means the transition from the classical two-valued logic to intuitionistic logic. Set theory is not may already serve as a way of interpreting the objects of such a theory, and it is necessary to use the theory of smooth topoi. Topos models represent the Universe around us more multifaceted, multivariate consisting of an infinite variety of different many-dimensional "parallel"worlds which are endowed with new physical properties.

Keywords: general relativity, intuitionistic logic, infinitosimal, smooth infinitosimal analysis, topoi, intuitionistic theory of gravitation, principle of equivalence, antigravitation, cosmology.

PACS: 04.20.Cv
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2018.4.70-91

Введение

Общая теория относительности построена с точки зрения математики на основе классического дифференциального исчисления, опирающегося на двузначную логику Аристотеля-Лейбница. К чисто математическим аксиомам и понятиям добавляются физические понятия и постулаты, главными из которых являются уравнения Эйнштейна.

[1]E-mail: guts@omsu.ru

Получается аксиоматическая логическая система, которая обеспечивает получение истинных предложений (высказываний) о внешней физической Реальности. При ее построении обеспечивается привязка исходных понятий системы к совокупностью ощущений исследователей, взаимодействующих с окружающим пространством материальных объектов – Миром феноменов.

Предложение верно, если оно выведено внутри некоторой логической системы по принятым правилам. Содержание истины в системе определяется надежностью и полнотой ее соответствия с совокупностью ощущений. Вернее, предложение заимствует свою «истинность» из запаса истины, содержащегося в системе, его заключающей (Эйнштейн, [1, с. 76]).

Таким образом, многообразие истинных предложений определяется в определенной мере запасом истины, сосодержащегося в логической системе физической теории.

Смена логики, набора ее аксиом неизбежно влечет пересмотр набора истинных предложений, высказываний физической теории.

В данной статье продемонстрировано, каким будет набор физических истин, касающихся гравитации и пространства-времени, если из логики исключить аксиому исключенного третьего, а определение производной функции свести к чисто алгебраическим тождествам.

1. Математический аппарат

Для изложения интуиционистского варианта ОТО нам необходим математический аппарат, в котором функции можно дифференцировать и интегрировать.

1.1. Неклассическая логика

Логика классической физики двузначна. Она имеет дело с высказываниями, которые либо истинны, либо ложны. Но уже в квантовой механике есть высказывания, которые, по сути дела, содержат слово «вероятно». Логика таких высказываний не является классической, это модальная логика. Интерпретации высказываний такой логики, как показывает семантика Крипке, содержит множество классических вариантов, реализующих то или иное числовое значение слова «вероятно», т.е. вероятности.

Однако привычная двузначная логика может быть возвращена в форме интерпретаций формальной теории. Сюрприз, который нас ожидает, заключается в том, что таких *истинных* интерпретаций **одной** формальной теории может быть бесконечно много! Каждая интерпретация – это аристотелев вариант со своим временем интуиционистского вневременного Мира феноменов.

1.2. Интуиционистская логика

Интуиционистская логика – пример неклассической логики, созданной Гейтингом, благодаря критике классической математики, появившейся в начале XX века в серии работ голландского математика Брауэра.

Любое высказывание в интуиционистской логике считается осмысленным, только если оно выражает возможность некоторого умственного построения, и считается истинным, только если исследователю удалось выполнить соответствующее построение [1].

Для интуициониста формула в арифметике

$$\exists x \mathcal{A}(x),$$

т.е. «существует такое число n, что истинно высказывание $\mathcal{A}(n)$», трактуется как предъявление способа построения этого числа n тогда, как в классической логике достаточно только доказать, что такое число n существует [2, с. 434].

[1] Интуиционизм / Википедия. – http://ru.wikipedia.org/

В интуиционистской логике высказывание $\neg\mathcal{A}$ считается истинным, если принятие $\mathcal{A}$ ведет нас к противоречию; а дизъюнкция $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ истинна, если истинно либо $\mathcal{A}$, либо $\mathcal{B}$ и существует способ, позволяющий распознать, какое из этих двух высказываний истинно [2, с. 435].

В силу такого понимания дизъюнкции, интуиционист не принимает закона исключенного третьего

$$\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A},$$

поскольку нет общего метода распознавания по высказыванию $\mathcal{A}$, истинно $\mathcal{A}$ или $\neg\mathcal{A}$. Высказывание вида $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$ может и не быть истинным, если проблема истинности $\mathcal{A}$ не решена к настоящему времени.

Закон исключенного третьего позволяет конструировать функции следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0, \\ 0, & \text{если } x \neq 0; \end{cases}$$

отказ от закона исключенного третьего лишает нас такой возможности, привычной в классической математике.

В интуиционистской логике не принимается аксиома

$$\neg\neg\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A}. \tag{1}$$

Поэтому нельзя доказывать теоремы от противного. Действительно, при доказательстве теоремы $\mathcal{A}$ от противного предполагают, что верно на самом деле $\neg\mathcal{A}$, и затем приходят к некоторому противоречию. Это показывает, что «не истинно» $\neg\mathcal{A}$, т.е «истинно» $\neg\neg\mathcal{A}$. Последнее позволяет утверждать, благодаря (1), что «верно» $\mathcal{A}$. Однако при этом не дается метода проверки истинности $\mathcal{A}$, что для интуициониста неприемлемо и, следовательно, аксиома (1) отвергается.[2]

1.3. Метаязык физической теории

Предположим, что мы примем в качестве логики физической теории вместо классической логики какую-нибудь иную, неклассическую логику. Возникает вопрос, какая при этом логика должна быть использована физиком в ходе научного размышления и при изложении в форме текста, учебника научных результатов? Ведь при размышлении, которые состоят из рассуждений, мы помним, что любое рассуждение состоит из простых шагов, каждый из которых заключается в опознавании того, что одни предложения являются непосредственными *логическими* следствиями других.

В этой ситуации физику придется стать двуязычным, различая классические язык и логику своих размышлений от языка и логики собственно физической теории. Поскольку язык физической теории – это язык используемого математического аппарата, то логика физической теории совпадает с логикой, используемого математического языка. Язык же рассуждений физика, остающийся во власти классической логики, следует именовать *метаязыком* физической теории.

1.4. Гладкий инфинитозимальный анализ Кока-Ловера

Новый математический аппарат следует строить, вернув в теорию понятие бесконечно малой величины. От этого понятия отказались в XIX веке в силу его противоречивости с точки зрения классической логики.

Таким образом, стоит задача ввести бесконечно малые величины, *расширив* множество действительных чисел $\mathbb{R}$. Поэтому рассматриваем «новое множество чисел»

$$R = \mathbb{R} + \{\text{бесконечно малые числа}\}.$$

[2]Продемонстрированное рассуждение доказательства от противного, как нетрудно видеть, использует закон исключенного третьего. Поэтому отказ от закона исключенного третьего приводит к отказу от правила (1).

Можно, однако, ожидать, что изменится алгебраическая структура «нового множества чисел».

Необходимый нам новый математический анализ, который будем называть гладким инфинитозимальным анализом Кока-Ловера, строится аксиоматически, и одна из аксиом – аксиома Кока-Ловера – представляет условие дифферецируемости всех функций $f : R \to R$, где R – коммутативное кольцо, включающее действительные числа с единицей (см. подробности в [3]):

(**Аксиома Кока-Ловера**).

$$\forall (f \in R^D) \exists ! (a,b) \in R \times R \forall d \in D (f(d) = a + b \cdot d),$$

где $D = \{x \in R : x^2 = 0\}$.

Кольцо R, как видим, дополнительно к обычным действительным числам из $\mathbb{R}$, располагает ещё элементами, называемыми *инфинитозималами* и входящими в «множества»

$$D = \{d \in R : d^2 = 0\}, \quad ..., \quad D_k = \{d \in R : d^{k+1} = 0\}, ...,$$

$$\Delta = \{x \in R : f(x) = 0, \ \forall f \in m_0^g\},$$

где $m_{\{0\}}^g$ – идеал функций, имеющих нулевой росток в 0 [3], причём

$$D \subset D_2 \subset ... \subset D_k \subset ... \subset \Delta .$$

Аксиома Кока-Ловера несовместима с законом исключённого третьего [4]. Поэтому в теории гладкого инфинитозимального анализа неприемлемы рассуждения с использованием классической логики. Это означает, что мы не можем проинтепретировать формулы инфинитозимального анализа Кока-Ловера в рамках теории множеств, как это нам привычно в случае классической логики.

1.5. Инфинитозимальное дифференциальное исчисление

Производная. Из аксиомы Кока-Ловера следует, что если дана функция $f : R \to R$, то для каждой точки $x \in R$ существует единственное число, обозначаемое как $f'(x)$, такое, что

$$f(x + d) = f(x) + f'(x) \cdot d \tag{2}$$

для любого $d \in D$.

Тем самым мы дали определение производной $f'(x)$ функции $f : R \to R$ в точке $x \in R$. Отметим, что формула (2) является чисто алгебраической – отсутствует какое-либо понятие предела ($\varepsilon - \delta$-язык Коши или предел по Гейне). Анализ сводится к алгебре!

Все производные от любой функции вычисляются по привычным правилам, и результат совпадает с классическими выражениями. Справедива формула Тейлора.

Частные производные. Пусть дана функция $f : R^n \to R$. Рассмотрим функцию

$$g(d) = f(x^1 + d, x^2, ..., x^n).$$

По аксиоме Кока-Ловера,

$$g(d) = g(0) + b \cdot d. \tag{3}$$

Обозначим b через $\frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1, ..., x^n)$. Подставляя это в (3), получаем равенство

$$f(x^1 + d, x^2, ..., x^n) = f(x^1, x^2, ..., x^n) + \frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1, ..., x^n) d,$$

$$f \in D,$$

[3]Иначе говоря, исчезающих в некоторой окрестности точки 0.

которое характеризует функцию

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} : R^n \to R,$$

называемую *частной производной* f *по* x^1.

Пусть

$$D_1(n) = \{\delta = (\delta^1, ..., \delta^n) \in R^n : \forall ij(\delta^i \delta^j = 0)\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & f(x^1 + \delta^1, x^2 + \delta^2, ..., x^n + \delta^n) = \\ & = f(x^1, x^2, ..., x^n) + \sum_{i=1}^{n} \delta^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x^1, ..., x^n). \end{aligned} \tag{4}$$

1.6. Гладкая псевдориманова геометрия

Рассматривая R^4 как *формальный* Мир событий, мы можем говорить о координатах точек $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in R^4$, а также о *гладкой псевдоримановой метрике* $g_{ik}(x)$, линейной римановой связности

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \tag{5}$$

и кривизне

$$R^l_{kji}(x) := \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^l_{ki}(x) - \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^l_{kj}(x) + \Gamma^n_{ki}(x) \Gamma^l_{nj}(x) - \Gamma^m_{kj}(x) \Gamma^l_{mi}(x),$$

совпадающей с классической формулой для тензора кривизны.

Тензор Риччи также вычисляется по известной формуле

$$R_{kj} = R^l_{kjl},$$

$$R_{kj} = \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^l_{kj}}{\partial x^l} + \Gamma^n_{kl} \Gamma^l_{nj} - \Gamma^m_{kj} \Gamma^l_{ml},$$

а скалярная кривизна –

$$R = g^{kj} R_{kj}.$$

Все формулы неклассической гладкой псевдоримановой геометрии имеют тот же вид, что и в классическом случае.

Кривая $\gamma : R \to M$ называется *геодезической относительно линейной связности* ∇, если

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\Gamma^i_{jk}(\gamma(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^i}{dt}. \tag{6}$$

2. Интерпретация теории. Стадии

Аксиоматически изложенный нами гладкий анализ Кока-Ловера – это чисто *формальная теория* $\mathcal{T}$, практическое применение которой, как известно из математической логики, требует придания смысла, значения формулам теории.

Это делается с помощью построения конкретной *интерпретации* (модели) $\mathcal{M}$ теории, или, символически

$$i : \mathcal{M} \models \mathcal{T}.$$

Интерпретации важны: они наполняют теорию конкретным содержанием, позволяющим судить о непротиворечивости теории. В свое время именно благодаря интерпретациям, данным Бельтрами, Клейном и Пуанкаре, геометрия Лобачевского нашла признание среди математиков.

Известно, что формальная теория может иметь множество различных интерпретаций. В нашем случае интерпретация теории определяется тем, какое кольцо будет выбрано в качестве интерпретации кольца R. Как было отмечено выше, мы не можем использовать привычный теоретико-множественный язык. Иначе говоря, R не может быть множеством, а отношение принадлежности $x \in R$ не может интерпретироваться как двузначное отношение «да-нет».

Таким образом, мы должны покинуть привычную для математики XX века теорию множеств **Sets**, являющуюся так называемой *категорией*, объекты которой, именуемые множествами, совершенно не подходят для интерпретации кольца R.

Известно, что наиболее близкой к категории теории множеств **Sets** являются категории, известные как *топосы* [5].

2.1. Топос $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}$ как интерпретация гладкого анализа

Выбираем для интерпретации гладкого анализа Кока-Ловера гладкие топосы, а конкретно топос

$$\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}.$$

Здесь $\mathbf{L}$ – это дуальная категория для категории конечно порождённых C^∞-колец. Она называется *категорией локусов*. Объектами категории $\mathbf{L}$ являются всё те же конечно порождённые C^∞-кольца, а морфизмами – обращённые морфизмы категории конечно порождённых C^∞-колец. Во избежание путаницы принято объекты (локусы) категории $\mathbf{L}$ обозначать как ℓA, где A – C^∞-кольцо. Следовательно, $\mathbf{L}$-морфизм $\ell A \to \ell B$ – это C^∞-гомоморфизм $B \to A$ [6].

Конечно порождённое C^∞-кольцо ℓA изоморфно кольцу вида $C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ (для некоторого натурально числа n и некоторого конечно порождённого идеала I).

При интерпретации

$$i : \mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}} \models \mathcal{T}$$

кольцу R отвечает функтор $F_R = i(R)$.

Интерпретация отношения $\boldsymbol{x \in R}$. При интерпретации i элементам x кольца R ставятся в соответствие «элементы» $i(x)$ функтора F_R из $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}$. Но сделать это не так просто, потому что функтор F_R определён на категории локусов $\mathbf{L}$:

$$F_R : \mathbf{L} \to \mathbf{Sets},$$

то есть переменной (аргументом) является произвольный локус ℓA, а значением – множество $F(\ell A) \in \mathbf{Sets}$.

Выход из данного затруднения заключается в определении *обобщённых элементов* $f \in_{\ell A} F_R$ функтора F_R.[4]

Обобщённым элементом $f \in_{\ell A} F$, или *элементом f функтора F в стадии (at stage) ℓA*, называется элемент $f \in F(\ell A)$.

Теперь сопоставляем элементу $x \in R$ обобщённый элемент $i(x) \in_{\ell A} F_R$. Но, как видим, таких элементов $i(x)$ столько, сколько локусов. При переходе к интерпретации (модели) $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}$ происходит «размножение» элемента x. Он начинает существовать в бесконечном числе вариантов

$$\{i(x) : i(x) \in_{\ell A} F_R, \ell A \in \mathbf{L}\}.$$

Это приводит к тому, что абстрактное событие из формального пространства событий R^4 при интерпретации теории размножается и начинает существовать в множестве «параллельных» вариантов.

[4] Кроме обозначения для обобщённого элемента $f \in_{\ell A} F_R$, используется и другое обозначение, которое имеет вид $f : \ell A \to F_R$.

2.2. Стадии (сцены, stages)

Английское слово «stage», упомянутое в определении обобщённого элемента, используется в книге [6], написанной на английском языке. Оно переводится на русский язык либо как «стадия», «фаза», «этап», либо как «сцена», «эстрада», «подмостки», «театр».

В русском языке *стадия* – это определенная ступень, период, этап в развитии чего-либо, со своими качественными особенностями, а *сцена* – место театрального действия.

Если перевести «element $i(x)$ of F_R at stage ℓA» как «элемент $i(x)$ из F_R на сцене ℓA», то мы говорим о том, что при интерпретации элемента x из R допускается возможность различного его представления, проявления при выборе различных сцен ℓA, подобно тому, как драма может быть по-разному разыграна на разных театральных сценах.

С другой стороны, поскольку существуют морфизмы $\ell A \to \ell B$, т.е. переходы от одной *сцены* к другой, то, имея в виду последовательную смену сцен, получаем представления x в *развитии*, качественно меняющиеся от одной сцены к другой, и в этом случае «представление, даваемое» элементом x на той или иной сцене, всего лишь конкретные *стадии* этого развивающегося представления.

Физика интересуют не только констатация качественных проявлений явления, но и их возможные изменения, причём последнее есть динамика явления, тогда как первое всего лишь статика. Поэтому мы предпочитаем использовать для слова «stage» перевод «стадия».

2.3. Вложение Ионеды

Рассмотренная интерпретация с помощью функторов крайне сложна и неудобна при проведении вычислений и в практической работе.

Однако ситуация разрешается благодаря тому, что можно воспользоваться *вложением Ионеды* (Yoneda):

$$y : \mathbf{L} \hookrightarrow \mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}},$$

$$y(\ell A)(-) = Hom_{\mathbf{L}}(-, \ell A).$$

Примем, что кольцо R интерпретируется как функтор $y(\ell C^\infty(\mathbb{R}))$, т.е. $i(R) = F_R = y(\ell C^\infty(\mathbb{R}))$. Будем далее писать ℓA вместо $y(\ell A)$ и опустим символ i. Тогда имеем

$$R(-) = \ell C^\infty(\mathbb{R})(-) = Hom_{\mathbf{L}}(-, \ell C^\infty(\mathbb{R})).$$

Это указывает на то, что числа из кольца R – это гладкие функции из кольца $C^\infty(\mathbb{R})$. Постоянные функции суть обычные действительные числа из поля $\mathbb{R}$, но непостоянные функции – это дополнительные новые изменяющиеся числа, представляющие собой, в частности, бесконечно малые величины.

Однако необходимо уточнить сказанное. Дело в том, что правильнее надо говорить не о «числе из кольца R», или, символически, $x \in R$, а о «числе из кольца R в стадии ℓA», или $x \in_{\ell A} R$.

В действительности правильным является следующее утверждение:

> *Вещественное число в стадии* $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ – это класс эквивалентности $f(a) mod\, I$, где $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) = A$.

2.4. Смысл стадий

Стадии существенным образом сказываются при интерпретации функций $f : R \to R$:

> *Функция f из R в R в стадии ℓA* – это класс $F(x, a) mod\, \pi^*(I)$, где $F \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ и $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – проекция; $\pi^*(I)$ – идеал, порожденный $\{f \circ \pi : f \in I\}$. Поэтому представитель F функции из R^R есть функция $F(-, a) \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$, зависящая гладко от параметра $a \in \mathbb{R}^n$.

Какой смысл имеют «скрытые» параметры $a \in \mathbb{R}^n$? Точный ответ автору неизвестен. Тем не менее попытаемся его найти. Для этого посмотрим, как проинтерпретируется в топосе метрика g в 4-пространстве R^4. Метрика в R^4 – это квадратичная форма, которая есть элемент объекта $R^{R^4\times R^4}$. Иначе говоря, нам надо понять, что означает символическая запись

$$g \in_{\ell A} R^{R^4\times R^4}.$$

Используя вложение Ионеды и принятые упрощения для обозначений, имеем

$$R^{R^4\times R^4}(\ell A) = Hom_{\mathbf{L}}(\ell A, R^{R^4\times R^4}) = Hom_{\mathbf{L}}(\ell A \times (R^4 \times R^4), R) =$$

$$= Hom_{\mathbf{L}}(\ell C^\infty(\mathbb{R}^m)/I \times \ell C^\infty(\mathbb{R}^4) \times \ell C^\infty(\mathbb{R}^4), \ell C^\infty(\mathbb{R})) =$$

$$= Hom_{\mathbf{L}^{op}}(\ell C^\infty(\mathbb{R}), C^\infty(\mathbb{R}^m)/I \otimes_\infty C^\infty(\mathbb{R}^4) \otimes_\infty C^\infty(\mathbb{R}^4)) =$$

$$= Hom_{\mathbf{L}^{op}}(C^\infty(\mathbb{R}), C^\infty(\mathbb{R}^{m+8})/(I, \{0\})) =$$

$$= Hom_{\mathbf{L}}(\ell C^\infty(\mathbb{R}^{m+8})/(I, \{0\}), \ell C^\infty(\mathbb{R})),$$

где $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^m)/I$ и $\otimes_\infty$ – символ копроизведения C^∞-колец. При этом при вычислении были использованы формулы

$$C^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes_\infty C^\infty(\mathbb{R}^k) = C^\infty(\mathbb{R}^{n+k}),$$

$$\frac{\ell A \to \ell C^{\ell B}}{\ell B \times \ell A \to \ell C}.$$

Отсюда следует, что при $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^m)$

$$g^{(4)}(\ell A) = [g \in_{\ell A} R^{R^4\times R^4}] \equiv g^{(4)}_{ik}(a) dx^i dx^k,$$

$$a = (a^1, ..., a^m) \in \mathbb{R}^m,$$

т.е. метрика зависит от «скрытых» параметров $a = (a^1, ..., a^m) \in \mathbb{R}^m$.

Если рассматривать метрику, зависящую ещё от точки $x = (x^0, ..., x^3)$ пространства-времени R^4, то

$$g^{(4)}(x)(\ell A) = [g(x) \in_{\ell A} R^{R^4\times R^4}] \equiv g^{(4)}_{ik}(x^0, ..., x^3, a) dx^i dx^k.$$

Зависимость 4-метрики не только от пространственно-временных координат, но ещё от дополнительных параметров $a = (a^1, ..., a^m)$ может трактоваться как указание на существование дополнительных измерений, идущих вдоль *балка*.

Дополним метрику $g^{(4)}_{ik}(x^0, ..., x^3, a)$ до (4+m)-мерной метрики в пространстве $\mathbb{R}^{4+m}$, например, следующим образом:

$$g^{(4)}_{ik}(x^0, ..., x^3, a) dx^i dx^k - \sigma_1 {da^1}^2 - ... - \sigma_m {da^m}^2, \tag{7}$$

где $\sigma_j = \pm 1$ (знак выбирается из физических соображений).

Для каждой стадии ℓA получаем $(4+m)$-мерные псевдоримановы *гиперпространства*

$$\langle R^4_{\ell A}, g^{(4)}(\ell A)\rangle \equiv \langle \mathbb{R}^{4+m}, g^{(4)}(\ell A)\rangle,$$

для которых при выявлении зависимости метрики $g^{(4)}(\ell A)$ от «скрытых» параметров a, видимо, необходимо либо применять многомерные уравнения Эйнштейна, либо проводить варьирование по физическим константам (см. [7], [11, § 9.13]).

Другими словами, 4-мерная интуиционистская теория содержит в себе несчётное число многомерных теорий, описывающих «скрытые» параллельные вселенные, лежащие в гиперпространствах $R^4_{\ell A}$. Таким образом, интуиционистская логика дает новое представление о строении Реальности – вместо Вселенная следует говорить о Мультиверсе, т.е. о совокупности параллельных вселенных.

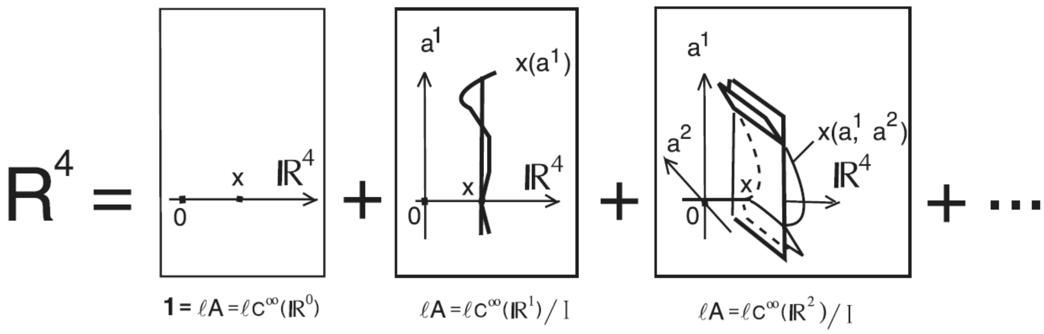

Рис. 1. Реальность-мультиверс $\mathbf{R}^4$ как сумма многомерных гиперпространств (вселенных) $\langle R^4_{\ell A}, g^{(4)}(\ell A)\rangle \equiv \langle \mathbb{R}^{4+m}, g^{(4)}(\ell A)\rangle$, соответствующих различному осознанию Реальности и расслоенных на параллельные 4-мерные вселенные.

2.5. Объекты из топоса $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}$

Вложение Ионеды и принятые упрощения (опускание символов i и y) позволяет представить объекты и морфизмы топоса $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}$ в более наглядном виде, удобном для практических вычислений.

Приведем кратко необходимые нам сведения и формулы, касающиеся топосной модели $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}$ для гладкого инфинитозимального анализа [6, p. 75-78].

Гладкая прямая, или гладкие действительные числа:

$$R = \ell C^{\infty}(\mathbb{R}).$$

Точка[5]:

$$\mathbf{1} = \ell C^{\infty}(\mathbb{R})/(x).$$

Инфинитозималы 1-го порядка:

$$D = \ell C^{\infty}(\mathbb{R})/(x^2) = \{x \in R : x^2 = 0\}.$$

Инфинитозималы:

$$\mathbb{\Delta} = \ell C^{\infty}(\mathbb{R})/(m^g_{\{0\}}),$$

где $m^g_{\{0\}}$ – идеал функций, имеющих нулевой росток в 0.

Действительное число в стадии $\ell A = \ell C^{\infty}(\mathbb{R}^n)/I$ – это класс эквивалентности $f(x) mod\ I$, где $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) = A$.

Инфинитозимал 1-го порядка в стадии ℓA (элемент из D) – это класс $f(x) mod\ I$ с $f^2 \in I$.

Инфинитозимал в стадии ℓA (элемент из $\mathbb{\Delta}$) – это класс $f(x) mod\ I$, такой, что для каждой $\phi \in m^g_{\{0\}} \subset C^{\infty}(\mathbb{R})$ имеем $\phi \circ f \in I$.

Функция из R в R в стадии ℓA – это класс $F(x,a) mod\ \pi^*(I)$, где $F \in C^{\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ и $\pi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – проекция; $\pi^*(I)$ – идеал, порождённый $\{f \circ \pi : f \in I\}$. Поэтому представитель F функции из R^R есть функция $F(-,a) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, зависящая гладко от параметра $a \in \mathbb{R}^n$.

2.6. Переходы от стадии (сцены) к стадии (сцене)

Переход от сцены (стадии) ℓA к сцене (стадии) ℓB – это морфизм между стадиями

$$\ell B \xrightarrow{\Phi} \ell A. \tag{8}$$

[5] Через $(f_1, ..., f_k)$ обозначается идеал кольца $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, порожденный функциями $f_1, ..., f_k \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, т.е. имеющий вид $\sum_{i=1}^k g_i f_i$, где $g_1, ..., g_k \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ – произвольные гладкие функции.

Морфизм Φ осуществляет переход от гиперпространства $R^4_{\ell A}$ к гиперпространству $R^4_{\ell B}$. Убедимся в этом.

Пусть, например, $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\ell B = \ell C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Тогда переход Φ между стадиями дается гладким отображением

$$\phi : \mathbb{R}^m \ni b \to a \in \mathbb{R}^n,$$

$$a = \phi(b).$$

В таком случае метрика

$$g^{(4)}_{ik}(x^0, ..., x^3, a)dx^i dx^k - \sigma_1 da^{1^2} - ... - \sigma_m da^{m^2} \tag{9}$$

гиперпространства $R^4_{\ell A}$ преобразуется в метрику

$$g^{(4)}_{ik}(x^0, ..., x^3, \phi(b))dx^i dx^k - \sigma_1 [d\phi^1(b)]^2 - ... - \sigma_m [d\phi^m(b)]^2 \tag{10}$$

гиперпространства $R^4_{\ell B}$.

3. Многовариантный Мир

Использование интуиционистского анализа Кока-Ловера, в которой поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ заменяется на коммутативное кольцо R и дифференциальное исчисление сводится к алгебре [4], с необходимостью привело к привлечению топосов в качестве интерпретации теории.

В результате мы пришли к многовариантному Миру. Каждый вариант Мира – это различные совокупности $R^4_{\ell A}$ интерпретаций событий x из пространства-времени R^4:

$$R^4_{\ell A} = \{(x^0, ..., x^3, a) : (x^0, ..., x^3, a) \in \mathbb{R}^4, \quad a \in \mathbb{R}^m\},$$

оснащённые метриками

$$\sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}(x, a)dx^i dx^k \ mod\ I,$$

$$x \in \mathbb{R}^4,\ a \in \mathbb{R}^m,\ A = C^\infty(\mathbb{R}^m)/I,$$

и I – идеал кольца $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ [6].

Многозначная логика становится причиной многовариантности явлений, и каждый вариант так же реален, как и любой другой.

4. Инфинитозимальный анализ Кока-Ловера

Переход от классического дифференциального и интегрального исчисления к анализу Кока-Ловера означает переход от классической двузначной логики к интуиционистской логике. Теория множеств не может уже служить способом интерпретации объектов такой теории, и приходится использовать теорию гладких топосов (см. Приложение А, § А.6). Топосные модели представляют окружающий нас Внешний Мир более многогранным, многовариантным, наделённым новыми физическими свойствами; они представляют его в форме Мультиверса.

Физические величины в этой инфинитозимальной теории могут иметь бесконечно малые значения. Бесконечно малая величина – это, к примеру, элемент объекта $D = \{d : d^2 = 0\}$, который может быть проинтерпретирован в *стадии* $\ell C^\infty(\mathbb{R}^m)/I$ как гладкая функция $d(a) \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, $d^2(a) \in I$.

Какая физика может нас ожидать, если мы рассмотрим уравнения Эйнштейна, в правой части которых стоит инфинитозимальная плотность материи?

5. Интуиционистские уравнения Эйнштейна

5.1. Случай, когда физические константы – это действительные числа

Уравнения Эйнштейна в интуиционистской теории, описывающие гравитационное поле, создаваемое некоторой материальной системой, в случае, когда $c, G \in \mathbb{R}$, имеют следующий классический вид:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik}(R - 2\Lambda) = \varkappa T_{ik}, \tag{11}$$

$$\varkappa = \frac{8\pi G}{c^4}.$$

5.2. Случай, когда физические константы не являются действительными числами

Предположим, что физические константы c, G не являются действительными числами и имеют вид

$$c = c_0 + d, \quad G = G_0 + \delta, \tag{12}$$

где

$$c_0, G_0 \in \mathbb{R}, \qquad d, \delta \in D.$$

Тогда[6]

$$\varkappa = \frac{8\pi G}{c^4} = 8\pi \frac{G_0 + \delta}{c_0^4 + 4c_0^3 d} == \frac{8\pi G_0}{c_0^4} - \frac{32\pi G_0}{c_0^5} d + \frac{8\pi}{c_0^4}\delta - \frac{32\pi}{c_0^5} d\delta. \tag{13}$$

Уравнения Эйнштейна в этом случае надо записывать в прежнем виде (11), но с учётом выражения (13) для $\varkappa$.

6. Принцип эквивалентности

Также, как в ОТО, для любой данной точки $x_0 \in R^n$ существует локальная карта, в которой

$$\begin{aligned} &g_{ik}(x_0) = \eta_{ik}, \\ &\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}(x_0) = 0, \\ &\Gamma^i_{jk}(x_0) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Последнее равенство в ОТО трактуется как принцип эквивалентности. Равенство нулю символов Кристоффеля в классической римановой геометрии, как известно, можно добиться на кривой, но не целиком в некоторой окрестности точки x_0.

Пусть

$$D_1(n) = \{x = (x^1, ..., x^n) \in R^n : \forall ij (x^i x^j = 0\}$$

.

Пишем $x \sim_1 y$, если $x - y \in D_1(n)$.

Однако в гладкой инфинитозимальной римановой геометрии имеется множество $\mathcal{O}(x_0) = \{x \in R^n : x \sim_1 x_0\}$, и для любой $x \in \mathcal{O}(x_0)$ справедливы равенства [9]

$$\begin{aligned} &g_{ik}(x) = \eta_{ik}, \\ &\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}(x) = 0, \\ &\Gamma^i_{jk}(x) = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

[6]Используется формальная формула:

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + ... = 1 + a(mod(a^2)).$$

В самом деле, если $x \sim_1 x_0$, то $x = x_0 + \delta$, $\delta = (\delta_1, ..., \delta_n), \delta_i\delta_j = 0$. Тогда, применяя формулы (4), (14) имеем:

$$g_{ik}(x) = g_{ik}(x_0 + \delta) = g_{ik}(x_0) + \sum_{j=1}^{n} \delta_j \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}(x_0) = g_{ik}(x_0).$$

Далее, по определению частной производной,

$$g_{ik}(x + (0, ..., 0, d, 0, ..., 0)) = g_{ik}(x) + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}(x)d \tag{16}$$

для любого $d \in D$, и, значит, для любого $\overline{d} \in D$, такого, что $\overline{d}d' = 0$ для любого[7] $d' \in D$. Поскольку $x + (0, ..., 0, \overline{d}, 0, ..., 0) = x_0 + (\delta_1, ..., \delta_{j-1}, \delta_j + \overline{d}, \delta_{j+1}, ..., \delta_n)$ и $(\delta_1, ..., \delta_{j-1}, \delta_j + \overline{d}, \delta_{j+1}, ..., \delta_n) \in D_1(n)$, то $x + (0, ..., 0, \overline{d}, 0, ..., 0) \in \mathcal{O}(x_0)$ и, следовательно,

$$g_{ik}(x + (0, ..., 0, \overline{d}, 0, ..., 0)) = \eta_{ik}. \tag{17}$$

Подставляя (17), получаем

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}(x)\overline{d} = 0. \tag{18}$$

Следовательно, из (18) получаем $(\partial g_{ik}/\partial x^j)(x) = 0$. (см. подробности в [3, § 19.2]).

Таким образом, мы получаем более удовлетворительную формулировку принципа эквивалентности по сравнению с ОТО в форме (18).

7. Интуиционистское сферически-симметричное решение Шварцшильда-Котлера

7.1. Почтивакуумные уравнения Эйнштейна

Рассматриваем уравнения Эйнштейна с ненулевым *почтивакуумным* тензором энергии-импульса:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}(R - 2\Lambda) = \frac{8\pi G}{c^2}\ d \cdot u_i u_k, \tag{19}$$

$$g_{ik}u^i u^k = 1,$$

где плотность материи $d \in D$ – произвольно взятый инфинитозимал.

Неклассическая плотность d вакуумной материи согласуется с привычным занулением правой части уравнений Эйнштейна в случае вакуума в общей теории относительности, поскольку в классическом случае $d = 0$.

7.2. Сферически-симметричное решение

Рассмотрим случай, когда гравитационное поле является статичным и обладает центральной симметрией. Центральная симметрия поля означает, что интервал пространства-времени может быть взят в виде

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2).$$

Простые вычисления приводят в результате к следующим уравнениям:

$$-e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda = \varkappa T_1^1, \tag{20}$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right) - \Lambda = \kappa T_2^2 = \varkappa T_3^3, \tag{21}$$

[7] Достаточно для конечного числа чисел $d' \in D$.

$$-e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}\right)+\frac{1}{r^2}-\Lambda=\varkappa T_0^0, \tag{22}$$

$$0=\varkappa T_0^1. \tag{23}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по r, а точка – дифференцирование по t.

Уравнение (21), как известно [8, с. 235], является следствием уравнений (20), (22), (23) и закона сохранения

$$T^{ik}{}_{;k}=0. \tag{24}$$

Поэтому в дальнейшем уравнение (21) опускаем.

Возьмем

$$T_k^i=c^2\rho u^i u_k,$$

т.е. рассматриваем пылевидную материю. Здесь ρ – плотность пыли в пространстве, которую будем считать в дальнейшем постоянной величиной.

Считая теперь, что система находится в сопутствующей системе координат, получаем, что $u_i=(e^{\frac{\nu}{2}},0,0,0)$, а $u^k=g^{ik}u_i=(e^{-\frac{\nu}{2}},0,0,0)$. Таким образом, $T_0^0=c^2\rho$, $T_1^1=T_2^2=T_3^3=0$, и уравнения (20), (22), (24) примут следующий вид:

$$-e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}-\Lambda=0, \tag{25}$$

$$-e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}\right)+\frac{1}{r^2}-\Lambda=c^2\varkappa\rho, \tag{26}$$

$$\rho\nu'=0. \tag{27}$$

Ищем решение этих уравнений. Поскольку ρ и Λ постоянны, то уравнение (26) нетрудно проинтегрировать. В самом деле, приняв $e^{-\lambda}$ за u, получаем:

$$u'r+u=1-(\Lambda+\varkappa c^2\rho)r^2. \tag{28}$$

Решая однородное уравнение $u'r+u$, находим, что $u=Ar^{-1}$, где $A=const$. Таким образом, решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$u=\frac{A(r)}{r}.$$

Подставляя его в (28), выводим условие на $A(r)$:

$$A'(r)=1-(\Lambda+\varkappa c^2\rho)r^2.$$

Интегрируем это уравнение и получаем, что

$$A(r)=r-\frac{(\Lambda+\varkappa c^2\rho)r^3}{3}+C.$$

Отсюда

$$u(r)=1-\frac{(\Lambda+\varkappa c^2\rho)r^2}{3}+\frac{C}{r}.$$

Или, возвращаясь к прежним обозначениям,

$$e^{-\lambda}=1-\frac{(\Lambda+\varkappa c^2\rho)r^2}{3}+\frac{C}{r}. \tag{29}$$

Здесь C – постоянная интегрирования.

Рассмотрим теперь уравнение (27). Нетрудно заметить, что $\rho = d,\ \nu' = d$ при любом $d \in D$ является его решением. Таким образом, из существования такого объекта, как D, следует, что, кроме классических решений

$$(\rho = 0 \ \&\ \nu' \neq 0) \vee (\nu' = 0 \ \&\ \rho \neq 0) \vee (\rho = 0 \ \&\ \nu' = 0),$$

существуют и другие, неклассические. Первый из указанных классических случаев приводит к известному классическому решению Шварцшильда. Рассмотрим неклассический случай решения уравнения (27), когда обе величины ρ и ν' одновременно неотделимы от нуля. В этом случае тензор энергии-импульса становится инфинитозимальным.

Подставляя (29) в (25) и учитывая (27), получаем:

$$\frac{\nu'}{r}\left(1+\frac{C}{r}-\frac{\Lambda r^2}{3}\right)+\frac{2}{3}\Lambda-\frac{\varkappa c^2\rho}{3}+\frac{C}{r^3}=0. \tag{30}$$

Отсюда легко заметить, что $\frac{2}{3}\Lambda + \frac{C}{r^3}$ неотделимо от нуля. Кроме того, при рассмотрении этого выражения в некоторой модели СДГ в стадии **1** это выражение становится равным нулю, что возможно лишь в том случае, когда и Λ и C в этой стадии равны нулю. Таким образом, заключаем, что C и Λ также необратимы, а значит, и $\frac{C}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}$ необратимо. Используя теперь (27), преобразуем (30) к виду

$$\nu'\left(1+\frac{C}{r}-\frac{\Lambda r^2}{3}+\frac{\varkappa c^2\rho r^2}{6}\right)=\frac{\varkappa c^2\rho r}{3}-\frac{2}{3}\Lambda\cdot r-\frac{C}{r^2},$$

или, что эквивалентно,

$$\nu'=\frac{\frac{1}{3}\cdot\varkappa c^2\rho r-\frac{2}{3}\Lambda\cdot r-Cr^{-2}}{1+Cr^{-1}-\frac{1}{3}\Lambda r^2+\frac{1}{6}\varkappa c^2\rho r^2}. \tag{31}$$

Решая это уравнение, находим,

$$\nu=\ln\left|1+\frac{C}{r}-\frac{\Lambda r^2}{3}+\frac{\varkappa c^2\rho r^2}{6}\right|. \tag{32}$$

Подставляя эти значения для λ и ν в выражение для ds^2, получаем, что

$$\begin{aligned} ds^2=&\left(1+\frac{(\varkappa c^2\rho-2\Lambda)r^2}{6}+\frac{C}{r}\right)dt^2-\\ &-\left(1-\frac{(\Lambda+\varkappa c^2\rho)r^2}{3}+\frac{C}{r}\right)^{-1}dr^2-\\ &-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\cdot d\varphi^2). \end{aligned} \tag{33}$$

Эту метрику будем называть решением Шварцшильда почтивакуумного уравнения Эйнштейна.

Естественно считать, что гравитационное поле не имеет сингулярностей во всем пространстве. Это означает, что метрика не имеет особенностей в $r = 0$. Поэтому будем считать, что C равно нулю. Исходя из этого и умножая правую и левую часть уравнения (30) на ρ, получаем, что

$$2\Lambda\rho=\varkappa c^2\rho^2 \tag{34}$$

и, кроме того, Λ – необратимая величина кольца R.

Другими словами, материя имеет неклассическую плотность, а гравитационное поле имеет вид

$$ds^2=\left(1+\frac{(\varkappa c^2\rho-2\Lambda)r^2}{6}\right)dt^2-\left(1-\frac{(\Lambda+\varkappa c^2\rho)r^2}{3}\right)^{-1}dr^2-$$

$$- r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2), \tag{35}$$

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(\varkappa c^2\rho - 2\Lambda)r^2}{6}}}, 0, 0, 0 \right).$$

В гладко топосной модели синтетической дифференциальной геометрии Кока-Ловера в стадии **1** эта метрика совпадает с метрикой пространства-времени Минковского. Грубо говоря, неклассический «пылевидный» вакуум имеет «бесконечно малое» слабое гравитационное поле.

7.3. Интерпретации интуиционистского решения Шварцшильда-Котлера

Почтивакуумные уравнения Эйнштейна, условия инфинитезимальности для космологической постоянной и плотности и их соотношение

$$2\Lambda\rho = \varkappa\rho^2$$

на стадии $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ принимают следующий вид:

$$R_{ik}(a) - \frac{1}{2}g_{ik}(a)(R(a) - 2\Lambda(a)) = \varkappa\rho(a)u_i(a)u_k(a) \mod I,$$

$$f \circ \Lambda(a) = 0 \mod I, \tag{36}$$

$$f \circ \rho(a) = 0 \mod I, \tag{37}$$

$$2\Lambda(a)\rho(a) - \varkappa\rho^2(a) = 0 \mod I \tag{38}$$

для любого $f \in m_0^g$, где $s \in \mathbb{R}^n$.

Решение g_{ik} в этом случае можно записать следующим образом[8]:

$$\begin{aligned} g_{ik}(a)dx^i dx^k = \left(1 + \frac{\varkappa\rho(a) - 2\Lambda(a)}{6}r^2\right) dx^{0^2} - \\ - \frac{dr^2}{1 - \frac{1}{3}(\varkappa\rho(a) + \Lambda(a))r^2)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \end{aligned} \tag{39}$$

по модулю $I \cdot C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4)$.

Проиллюстрируем вышеописанные уравнения на некоторых конкретных примерах, ограничиваясь случаем конечнопорождённых идеалов.

Стадия 1

Классической общей теории относительности отвечает стадия **1**. В этой стадии метрика (35) является метрикой пространства–времени Минковского:

$$g_{ik}(t, r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix},$$

т.е. Λ и ρ равны нулю. Действительно, для инфинитозималов из $\mathbb{\Delta}$

$$\varphi(\rho(a)) = \varphi(\rho(0)) + \varphi'(\rho(0))\rho'(0)a + o(|a|). \tag{40}$$

[8]Здесь и далее рассматривается случай $C = 0$.

Поскольку $\varphi(\rho(a)) \in I = (a)$, то $\varphi(\rho(0)) = 0$. Следовательно, $\rho(0) = 0$, так как $\varphi \in m^g_{\{0\}}$. Тогда $\rho \mod I = 0$. Аналогично $\Lambda \mod I = 0$, $C \mod I = 0$.

В этой стадии метрика (35) совпадает с метрикой специальной теории относительности. Таким образом, космологическая модель с этой метрикой может быть названа обобщённой моделью специальной теории относительности.

Стадия $D = \ell C^\infty(\mathbb{R})/(a^2)$

В этом случае

$$g_{00}(a) = 1 + \frac{1}{6}(\kappa c^2\rho_1 - 2\Lambda_1)ar^2 + C_1 ar^{-1},$$

$$g_{11}(a) = -\left(1 - \frac{1}{3}(\kappa c^2\rho_1 + \Lambda_1)ar^2 + C_1 ar^{-1}\right)^{-1},$$

а другие g_{ik} являются классическими. Действительно, как следует из (40),

$$\varphi(\rho(0)) = \varphi'(\rho(0))\rho'(0) = 0.$$

Поскольку $\varphi|_U \equiv 0$, $\varphi'|_U \equiv 0$ для некоторой окрестности 0, тогда $\rho(0) = 0$. Таким образом, $\rho \mod I = \rho_1 a$, $\rho_1 \in \mathbb{R}$. Аналогично $\Lambda \mod I = \Lambda_1 a$, $\Lambda_1 \in \mathbb{R}$.

Стадия $D_p = \ell C^\infty(\mathbb{R})/(a^{p+1})$

Здесь получаем

$$g_{00}(a) = 1 + \sum_{k=1}^{p}\left[\frac{(\kappa c^2\rho_k - 2\Lambda_k)}{6}\cdot r^2 + \frac{C_k}{r}\right]a^k,$$

$$g_{11}(a) = -\left[1 - \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{(\kappa c^2\rho_k + \Lambda_k)}{3}\cdot r^2 - \frac{C_k}{r}\right)a^k\right]^{-1},$$

$$\Lambda = \Lambda_1 a + ... + \Lambda_p a^p, \quad \rho = \rho_1 a + ... + \rho_p a^p,$$

$$2\Lambda\rho = \varkappa c^2\rho^2.$$

8. Изменение сигнатуры пространства-времени

Заметим очень интересный факт: сигнатура интуиционистской метрики Шварцшильда-Котлера g_{ik} зависит от вида функций Λ, ρ и C.

Например, в стадии $D = \ell C^\infty(\mathbb{R})/(a^2)$ $\rho \mod I = \rho_1 a$, $\Lambda \mod I = \Lambda_1 a$, $C \mod I = C_1 a$, где $\rho_1, \Lambda_1, C_1 \in \mathbb{R}$ суть простые вещественные числа (при $C = 0$ условие (34) выполняется для всех $a \in \mathbb{R}$). Следовательно, гравитационное поле $g_{ik}(a)$ не является слабым в соответствующем пятимерном пространстве–времени с координатами $(t, r, \theta, \varphi, a)$, и сигнатура в R^4_D может меняться.

9. Антигравитация

Для решения Шварцшильда-Котлера (35) *в стадии* $\ell C^\infty(\mathbb{R})/(a^3)$, когда Λ, ρ зависят только от одной переменной, например от $a \in \mathbb{R}$, рассматривая случай $\Lambda = \Lambda_1 a, \rho = \rho_2 a^2$, имеем

$$g_{00}(a) = 1 + \frac{1}{6}(\kappa c^2\rho_2 a - 2\Lambda_1)ar^2. \tag{41}$$

Гравитационная сила в постоянном поле [10, с.327]

$$f_\alpha = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\left\{-\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\ln\sqrt{g_{00}} + \sqrt{g_{00}}\left[\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{g_{0\beta}}{g_{00}}\right)\right]\frac{v^\beta}{c}\right\},$$

действующая на пробную частицу, равна

$$f_r = -\frac{mc^2}{6\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{\left[\varkappa c^2\rho_2 a - 2\Lambda_1\right] ar}{\left[1+\dfrac{1}{6}(\varkappa c^2\rho_2 a - 2\Lambda_1)ar^2\right]}(mod(a^3)),$$

$$f_\varphi = f_\theta = 0.$$

Следовательно[9],

$$f_r = -\frac{mc^2}{6\sqrt{1-v^2/c^2}}\left[\left(\varkappa c^2\rho_2 - \frac{2}{3}\Lambda_1^2 r^2\right)a - 2\Lambda_1\right] ar,$$

$$f_\varphi = f_\theta = 0.$$

Пусть $\rho_2 > 0$, т.е. плотность материи положительна.

Если $r \neq c\sqrt{(3/2)\varkappa\rho_2}/|\Lambda_1|$, то на каждой сфере радиуса r при переходе изменяющегося параметра a через значение $a(r) = 2\Lambda_1/(\varkappa c^2\rho_2 - 2/3\Lambda_1^2 r^2)$ направление вектор-силы f меняется на противоположное, т.е. гравитационное притяжение заменятся на гравитационное отталкивание.

На сфере $r = c\sqrt{(3/2)\varkappa\rho_2}/|\Lambda_1|$ гравитация переходит в антигравитацию при переходе a через значение $a = 0$.

Таким образом, можем наблюдать антигравитацию для любого $r > 0$.

Аналогичное явление для метрики (41) в классическом случае было описано в [3, § 10.2.2].

Параметр a как в классическом случае, так и в интуиционистском, можно рассматривать как 5-ю координату. Получаем, что при смене браны по мере продвижения в 5-мерном балке гравитация заменяется на антигравитацию. Уравнение для балка в интуиционистской теории гравитации – это уравнения для физических констант, зависящих от a и представленное в книге [11]. В классическом случае прибегают, как правило, к многомерным обобщениям общей теории относительности.

10. Уравнения для физических полей и времени

В гладком анализе Кока-Ловера «множество действительных чисел» является коммутативным кольцом R, содержащим «подмножество» инфинитозималов $D \subset R$, состоящее из элементов $d \in R$ таких, что $d^2 = 0$.

Физическая константа – это функция, измеряемое значение которой соответствует конкретной физической вселенной, конкретному миру. Варьирование физической константы – это варьирование, перебор миров. Согласно антропному принципу, впервые сформулированному Г.М. Идлисом, тот или иной набор значений физических констант, реализующийся в некоторой вселенной, соответствует форме сознания/осознания, наблюдающему данную вселенную, данный мир. Форма осознания есть не что иное, как форма времени. Следовательно, варьирование физических констант – это варьирование, перебор типов времен, типов восприятия, осознания миров.

Покажем, какими уравнениями в Мультиверсе представляются физические поля и какое уравнение определяет *тип времени* [7].

10.1. Уравнения Максвелла

Рассматриваем лагранжиан для электромагнитного поля в плоском пространстве-времени Минковского [10, с. 103]

$$S_{em} = -\frac{1}{16\pi c}\int\limits_{\mathbb{R}^4} F_{ik}F^{ik}dx - \frac{1}{c^2}\int\limits_{\mathbb{R}^4} A_i j^i dx. \tag{42}$$

[9] Используется формальная формула:

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + ... = 1 + a + a^2(mod(a^3)).$$

Начнем варьирование физических констант. В случае кольца R примем, что скорость света, например, есть сумма константы $c_0 \in \mathbb{R}$ (классическая физическая константа – скорость света $3 \cdot 10^{10} cm/sec$) и инфинитозимала $d \in D$, т. е.

$$c = c_0 + d.$$

Надо уточнить, что понимается под «числами» $1/c$ и $1/c^2$. Примем, что

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_0}\left(1 - \frac{d}{c_0}\right), \quad \frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_0^2}\left(1 - \frac{2d}{c_0}\right).$$

Очевидно, что с учетом $d^2 = 0$ получаются нужные соотношения:

$$c \cdot \frac{1}{c} = 1 \ \text{ и } \ c^2 \cdot \frac{1}{c^2} = 1.$$

Лагранжиан (42) в стадии $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^m|/I$ берем, следовательно, в виде

$$S_{em} = \int\limits_{\mathbb{R}^m} da \left[-\frac{1}{16\pi c_0}\left(1 - \frac{d(a)}{c_0}\right) \int\limits_{\mathbb{R}^4} F_{ik}F^{ik}dx - \frac{1}{c_0^2}\left(1 - \frac{2d(a)}{c_0}\right) \int\limits_{\mathbb{R}^4} A_i j^i dx \right] \ (mod\ I). \tag{43}$$

Здесь инфинитозимал $d \in D$ представляется функцией $d(a)$ такой, что $d^2(a) \in I$.

С целью получения полевых уравнений варьируем функционал (43) по A_i и по $d(a)$. Соответственно получаем

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c_0}\left(1 - \frac{d(a)}{c_0}\right) j^i \ (mod\ I) \tag{44}$$

– аналог уравнений Максвелла и

$$\frac{1}{16\pi c_0^2} \int\limits_{\mathbb{R}^4} F_{ik}F^{ik}dx + \frac{2}{c_0^3} \int\limits_{\mathbb{R}^4} A_i j^i dx = 0 \ (mod\ I) \tag{45}$$

– дополнительное *уравнение времени* в Мультиверсе.

10.2. Уравнение для гравитационного поля в пустом пространстве

Рассматриваем лагранжиан для гравитационного поля в пустом пространстве для теории $\mathcal{T}$

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int\limits_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx. \tag{46}$$

Имеем для $d, d_1 \in D$

$$c^3 = (c_0 + d)^3 = c_0^3 + 3c_0^2 d, \quad \frac{1}{G} = \frac{1}{G_0}\left(1 - \frac{d_1}{G_0}\right)$$

и

$$\frac{c^3}{G} = \frac{c_0^3}{G_0} - \frac{c_0^3}{G_0^2}d_1 + \frac{3c_0^2}{G_0}d - \frac{3c_0^2}{G_0^2}dd_1.$$

Тогда, варьируя лагранжиан

$$S_g = -\frac{1}{16\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^m} da \left[\frac{c_0^3}{G_0} - \frac{c_0^3}{G_0^2}d_1 + \frac{3c_0^2}{G_0}d - \frac{3c_0^2}{G_0^2}dd_1 \right] \int\limits_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx \tag{47}$$

по g_{ik}, d_1 и d, получаем соответственно:

$$\left[1 - \frac{d_1}{G_0} + \frac{3d}{c_0} - \frac{3}{c_0 G_0}dd_1\right] R_{ik} = 0 \ (mod\ I) \tag{48}$$

– уравнения гравитационного поля в пустом пространстве и

$$(c_0 + 3d)\int\limits_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx = 0 \ (mod\ I), \tag{49}$$

$$(G_0 - d_1)\int\limits_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx = 0 \ (mod\ I) \tag{50}$$

– дополнительные уравнения времени в Мультиверсе.

Заметим, что классические решения Эйнштейна для пустого пространства удовлетворяют уравнениям (48)-(50).

Заметим, что в случае, когда $dd_1 \in I$, вместо (48)-(49) имеем:

$$\left[1 - \frac{d_1}{G_0} + \frac{3d}{c_0}\right] R_{ik} = 0 \ (mod\ I), \tag{51}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx = 0 \ (mod\ I). \tag{52}$$

В любом случае классические решения $R_{ik} = 0$ с постоянными константами c, G (т. е. $d(a) = d_1(a) = 0$) удовлетворяют уравнениям поля (48)-(50) или (51), (52).

10.3. Уравнение для гравитационного поля

Рассматриваем лагранжиан для гравитационного поля в пространстве, заполненном материей:

$$S_{gm} = -\frac{c^3}{16\pi G}\int\limits_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx + \frac{1}{c}\int\limits_{\mathbb{R}^4} \Lambda\sqrt{-g}dx. \tag{53}$$

Тогда варьируя лагранжиан для теории $\mathcal{T}$

$$S_{gm} = -\frac{1}{16\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^m} da \left\{ \left[\frac{c_0^3}{G_0} - \frac{c_0^3}{G_0^2}d_1 + \frac{3c_0^2}{G_0}d - \frac{3c_0^2}{G_0^2}dd_1\right] \int\limits_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx + \frac{1}{c_0}\left(1 - \frac{d}{c_0}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^4} \Lambda\sqrt{-g}dx \right\} \tag{54}$$

по g_{ik}, d и d_1, получаем

$$\left[1 - \frac{d_1}{G_0} + \frac{3d}{c_0} - \frac{3}{c_0 G_0}dd_1\right]\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right) = \frac{8\pi G_0}{c_0^4}\left(1 - \frac{d}{c_0}\right)T_{ik} \ (mod\ I) \tag{55}$$

– уравнения гравитационного поля и

$$(c_0 + 3d)\int\limits_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx = 0 \ (mod\ I), \tag{56}$$

$$\frac{3c_0^2}{G_0^2}(G_0 - d_1)\int\limits_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx = \frac{1}{c_0^2}\int\limits_{\mathbb{R}^4} \Lambda\sqrt{-g}dx \ (mod\ I) \tag{57}$$

– дополнительные уравнения времени в мультиверсе.

Заметим, что в случае, когда $dd_1 \in I$, вместо (58)-(60) имеем:

$$\left[1 - \frac{d_1}{G_0} + \frac{3d}{c_0}\right]\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right) = \frac{8\pi G_0}{c_0^4}\left(1 - \frac{d}{c_0}\right)T_{ik} \ (mod\ I), \tag{58}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx = 0 \ (mod\ I), \tag{59}$$

$$\frac{3c_0^2}{G_0}\int\limits_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx = \frac{1}{c_0^2}\int\limits_{\mathbb{R}^4} \Lambda\sqrt{-g}dx \ (mod\ I). \tag{60}$$

11. Космология

В этом параграфе изучим новые свойства космологической модели Фридмана, возникающие благодаря интуиционистскому подходу к описанию Вселенной [12].

Рассмотрим закрытую модель Вселенной Фридмана, которая в координатах $(x^2, \chi, \theta, \varphi)$, $x^2 = ct$ задается метрикой

$$ds^2 = g_{ik}^{(4)} dx^i dx^k =$$
$$= c^2 dt^2 - R^2(t)[d\chi^2 + \sin^2\chi\ (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]. \tag{61}$$

Эта метрика удовлетворяет уравнениям Эйнштейна (11) с тензором энергии-импульса пылевой материи

$$T_{ik} = c^2 \rho u_i u_k$$

при условии, что

$$\rho R^3(t) = const = \frac{M}{2\pi^2}, \tag{62}$$

$$\begin{cases} R = R_0(1 - \cos\eta), \\ t = \frac{R_0}{c}(\zeta - \sin\eta), \end{cases} \tag{63}$$

где

$$R_0 = \frac{2GM}{3\pi c^3}, \tag{64}$$

а M сумма масс тел во всем 3-пространстве [10, с. 438].

Примем, что

$$G = k + d, \quad d \in D, \tag{65}$$

где $k = 6,67 \cdot 10^{-8} CGS$ – классическая гравитационная постоянная Ньютона.

Напомним, что при интерпретации в гладком топосе $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}$ инфинитезимал $d \in D$ в стадии $\ell A = C^\infty(\mathbb{R}^m)/I$ представляется классом гладких функций вида $d(a) mod\ I$, где $[d(a)]^2 \in I$ [6, с. 77].

В стадии $\mathbf{1} = \ell C^\infty(\mathbb{R})/(a)\quad d(a) = 0$, т.е. имеем дело с классической вселенной Фридмана.

Однако если рассмотреть состояние модели Фридманаа в стадии $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R})/(a^4)$, то получим другую реальность. Действительно, можно взять инфинитезимал вида $d(a) = a^2$. Тогда рассматриваемый мультиверс в этой стадии является 5 - мерным гиперпространством, слои которого, задаваемые уравнением $a = a_0$, – параллельные вселенные (среды) $R^4_{\ell A}$ с метрикой $g^{(4)}(\ell A) = g^{(4)}_{ik}(x, a)$, заданной формулами (61) с учетом (63).

Радиус «Вселенной» и плотность материи, как следует из (62), вычисляются по формулам

$$R = \frac{2M}{3\pi c^3}(k + a^2)(1 - \cos\eta),$$

$$\rho(a) = \frac{27\pi c^9}{16k^3 M^2 (1 - \cos\eta)^3}\left(1 - \frac{3}{k} d(a)\right).$$

Поэтому при $d = a^2$ радиус для параллельных вселенных с номерами $|a| \to +\infty$ растет. При этом плотность материи $\rho(a)$ начнет уменьшаться и, перейдя нулевое значение, становится отрицательной, стремясь к $-\infty$ при $|a| \to +\infty$. Все это говорит о том, что параллельные вселенные могут иметь физические свойства, совершенно отличные от известных нам свойств Вселенной.

Заключение

Идея использовать интуиционистскую логику привлекательна. Она приводит к совершенно новому математическому аппарату и дает надежду на открытие новых физических закономерностей, нового ви́дения Внешнего Мира.

Если наша идея правильная, то опыт её подтвердит. Этот тезис отражает культурную традицию современного физика. Однако, «разве может быть такой опыт, который соответствовал бы идее? Ведь всё своеобразие идеи как раз в том и состоит, что опыт никогда не может вполне соответствовать ей». Так возразил Шиллер на фразу Гёте: «Стало быть, я могу радоваться, что, сам того не ведая, обладаю идеями и даже могу видеть их глазами» (цит. по статье Гейзенберга [13, с. 246-247].).

Список литературы

1. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 4. М.: Наука, 1967. 599 с.

2. Расёва Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. М.: ФМ, 1972.

3. Гуц А.К. Физика реальности. Омск: КАН, 2012. 424 с.

4. Kock A. Synthetic Differential Geometry. Cambridge University Press, 1981.

5. Гольдблатт Р. Топосы. М.: Мир, 1983.

6. Moerdijk I., Reyes G.E. Models for Smooth Infinitesimal Analysis. Springer-Verlag, 1991.

7. Гуц А.К. Уравнения для физических полей и времени в мультиверсе // Математические структуры и моделирование. 2006. Вып. 16. С. 51-55.

8. Синг Дж. Общая теория относительности. М.: ИЛ, 1963.

9. Laat T. Synthetic Differential Geometry. An application to Einstein's Equivalence Principle. Bachelor thesis for Mathematis and Physics & Astronomy. Radboud University Nijmegen, 2008. 40 S.

10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М., 1967.

11. Гуц А.К. Элементы теории времени. М.: ЛКИ, 2011. 376 с.

12. Guts A.K. The Deutsch theory of the Multiverse and physical constants. *Gravitation &Cosmology.* 2003. Vol. 9, №. 1 (33). S. 33–36.

13. Гейзенберг В. Избранные философские работы. СПб.: Наука, 2006.

References

1. Einshtein A. *Collection if scientific works*, vol. 4. Moscow, Nauka Publ., 1967. 599 p. (in Russian)

2. Rasiowa H., Sikorski R. *Mathematics of methamathematics*, Warsawa: Panstwowe Wydawnicwo Naukowe, 1963, 591 p. Translated under the title *Matematika metamatematiki.* Moscow, Nauka Publ., 1972. 591 p. (in Russian)

3. Guts A.K. *Physics of Reality.* Omsk: KAN Publ., 2012. 424 p. (in Russian)

4. Kock A. *Synthetic Differential Geometry*, Cambridge: Cambridge University Press, 1981. 320 p.

5. Goldblat R. *Topoi*, North-Holland, 1979, 551 p. Translated under the title *Toposi.* Moscow, Mir Publ., 1983. 487 p. (in Russian)

6. Moerdijk I., Reyes G.E. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis.* Springer-Verlag, 1991. 399 p.

7. Guts A.K. Equations for physical fields and time, *Matematicheskie strukturi i modelirovanie*, 2006, no. 16, pp. 51–55.

8. Sing J. *General Relativity.* Moscow, IL Publ., 1963. 432 p. (in Russian)

9. Laat T. Synthetic Differential Geometry. An application to Einstein's Equivalence Principle, *Bachelor thesis for Mathematis and Physics & Astronomy*, Radboud University Nijmegen, 2008. 40 p.

10. Landau L., Lifshitz E. *Theory of field.* Moscow, Fizmatgiz Publ., 1967. 460 p. (in Russian)

11. Guts A.K. *Elements pf time theory.* Moscow, URSS Publ., 2011. 376 p. (in Russian)

12. Guts A.K. The Deutsch theory of the Multiverse and physical constants, *Gravitation &Cosmology*, 2003, vol. 9, no. 1 (33), pp. 33–36.

13. Geizenberg V. *Selected philosophical works.* Saint Petersburg, Nauka Publ., 2006. 572 p. (in Russian)

Авторы

Гуц Александр Константинович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра кибернетики, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, пр. Мира, 55-а, г. Омск, 644077, Россия.
E-mail: guts@omsu.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Гуц А. К. Общая теория относительности, основанная на интуиционистской логике // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2018. № 4. С. 70—91.

Authors

Guts Alexander Konstantinovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Dostoevsky Omsk State University, pr. Mira, 55-a, Omsk, 644077, Russia.
E-mail: guts@omsu.ru

Please cite this article in English as:
Guts A. K. General Relativity based on intuitionistic logic. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2018, no. 4, pp. 70–91.