

УДК 517.917

© Гальцов Д. В., Кобялко К. В., 2018

ФОТОННЫЕ И ПОПЕРЕЧНЫЕ УЛАВЛИВАЮЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ В СТАЦИОНАРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ *Гальцов Д. В.^{a,1}, Кобялко К. В.^{a,2}^a Кафедра теоретической физики, физический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 119991, Москва, Россия

Фотонная поверхность (ФП) определяется как замкнутая времениподобная гиперповерхность, такая, что любая изотропная геодезическая, первоначально касающаяся ее пространственного сечения, остается на ней навсегда. Поперечная улавливающая поверхность (ПУП) определяется так, что изотропные геодезические могут покинуть её пространственное сечение, но только в одном направлении - внутрь. Обе поверхности являются важной характеристикой сильного гравитационного поля черных дыр, червоточин и голых сингулярностей, связанных с ними свойствами визуализации. Мы анализируем ФП и ПУП на ряде примеров с упором на их существование в статических пространствах, не обладающих сферической симметрией, а также в стационарных пространствах. Исследуются решения, в которых классические фотонные поверхности исчезают, но существуют ПУП и их обобщения. Рассматриваются аксиально-симметричные метрики с вращением и с голыми сингулярностями, такими как решение Зипоя-Вурхиса.

Ключевые слова: фотонные поверхности, поперечные улавливающие поверхности, аналитические характеристики.

PHOTON AND TRANSVERSELY TRAPPING SURFACES IN STATIONARY SPACETIMEGal'tsov D. V.^{a,1}, Kobialko K. V.^{a,2}^a Faculty of Physics of Lomonosov Moscow State University, 119991, Moscow, Russia

The photon surface (PS) is defined as closed timelike hypersurface in spacetime such that any null geodesic initially tangent to its spatial section remains in it forever. The transversely trapping surface (TTS) is such that null geodesics can leave this spatial section, but only in one direction — inside. Both surfaces are important characteristics of a strong gravitational field of black holes, wormholes and naked singularities associated with their imaging properties. We analyze the PS and the TTS using a number of examples with an emphasis on their existence in static spaces that do not possess spherical symmetry, as well as in stationary spaces. Solutions are investigated in which classical photon surfaces disappear, but there are TTS and their generalizations. Axially symmetric metrics with rotation and with naked singularities, such as the Zipoy-Vourhis solution, are considered.

Keywords: photon surface, transversely trapping surface, numerical gravitation, analytical characteristics.

PACS: 34D08, 93C15

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2018.4.48-56

*Эта работа была поддержана российскими Фондом фундаментальных исследований по проекту 17-02-01299а и Программой Правительства Российской Федерации по развитию Казанского федерального университета.

¹E-mail: galtsov@phys.msu.ru²E-mail: kobyalkokv@yandex.ru

Введение

Фотонные сферы являются важной характеристикой ультракомпактных объектов, таких как черные дыры (ЧД), сверхкомпактные звезды, кротовые норы и голые сингулярности. Они тесно связаны с гравитационным линзированием [1] и гравитационной тенью [2]. В случае Шварцшильда, изученном в оригинальной работе Вирбхадры и Эллиса [1], замкнутые круговые фотонные орбиты расположены на расстоянии $r = 3M$ и образуют сферу в силу сферической симметрии. Понятие фотонной сферы было далее обобщено на *фотонные поверхности* (ФП), которые не обязательно являются сферически-симметричными. В [3] фотонные поверхности определяются как замкнутые времениподобные гиперповерхности S такие, что любая изотропная геодезическая, первоначально касательная к S , будет оставаться на S . Основная теорема гласит, что фотонные поверхности являются конформно-инвариантными и полностью омбилическими [4] (то есть такими, что вторая фундаментальная форма пропорциональна индуцированной метрике). Фотонные поверхности были найдены во множестве *статических* пространств, где они подчиняются нескольким теоремам единственности [5, 6].

В общем случае стационарных аксиальносимметричных пространств фотонные поверхности обычно разрушаются вращением. Световые лучи, распространяющиеся с постоянным значением радиальной координаты Бойера-Линдквиста, заполняют некоторый объем в пространстве, известный как *фотонный регион* [7]. Другим обобщением фотонной сферы является *свободно захватывающая поверхность*, для которой был получен аналог неравенства Пенроуза. Другое полезное понятие, предложенное в [8], - это поперечная улавливающая поверхность (ПУП), которое обобщает ФП. Аналогично ФП, ПУП можно определить в геометрических терминах, используя неравенства, определяющие вторую квадратичную форму гиперповерхностей. Такой подход применим и в тех случаях, когда переменные в уравнениях геодезических не разделяются, как в пространствах Вейля.

1. Геометрические характеристики фотонных гиперповерхностей

1.1. ПУП и ФП

Напомним основные понятия геометрии гиперповерхностей. Пусть \hat{M} - 4-мерное пространство. Рассмотрим трехмерную времениподобную гиперповерхность M , представленную параметрически $F(M) : M \rightarrow \hat{M}$ как

$$x^\mu = f^\mu(\sigma^A), \quad \mu = 0, \dots, 3, \quad A = 0, \dots, 2, \quad (1)$$

где σ^A - локальные координаты на M . Обозначим через $f_A^\mu = \partial f^\mu / \partial \sigma^A$ линейно независимые касательные векторы в каждой точке $F(M)$. Индуцированная метрика g_{AB} и единичное пространственноподобное нормальное векторное поле n^μ на $F(M)$ определяются формулой

$$g_{AB} = \hat{g}_{\mu\nu} f_A^\mu f_B^\nu, \quad \hat{g}_{\mu\nu} f_A^\mu n^\nu = 0, \quad \hat{g}_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = 1. \quad (2)$$

Компоненты второй фундаментальной формы H_{AB} получаются из разложения Гаусса [4]:

$$H_{AB} = \hat{g}_{\mu\nu} (\hat{\nabla}_{f_A} f_B^\mu) n^\nu, \quad (3)$$

где $\hat{\nabla}$ - ковариантная производная в \hat{M} . Рассмотрим изотропную геодезическую $\hat{\gamma}$ с касательным вектором $\hat{\gamma}^\mu(s)$, направленным тангенциально к M в некоторой точке $F(p)$ на $F(M)$,

$$\ddot{\hat{\gamma}}^\mu(s) + \hat{\Gamma}_{\lambda\rho}^\mu \hat{\gamma}^\lambda(s) \hat{\gamma}^\rho(s) = 0. \quad (4)$$

Введем другую кривую γ из точки p с касательным вектором $\dot{\gamma}^A(s)$, который предполагается изотропной геодезической на гиперповерхности M ,

$$\ddot{\gamma}^A(s) + \Gamma_{BC}^A \dot{\gamma}^B(s) \dot{\gamma}^C(s) = 0, \quad (5)$$

Предположим, что в начальный момент касательные векторы к геодезическим совпадают. Таким образом, в точке p мы можем выбрать $\dot{\gamma}^\mu(0) = f_A^\mu \dot{\gamma}^A(0)$. Переписывая уравнения (5) для изотропной геодезической γ в терминах четырехмерных величин, имеем

$$\ddot{\gamma}^\mu(s) + \hat{\Gamma}_{\lambda\rho}^\mu \dot{\gamma}^\lambda(s) \dot{\gamma}^\rho(s) = (H_{AB} \dot{\gamma}^A(s) \dot{\gamma}^B(s)) n^\mu. \quad (6)$$

Существуют следующие основные возможности:

- Две траектории $\hat{\gamma}$ и γ согласуются локально, когда $H_{AB} \dot{\gamma}^A(s) \dot{\gamma}^B(s) = 0$. Если для некоторой времениподобной поверхности это условие выполняется для любого изотропного касательного вектора $\dot{\sigma}^A$ в M :

$$H_{AB} \dot{\sigma}^A \dot{\sigma}^B = 0, \quad (7)$$

мы получаем *фотонную поверхность* (ФП) [3]. Эквивалентно (7) можно переписать как утверждение о том, что поверхность полностью омбилическая [4]:

$$H_{AB} = H g_{AB}. \quad (8)$$

- Траектории $\hat{\gamma}$ и γ не совпадают. Геодезические $\hat{\gamma}$ распространяются внутрь области, ограниченной поверхностью $F(M)$ тогда и только тогда, когда $H_{AB} \dot{\gamma}^A(s) \dot{\gamma}^B(s) > 0$. Следовательно, необходимым и достаточным условием для того, чтобы M являлась *поперечной улавливающей поверхностью* (ПУП) [8], является то, что она времениподобна и для каждой точки на M выполняется условие

$$H_{AB} \dot{\sigma}^A \dot{\sigma}^B \geq 0, \quad (9)$$

для любого изотропного касательного вектора $\dot{\sigma}^A$ в M .

2. Стационарные аксиально-симметричные пространства

Пусть \hat{M} - 4-мерное аксиально-симметричное стационарное пространство, снабженное координатами типа Бойера-Линдквиста $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$, и определяемое следующим образом:

$$ds^2 = -e^\lambda (dt - \omega d\phi)^2 + e^{-\lambda} (e^\alpha dr^2 + e^\beta d\theta^2 + e^\gamma d\phi^2), \quad (10)$$

где $\omega = \omega(r, \theta)$, $\lambda = \lambda(r, \theta)$ и т. д. Рассмотрим гиперповерхность $r = r_T = const$. Она времениподобна, и её нормаль определяется как

$$n^\mu = (0, e^{\frac{1}{2}(\lambda-\alpha)}, 0, 0). \quad (11)$$

Из (9) получаем следующее условие ПУП:

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(\alpha+\lambda)} \left((\partial_r \lambda - \partial_r \beta) e^\beta \dot{\theta}^2 + (\partial_r \lambda - \partial_r \gamma) e^\gamma \dot{\phi}^2 + e^{2\lambda} \partial_r \lambda (t - \dot{\phi} \omega)^2 - 2e^{2\lambda} (t - \dot{\phi} \omega) \dot{\phi} \partial_r \omega \right) \geq 0. \quad (12)$$

Ясно, что не все компоненты во второй квадратичной форме независимы. Из условия, что вектор $\dot{\sigma}^A$ равен нулю, получаем:

$$-e^{2\lambda} (t - \dot{\phi} \omega)^2 + (e^\beta \dot{\theta}^2 + e^\gamma \dot{\phi}^2) = 0. \quad (13)$$

В частности, отсюда получаем ограничение на азимутальное движение:

$$\dot{\phi}^2 \leq e^{2\lambda-\gamma} (t - \dot{\phi} \omega)^2. \quad (14)$$

- Предположим теперь, что $\partial_r \omega = 0$, тогда легко показать, что должно выполняться условие

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(\alpha+\lambda)} \left((2\partial_r \lambda - \partial_r \beta) e^\beta \dot{\theta}^2 + (2\partial_r \lambda - \partial_r \gamma) e^\gamma \dot{\phi}^2 \right) \geq 0, \quad (15)$$

для любых $\dot{\phi}$ и $\dot{\theta}$. Необходимые и достаточные условия для ПУП, таким образом, следующие:

$$2\partial_r \lambda \geq \partial_r \beta, \quad 2\partial_r \lambda \geq \sigma \partial_r \gamma. \quad (16)$$

- Если $\partial_r \omega \neq 0$, введём новую переменную ξ :

$$\xi^2 = \frac{e^{\gamma-2\lambda} \dot{\phi}^2}{(\dot{t} - \dot{\phi}\omega)^2} \leq 1, \quad \varpi = e^{\lambda-\gamma/2} \partial_r \omega \quad (17)$$

и исключим θ :

$$(\partial_r \beta - \partial_r \gamma) \xi^2 - 2\varpi \xi + (2\partial_r \lambda - \partial_r \beta) \geq 0. \quad (18)$$

Как показано в [8] это эквивалентно выполнению любого из трех условий:

$$(i) \quad 2\partial_r \lambda - \partial_r \gamma \geq |2\varpi| > 2(\partial_r \beta - \partial_r \gamma) > 0, \quad (19)$$

$$(ii) \quad (\partial_r \beta - \partial_r \gamma)(2\partial_r \lambda - \partial_r \beta) \geq \varpi^2, \quad \partial_r \beta > \partial_r \gamma, \quad (20)$$

$$(iii) \quad 2\partial_r \lambda - |2\varpi| \geq \partial_r \gamma \geq \partial_r \beta. \quad (21)$$

Иногда удобнее использовать эквивалентный набор условий ПУП:

$$(i^*) \quad (2\partial_r \lambda - \partial_r \gamma)^2 \geq 4\varpi^2 > 4(\partial_r \beta - \partial_r \gamma)^2, \quad \partial_r \beta > \partial_r \gamma, \quad 2\partial_r \lambda > \partial_r \gamma, \quad (22)$$

$$(ii^*) \quad (\partial_r \beta - \partial_r \gamma)(2\partial_r \lambda - \partial_r \beta) \geq \varpi^2, \quad \partial_r \beta > \partial_r \gamma \quad (23)$$

$$(iii^*) \quad (2\partial_r \lambda - \partial_r \gamma)^2 \geq 4\varpi^2, \quad \partial_r \beta \leq \partial_r \gamma, \quad 2\partial_r \lambda > \partial_r \gamma. \quad (24)$$

3. Анализ поперечных улавливающих поверхностей

3.1. Статические пространства: решение Зипоя-Вурхиса

Метрика Зипоя-Вурхиса в координатах типа Бойера-Линдквиста (10) имеет вид [9]:

$$\lambda = \delta \log \left(1 - \frac{2m}{r} \right), \quad \gamma = \log \left((r^2 - 2mr) \sin^2 \theta \right), \quad \omega = 0, \quad (25)$$

$$\alpha = (\delta^2 - 1) \log (r^2 - 2mr) + (1 - \delta^2) \log (r^2 - 2mr + m^2 \sin^2 \theta), \quad (26)$$

$$\beta = \delta^2 \log (r^2 - 2mr) + (1 - \delta^2) \log (r^2 - 2mr + m^2 \sin^2 \theta), \quad (27)$$

где δ - параметр деформации. Для $\delta = 1$ это сферически-симметричная черная дыра Шварцшильда, для нецелого $0 < \delta < 2$ это голая сингулярность, для $\delta = 2$ это решение с двумя центрами (невращающаяся версия решения Томимацу-Сато-2). Сначала определим горизонт и/или положения сингулярности:

$$r_s^1 = 0, \quad r_s^2 = 2m, \quad r_s^3 = m(1 - \cos \theta), \quad r_s^4 = m(1 + \cos \theta), \quad (28)$$

где r_s^2 представляет сингулярность, если $\delta \neq 1$ и горизонт, если $\delta = 1$. Нам будет интересен регион вне горизонта(сингулярности) $r > 2m$, где вектор ∂_r пространственноподобен и, соответственно, сечение $r = r_T = const$ является времениподобной поверхностью. Условия ПУП (16) гласят:

$$2m < r_T \leq m + 2m\delta, \quad \delta > \frac{1}{2}, \quad (29)$$

$$r_T(r_T - 2m)(m + 2m\delta - r_T) + m^2\delta(2m + (m - r_T)\delta)(1 - \xi) \geq 0, \quad (30)$$

где $0 \leq \xi = \cos^2 \theta \leq 1$ и должно выполняться для любого θ на сфере или, по крайней мере, для сферического пояса. В последнем случае поверхность не замкнута.

Ясно, что на полюсах $\xi = 1$ второе соотношение выполняется автоматически, если первое выполнено. Поэтому мы можем рассматривать только экваториальную плоскость с $\xi = 0$. При $\xi = 0$ второе соотношение (30) будет следующим

$$(r_T - m)(r_T - m\delta)(2m + m\delta - r_T) \geq 0. \quad (31)$$

Таблица 1

ФП и ПУП в пространстве Зипоя-Вурхиса

δ	$\frac{1}{2} < \delta < 1$	$\delta = 1$	$1 < \delta \leq 2$	$\delta > 2$
r_T	$2m < r_T \leq m + 2m\delta$	$r_P = 3m$	$2m < r_T \leq 2m + m\delta$	$m\delta \leq r_T \leq 2m + m\delta$
Тип	ПУП	ФП	ПУП	ПУП

Существует несколько типов решений, приведенных в таблице (1). Интересно, что в случае $\delta > 2$ область с ПУП отделена от особенности (рис. 1). В этих условиях кажется, что нулевые геодезические, первоначально касательные к ПУП, не обязаны падать на сингулярность, что противоположно случаю Шварцшильда. Так как решение Зипоя-Вурхиса является геодезически неинтегрируемой системой [10], то явный анализ этого свойства не прост, поэтому стоит сравнить это с решениями, обеспечивающими аналогичные свойства ФУП, но интегрируемыми. В случае $\delta \leq 1/2$ область ПУП исчезает, а сингулярность сильно оголена [11].

Можно рассмотреть также участок сферической поверхности $\xi_c < \xi < 1$ являющийся ПУП для:

$$r_T < r_{T'} = \frac{m}{3} \left(3 + 2\delta + 2\sqrt{3 + \delta^2(1 + 3\xi_c)} \cos \left(\vartheta + \frac{2\pi}{3} \right) \right), \quad (32)$$

$$\vartheta = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{\delta(\delta^2 - 9 - 9(\delta^2 - 3)\xi_c)}{(3 + \delta^2(1 + 3\xi_c))^{3/2}} \right), \quad \delta > 1. \quad (33)$$

Набор таких поверхностей формирует некоторую область (рис. 1). Общая огибающая для этой области определяется (33) и изображается пунктирной линией. Точный физический смысл такой коллекции поверхностей пока не совсем ясен. С одной стороны, это может указывать на наличие несферической замкнутой ПУП. Однако, согласно общей теореме [8], существуют некоторые ограничения на топологию таких поверхностей, приводящие к тому, что они имеют сферическую топологию в пространственном сечении. С другой стороны, такие незамкнутые ПУП могут быть интересны как еще одна аналитическая характеристика сильного гравитационного поля. В частности, свет, первоначально касающийся их, может оставлять область $r < r_T$, но только в определенном диапазоне углов и, соответственно, незамкнутые ПУП могут использоваться в теории гравитационного линзирования [1, 11].

3.2. Стационарные пространства: метрика Керра-Ньюмана

Решение Керра-Ньюмана в координатах типа Бойера-Линдквиста имеет вид [12]:

$$\lambda = \log \left(\frac{r^2 - 2mr + \beta + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right), \quad \omega = -\frac{a(2mr - \beta) \sin^2 \theta}{r^2 - 2mr + \beta + a^2 \cos^2 \theta}, \quad (34)$$

$$\alpha = \log \left(\frac{r^2 - 2mr + \beta + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2mr + \beta + a^2} \right), \quad \beta = \log (r^2 - 2mr + \beta + a^2 \cos^2 \theta), \quad (35)$$

$$\gamma = \log ((r^2 - 2mr + \beta + a^2) \sin^2 \theta). \quad (36)$$

Координаты t и r могут изменяться на всем \mathbb{R} , а θ и ϕ - стандартные координаты на единичной двумерной сфере. a - параметр вращения, $\beta = e^2 + g^2$ содержит электрический и магнитный заряды.

Рассмотрим субэкстремальное решение Керра-Ньюмана с $\beta < m^2$ и $a^2 < m^2 - \beta$. Как и ранее, определим горизонт, эргосферу и расположение сингулярности:

$$r_s = 0, \quad r_{h\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - \beta - a^2}, \quad r_{e\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - \beta - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (37)$$

По техническим соображениям, нас будет интересовать область вне эргосферы черной дыры $r > r_{e+}$, где поле ∂_r пространственноподобно и, соответственно, сечение $r = r_T = \text{const}$ является

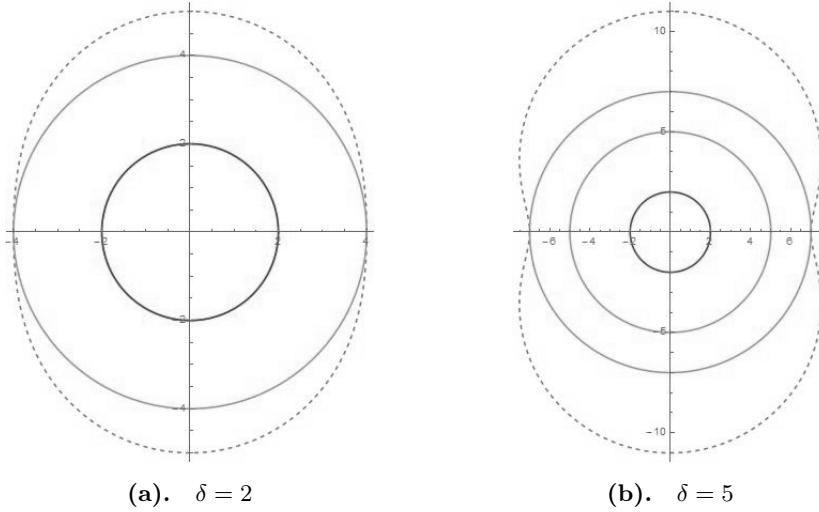


Рис. 1. ПУП регион в решении Зипоя-Вурхиса в координатах (θ, r) . Красная линия - сингулярность, оранжевая линия - граница для региона ПУП, пунктирная линия - граница для региона с незамкнутыми ПУП

временеподобной поверхностью. Мы можем рассматривать и случай внутри эргосферы. Можно показать, что это приводит к изменению знаков всех не возведённых в квадрат неравенств в (i^*) .

Прежде всего, мы находим, что условие (ii^*) имеет вид

$$(2\partial_r\lambda - \partial_r\beta)(\partial_r\beta - \partial_r\gamma) - \varpi^2 = -\frac{4a^2r^2 \sin \theta}{(r^2 - 2mr + a^2 + \beta)(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} \geq 0, \quad (38)$$

и, следовательно, не может быть истинным за пределами горизонта событий $r > r_{h+}$. Также легко показать, что

$$(\partial_r\beta - \partial_r\gamma) = \frac{2a^2(r - m) \sin^2 \theta}{(r^2 - 2mr + a^2 + \beta)(r^2 - 2mr + \beta + a^2 \cos^2 \theta)}. \quad (39)$$

Отсюда, $\partial_r\beta > \partial_r\gamma$ во внешней области $r > r_{e+}$ и нам нужно исследовать условие (i^*) . Неравенство $(2\partial_r\lambda - \partial_r\gamma)^2 \geq 4\varpi^2$ приводит к следующему:

$$(r - m)^2 + \frac{4mr(r^2 - 2mr + a^2 + \beta)}{r^2 + a^2\xi} - \frac{4r^2(2mr - \beta)(r^2 - 2mr + a^2 + \beta)}{(r^2 + a^2\xi)^2} \geq 0, \quad (40)$$

где $\xi = \cos^2 \theta$. Вычисляя производную, можно показать, что левая часть монотонно возрастает во внешней области ($r > r_{h+}$) субэкстремального пространства-времени ($\beta < m^2$, $a^2 < m^2 - \beta$). Неравенство (40) выполняется автоматически при $\xi = 1$. Поэтому необходимое и достаточное условие для всех ξ сводится к случаю $\xi = 0$, который дает:

$$(r^2 - 3mr + 2\beta)^2 \geq 4a^2(mr - \beta). \quad (41)$$

Если это нарушено, то (40) будет выполняться для некоторого критического ξ_c . Мы должны добавить так же условие, что левая часть неравенства (i) положительна:

$$2\partial_r\lambda - \partial_r\gamma = \frac{4(r - m)}{r^2 - 2mr + \beta + a^2\xi} - \frac{2(r - m)}{r^2 - 2mr + a^2 + \beta} - \frac{4r}{r^2 + a^2\xi} > 0. \quad (42)$$

Неравенство для $\xi = 1$ и $\xi = 0$ дает:

$$a^2(r + m) + r(r^2 - 3mr + 2\beta) < 0, \quad (r^2 - 3mr + 2\beta) - \frac{2a^2(mr - \beta)}{(r^2 - 2mr + \beta)} < 0 \quad (43)$$

По крайней мере, в этом случае следующее неравенство должно выполняться $r^2 - 3mr + 2\beta < 0$. В этом случае второе автоматически верно, если $r > r_{\beta+} = m + \sqrt{m^2 - \beta}$. На эргосфере $a^2\xi' = 2mr - \beta - r^2$ (42) выполнено. Таким образом, требуется только одно условие:

$$r^3 - 3mr^2 + (2\beta + a^2)r + a^2m < 0. \quad (44)$$

Второе условие (i^*) дает:

$$\frac{(-mr^2 + \beta r + ma^2\xi)^2}{(r^2 + a^2\xi)^2} > \frac{a^2(r - m)^2(1 - \xi)}{r^2 - 2mr + a^2 + \beta}. \quad (45)$$

Для $\xi = 1$, очевидно, оно выполняется. При $\xi = 0$ неравенство сводится к следующему:

$$(r^2 - 2mr + \beta)((mr - \beta)^2 - a^2(r^2 - \beta)) > 0. \quad (46)$$

Это выполняется, если первый множитель положителен, $r > r_{\beta+}$. Второй множитель положителен в субэкстремальном случае, так как определитель соответствующего квадратного уравнения имеет вид $D = a^2\beta(a^2 - m^2 + \beta) < 0$. Ясно, что при $r < r_{\beta+}$ часть ПУП входит в эргосферу, и вместо $\xi = 0$ следует рассмотреть $a^2\xi' = 2mr - \beta - r^2$. Расчет показывает, что (45) выполняется и в этом случае. Таким образом, это верно для всех $r > r_{e+}$.

В результате условия существования ПУП были сведены к (41) и (44). Второе условие вырезает конечную часть первого решения:

$$r_{h+} < r_T < r_T^{max}, \quad (47)$$

где

$$2r_T^{max} = 3m + \sqrt{F} - \sqrt{v - F - \frac{8a^2m}{\sqrt{F}}}, \quad 3F = v + \frac{v^2 - 24a^2u}{Q^{1/3}} + Q^{1/3}, \quad (48)$$

$$Q = 216a^4m^2 + v^3 - 36a^2vu + 24\sqrt{3}a^2\sqrt{(m^2 - a^2 - \beta)(v^2\beta - 27a^2m^4)}, \quad (49)$$

$$v = 9m^2 - 8\beta, \quad u = 3m^2 - 2\beta \quad (50)$$

Заметим, что внутри эргосферы $r < r_{e+}$ неравенства (42) и (45) меняют знак, но продолжают выполняться.

Регионы ПУП в субэкстремальной метрике Керра-Ньюмана показаны на рисунках (2). Первый (2а) идентичен случаю $\beta = 0$, указанному в [8]. Во втором случае (2b) заметное появление обширной области ПУП в окрестности экстремального значения. Сверхэкстремальная метрика Керра-Ньюмана требует дополнительного изучения. Рассмотрим необходимые условия (41) и (44), которые приводят к ситуации, изображенной на рисунке (2с). Кажется, что в сверхэкстремальном режиме ПУП должны существовать. Заметим, что мы имеем дело с ситуацией, подобной метрике Зипоя-Вурхиса, где ПУП отслаивается от сингулярности.

Заключение

Мы проанализировали ФП и ПУП с упором на их существование в статических пространствах без сферической симметрии, а также в стационарных пространствах. Мы исследовали решения, в которых классические фотонные поверхности исчезают, включая аксиально-симметричные метрики Керра-Ньюмана и решение Зипоя-Вурхиса.

Для решения Зипоя-Вурхиса было обнаружено, что в случае значения параметра деформации $\delta > 2$ область с ПУП отделена от сингулярности. В этих условиях кажется, что изотропные геодезические, первоначально касательные к ПУП, не обязаны падать на сингулярность, что противоположно случаю Шварцшильда. Так как решение Зипоя-Вурхиса представляет собой неинтегрируемую систему [10], то явный анализ этого свойства не прост, поэтому мы сравнили ситуацию

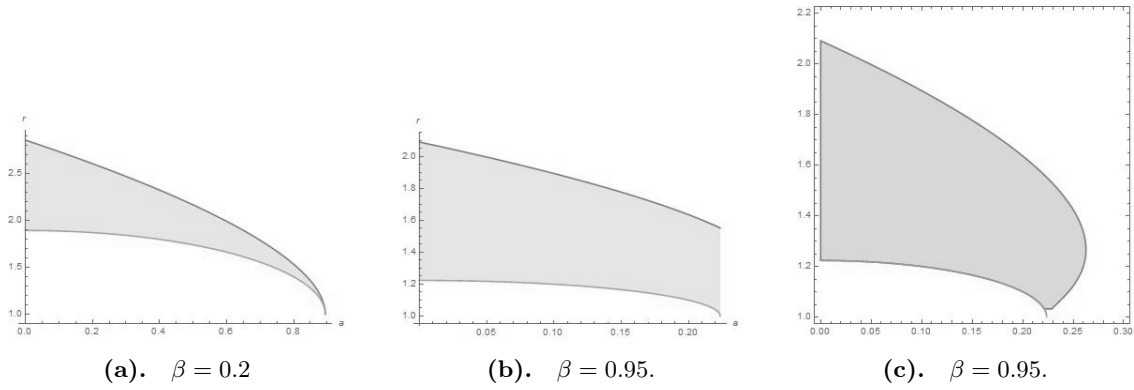


Рис. 2. ПУП в метрике Керра-Ньюмана как функция параметра вращения a . Синяя линия - r_T^{max} , оранжевая линия - горизонт r_{h+} .

с метриками, имеющими сходные свойства ПУП, но которые являются интегрируемыми. Мы обнаружили, что метрики с вращением, такие как решение Керра-Ньюмана, не обладают такими свойствами в субэкстремальном режиме, но, по-видимому, имеют их в сверхэкстремальном случае, как показывают численные расчеты. Возможно, имеет смысл рассмотреть сверхэкстремальный случай подробнее. В случае $\delta \leq 1/2$ область TTS исчезает, а сингулярность сильно голая [11].

Список литературы

1. Virbhadra K.S., Ellis G.F.R. Schwarzschild black hole lensing. *Phys. Rev. D.* 2000; vol. 48. S. 084003.
2. Synge J.L. The escape of photons from gravitationally intense stars. *Mon. Not. R. astro. Soc.* 1966; vol. 131. S. 463.
3. Claudel C.M., Virbhadra K.S., Ellis G.F.R. The Geometry of photon surfaces. *J. Math. Phys.* 2001; vol. 42. S. 818.
4. Okumura M. Totally umbilical hypersurfaces of a locally product Riemannian manifold. *Kodai Math. Sem. Rep.* 1967; vol. 19. S. 35.
5. Cederbaum C., Galloway G.J. Uniqueness of photon spheres in electro-vacuum spacetimes. *Class. Quant. Grav.* 1967; vol. 33. S. 075006.
6. Rogatko M. Uniqueness of photon sphere for Einstein-Maxwell-dilaton black holes with arbitrary coupling constant. *Phys. Rev. D.* 2016; vol. 93. № 6. S. 064003.
7. Grenzebach A., Perlick V., Lammerzahl C. Photon Regions and Shadows of Kerr-Newman-NUT Black Holes with a Cosmological Constant. *Phys. Rev. D.* 2014; vol. 89. № 12. S. 124004.
8. Yoshino H., Izumi K., Shiromizu T., Tomikawa Y. Extension of photon surfaces and their area: Static and stationary spacetimes. *PTEP.* 2017; vol. 2017. № 6. S. 124004.063E01.
9. Griffiths J.B. Exact Space-Times in Einstein's General Relativity. Cambridge University Press, 2009.
10. Lukes-Gerakopoulos G. The non-integrability of the Zipoy-Voorhees metric. *Phys. Rev. D.* 2012; vol. 86.
11. Virbhadra K.S., Ellis G.F.R. Gravitational lensing by naked singularities. *Phys. Rev. D.* 2002; vol. 65. S. 1103004.
12. Griffiths J.B., Podolsky J. A new look at the Plebanski-Demianski family of solutions. *Int. J. Mod. Phys. D.* 2006; vol. 15. S. 335.

References

1. Virbhadra K.S., Ellis G.F.R. Schwarzschild black hole lensing, *Phys. Rev. D.* 2000, vol. 48, p. 084003
2. Synge J.L. The escape of photons from gravitationally intense stars. *Mon. Not. R. astro. Soc.* 1966, vol. 131, p. 463.

3. Claudel C.M., Virbhadra K.S., Ellis G.F.R. The Geometry of photon surfaces. *J. Math. Phys.*, 2001, vol. 42, p. 818.
4. Okumura M. Totally umbilical hypersurfaces of a locally product Riemannian manifold. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 1967, vol. 19, p. 35.
5. Cederbaum C., Galloway G.J. Uniqueness of photon spheres in electro-vacuum spacetimes. *Class. Quant. Grav.*, 1967, vol. 33, p. 075006.
6. Rogatko M. Uniqueness of photon sphere for Einstein-Maxwell-dilaton black holes with arbitrary coupling constant. *Phys. Rev. D*, 2016, vol. 93, no. 6, p. 064003.
7. Grenzebach A., Perlick V., Lammerzahl C. Photon Regions and Shadows of Kerr-Newman-NUT Black Holes with a Cosmological Constant. *Phys. Rev. D*, 2014, vol. 89, no. 12, p. 124004.
8. Yoshino H., Izumi K., Shiromizu T., Tomikawa Y. Extension of photon surfaces and their area: Static and stationary spacetimes. *PTEP*, 2017, vol. 2017, no. 6, p. 124004.063E01.
9. Griffiths J.B. *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*. Cambridge University Press, 2009.
10. Lukes-Gerakopoulos. G. The non-integrability of the Zipoy-Voorhees metric. *Phys. Rev. D*, 2012, vol. 86.
11. Virbhadra K.S., Ellis G.F.R. Gravitational lensing by naked singularities. *Phys. Rev. D*, 2002, vol. 65, p. 1103004.
12. Griffiths J.B., Podolsky J. A new look at the Plebanski-Demianski family of solutions. *Int. J. Mod. Phys. D*, 2006, vol. 15, p. 335.

Авторы

Дмирий Владимирович Гальцов, д. ф.-м. н., профессор, кафедра теоретической физики, физический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 119991, Москва, Россия.

E-mail: galtsov@phys.msu.ru

Кирилл Владимирович Кобялко, аспирант, кафедра теоретической физики, физический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 119991, Москва, Россия.

E-mail: kobyalkokv@yandex.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Гальцов Д. В., Кобялко К. В. Фотонные и поперечные улавливающие поверхности в стационарных пространствах // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2018. № 4. С. 48–56.

Authors

Dmitry Vladimirovich Gal'tsov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Faculty of Physics of Lomonosov Moscow State University, 119991, Moscow, Russia.

E-mail: galtsov@phys.msu.ru

Kirill Vladimirovich Kobialko, postgraduate, Faculty of Physics of Lomonosov Moscow State University, 119089, Moscow, Russia.

E-mail: kobyalkokv@yandex.ru

Please cite this article in English as:

Gal'tsov D. V., Kobialko K. V. Photon and transversely trapping surfaces in stationary spacetime. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2018, no. 4, pp. 48–56.