ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МЕТОДОВ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ НАУКИ

***

УДК 517.9+536.2:621.078

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕРАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ НА ПОВЕРХНОСТЬ МНОГОСЛОЙНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Босенко Т. М.[a,1]

[a] Институт цифровой экономики и информационных технологий, Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, г. Москва, 117997, Россия

Статья посвящена анализу слабых решений интегро-дифференциальных уравнений теплопроводности на промежутках времени локализации процесса релаксации электрета при экстремальных воздействиях. Показано, что слабое решение уравнений интегро-дифференциального типа определено на промежутках времени релаксации функций теплового потока и внутренней энергии. Существование решений уравнений скоростного типа теплопроводности при моделировании релаксации электрета определяется границами в смысле слабого решения при условии непрерывности функций распределения внутренних источников и функций релаксации, отвечающих за энергетические параметры материала.

Ключевые слова: гиперрелаксация, интегро-дифференциальное уравнение, тепловая память.

SIMULATION OF NONEQUILIBRIUM PROCESSES OF THERMAL CONDUCTIVITY OF THERMAL EFFECTS ON THE SURFACE OF MULTILAYER MATERIALS

Bosenko T. M.[a,1]

[a] Institute of Digital Economics and Information Technologies, Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, 117997, Russia

The relaxation processes of heat conductivity are obtained in the article and are described by equations of speed type. Generalized representations of extreme tasks of thermal and mass transfer are resulted with the use of structural-asymptotic decompositions. The method of time discretization of heat conduction processes from the relaxation parameters of the system is implemented, which allows separating the components of the impact on the surface of multilayer materials.

Keywords: giperrelaxation of process, integral-differential equation, thermal memory.

PACS: 02.30.Rz, 05.60.–k, 05.70.Ln
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2018.4.104-109

[1] E-mail: timur-bosenko@yandex.ru

Введение

В связи с созданием мощных излучателей повысилась актуальность проблемы взаимодействия интенсивных тепловых потоков с твердыми материалами. В различных процессах обработки материалов концентрированными потоками энергии используется тепловое действие плазменного потока, лазерного или электронного луча. Создаются условия скачкообразного изменения температуры поверхности твердого тела или среды, что граничит с ней (так называемый тепловой удар) [1, 3]. Появилась потребность в использовании тонкослойных материалов, включающих многослойность исполнения. Они могут состоять из одного или нескольких слоев, которые могут быть выполнены из различных материалов и иметь отличные как механические, так и теплофизические характеристики. Наличие нескольких слоев позволяет существенно повысить механические свойства (характеристики) при экстремальных действиях. Использование многослойных материалов в целях обеспечения прочности, тепло, звукоизоляции – позволяет существенно увеличить прочность изделия. Развитие прикладных современных вопросов применения уравнений скоростного типа принадлежит Рядно А.А., Соболеву С.Л., Никитенко М.И., Карташову О.М. [4, 5].

1. Постановка задачи моделирования неравновесных процессов теплопроводности

Моделирование релаксационных процессов возможно при наличии релаксирующих компонентов системы, которые накапливают со временем термические возмущения в материале. Математическая модель релаксационного теплопереноса с учетом тепловой памяти, которая математически определена наличием функций релаксации теплового потока $\alpha_\nu\left(Fo\right)$ и внутренней энергии $\beta_\nu\left(Fo\right)$ в конституциональных уравнениях тепломассопереноса для материалов со сложной структурой, в случае одномерного распространения тепла в материале, представляется в виде [3]:

$$\tau_{0,\nu}\frac{\partial\Theta_\nu\left(X,Fo\right)}{\partial Fo}+Fo_{r,\nu}\frac{\partial^2\Theta_\nu\left(X,Fo\right)}{\partial Fo^2}+\tau_{0,\nu}\int_0^{Fo^*}\beta_\nu(Fo)\frac{\partial\Theta_\nu\left(X,Fo-s\right)}{\partial Fo}\,ds=$$
$$=\alpha_\nu(0)\frac{\partial^2\Theta_\nu\left(X,Fo\right)}{\partial X^2}+\int_0^{Fo^*}\alpha_\nu(s)\frac{\partial^2\Theta_\nu\left(X,Fo-s\right)}{\partial X^2}\,ds+W_\nu(X,Fo),\nu=1,2..m. \tag{1}$$

где $\tau_{0,\nu}=\tau_{r,\nu}/\tau_{e,\nu}$ – критериальный множитель интегро-дифференциального уравнения(ИДУ), указывающий меру нелокальности процесса, ν – номер слоя материала, m – пограничный слой, в котором несущественны релаксационные процессы, X – безразмерная координата, вдоль которой распространяются тепловые возмущения в материале, $\Theta_\nu\left(X,Fo\right)$ – функция, определяющая температурное поле в многослойном материале, Fo^* – безразмерное время локализации процесса. Начальные условия:

$$\Theta_\nu\left(X_\nu,0\right)=f_{1\nu}\left(X_\nu\right),$$
$$\frac{\partial\Theta_\nu\left(X_\nu,0\right)}{\partial Fo}=f_{2\nu}\left(X_\nu\right). \tag{2}$$

Обобщенные граничные условия:

$$\alpha_1\int_0^{Fo^*}\alpha_1(s)\frac{\partial\Theta_\nu\left(0,Fo-s\right)}{\partial X}\,ds+\alpha_2\Theta_\nu\left(0,Fo\right)=f_{3\nu}\left(X_\nu\right),X\in S;$$
$$\alpha_3\int_0^{Fo^*}\alpha_2(s)\frac{\partial\Theta_\nu\left(1,Fo-s\right)}{\partial X}\,ds+\alpha_4\Theta_\nu\left(0,Fo\right)=f_{3\nu}\left(X_\nu\right),X\in S, \tag{3}$$

где $f_{i\nu}\left(X_\nu\right),i=0,1,2,3,4$ – полином-экспоненциальные функции. Граничные условия определены интегральным видом в связи со специальным видом граничных и релаксационных функций $\alpha_\nu\left(Fo\right),\beta_\nu\left(Fo\right)$. Унифицированные условия на стыке между слоями материала:

$$\begin{cases}\int_0^\infty\alpha_\nu(s)\frac{\partial\Theta_\nu(X_\nu=1,Fo)}{\partial X_\nu}\,ds=\alpha_{\nu+1}R_{\nu,\nu+1}\left[\Theta_\nu\left(0,Fo\right)-\Theta_\nu\left(1,Fo\right)\right],\\ \int_0^\infty\alpha_{\nu+1}(s)\frac{\partial\Theta_\nu(1,Fo)}{\partial X_{\nu+1}}\,ds-\mu_{\nu,\nu+1}\int_0^\infty\alpha_\nu(s)\frac{\partial\Theta_\nu(0,Fo)}{\partial X_{\nu+1}}\,ds=f_{5\nu}\left(X_{\nu+1}\right).\end{cases} \tag{4}$$

Уравнение (1) описывает моделирование высокоинтенсивных нестационарных тепловых процессов, где учитывается конечная скорость распространения (инерция) тепла. ИДУ (1) сочетает в себе свойства как классического уравнения теплопроводности, которое описывает диссипативный способ передачи энергии, так и волнового уравнения (вторая производная по времени), которое описывает распространение незатухающих волн [6]. Пусть G некоторая область, ограниченная непрерывно-гладкой границей S, которая неподвижна и ограничивает область переменных в G. Функция $\Theta_\nu\left(X, Fo\right)$ в (1) непрерывна со своими частными производными первого порядка, существует также частично-непрерывную вторую производную в точке в замкнутой области $\left\{X \in \overline{G}; Fo_r \geq Fo > 0\right\}$, где $\overline{G} = G \cup S$ и удовлетворяет на границе граничным условиям (3).

Определение 1. *Под неустойчивым(слабым) периодическим решением вырожденного уравнения (1) будем понимать такую функцию* $\Theta_{\Gamma_+^-}$, *компоненты которой в момент времени* $\epsilon = Fo_r$ *являются разрывными и обладают нестабильным возмущением значений; при чередовании* $\Theta_{\Gamma-}$ *– участков устойчивой области, до разрывной, и* Θ_{Γ_+} *– участок срыва, образуют замкнутую траекторию.* На основе операционного исчисления получены унифицированные решения в виде асимптотических линейных комбинаций функций релаксационного температурного поля в материале[1,2]. Основным затруднением при моделировании задач такого класса является переход от изображений к оригиналу искомой функции [7, 8].

Теорема 1. *Решение уравнения (1) при стремлении безразмерной переменной* Fo *к времени локализации процесса(отсутствие существенного влияния релаксационных функций на установление температурного поля в материале), функция* $\Theta = \Theta_\nu\left(X_\nu, Fo\right)$ *стремится к одной из критических точек потенциала* $W = W_\nu(X_\nu, Fo)$, *тогда* $\frac{\partial \Theta_\nu(X, Fo)}{\partial Fo}$ *стремится к нулю.*

Определение 2. *Под обычным решением ИДУ (1)-(4) будем понимать функцию* $\Theta = \Theta_\nu\left(X_\nu, Fo\right)$, *которая непрерывна и имеет производные до второго порядка включительно и удовлетворяет условиям (2)-(4). Для уравнения (1) малым параметром является время релаксации теплового потока* $Fo = Fo_r$ *и время релаксации внутренней энергии* $Fo = Fo_e$.

Определение 3. *Под релаксационным решением ИДУ будем понимать функцию* $\Theta = \Theta_\nu\left(X_\nu, Fo, \epsilon\right)$, *которая непрерывна во всей области определения* $\Omega = \left\{X, Fo : X \in G; Fo_r \geq Fo > 0\right\}$ *и имеет производные до второго порядка включительно, за исключением лишь точек при* $Fo = Fo_r$ *и* $Fo = Fo_e$. Последующие рассуждения моделирования неравновесных процессов теплопроводности при тепловых воздействиях на поверхность многослойных материалов определены границами именно релаксационного решения (Определение 3), которое представляет наибольший интерес, в связи с нелокальным распределением температурного поля в материале в промежуток локализации релаксационных компонент.

2. Структурно-асимптотические решения

Представлен модифицированный метод асимптотического разложения, реализующий переход к полю оригиналов и позволяющий представлять комплексы изображений в виде асимптотически-приближенных рядов с заданною точностью [1]. Метод позволяет также асимптотически представить интеграл Дюамеля в приближенный ряд и получить оригинал в виде степенного ряда от малого параметра.

Теорема 2. *Пусть* $W = W_\nu(X_\nu, Fo)$ *кусочно-непрерывная и локально ограниченная функция при* $Fo_r \geq Fo > 0$. *Тогда решения (1)-(2) с унифицированными краевыми условиями (2)-(4) имеют единственное решение на отрезке* $Fo_r \geq Fo > 0$.

Определим решение задачи (1)-(2) в обобщенном виде в поле изображений:

$$\Theta_\nu\left(X_\nu,\mu,\varphi,Fo\right)=\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{i=2}^{\nu}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\Omega_{in\nu}(\mu,\varphi)f_{i,\nu}^{(n)}(Fo)p(X)\right)+ \tag{5}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_{i,v}(p_k)Q_{i,k,\nu}}{\acute{\psi}(\varphi,p_k)}e^{p_kFo}p(X)+Z_\nu(X,Fo),$$

где $\dot{D}_\nu=\int_0^\infty f_\nu'(t)g_\nu(Fo-\tau)\,d\tau$ – интеграл Дюамеля. Применяя интегральное преобразование по Лапласу, асимптотическое разложение по параметрам релаксации системы, в поле оригиналов получено решение задачи (1)-(2) в структурном виде:

$$\Theta_\nu\left(X_\nu,Fo\right)=\sum_{l=1}^{2m}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\Omega_n\left[\mu_{n,r}^\nu(X_\nu),\varphi_n\right]g_l^n(Fo)+\right. \tag{6}$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_l(P_k)}{\acute{\psi}(\varphi_n,P_k)}Q\left[\mu_{n,l,\nu}(X_\nu)P_k\right]exp\left(-\gamma_k^2Fo\right)\right\}+z^*(X,Fo),$$

где $g_l(P_k)$ – компоненты воздействия, характеризующие влияние неравномерного начального распределения температуры, распределение источников (стоков) тепла по сечению, параметры контактного термического сопротивления и учитывающие релаксацию теплового потока и внутренней энергии. Рекуррентные соотношения имеют вид:

$$\Omega_n\left[\mu_{n,r}^\nu(X_\nu),\varphi_n\right]=\frac{\mu_{n,l,\nu}(X_\nu)}{\varphi_0}-\sum_{j=1}^{n}\Omega_{n-j}\left[\mu_{n-j,l,\nu}(X_\nu),\varphi_{n-j}\right]\frac{\varphi_j}{\varphi_0}, \tag{7}$$

$$Q\left[\mu_{n,l,\nu}(X_\nu)P_k\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_{n,l,\nu}(X_\nu)P_k,\psi(\varphi_n,P_k)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n*P_k^n,P_k=\gamma_k^2\frac{a_0}{R_0^2}, \tag{8}$$

где γ_k^2 – корни трансцендентного уравнения .

Теорема 3. *Функция $\Theta_\nu\left(X_\nu,Fo\right)$ в (6) представима в виде полиномиального сходящегося ряда с целыми степенями n, то есть структурное решение представимо в виде асимптотических рядов с разложением по малому релаксационному параметру $\epsilon=\epsilon(Fo_r,Fo_e)$.*

Определение 4. *Если при экстремальном воздействии на систему учитываются релаксационные процессы в многослойном материале, которые характерны образованием областей локальной неустойчивости $\Omega^{+e\nu}$, $\Omega^{+r\nu}$ и областей неустойчивости – гиперрелаксации $\Omega^{-e\nu}$, $\Omega^{-r\nu}$ тогда решение (6) при наличии точек разрыва при $Fo=Fo_{r,\nu}$, $Fo=Fo_{e,\nu}$, непрерывно на промежутках $\Gamma^{+e\nu},\Gamma^{-e\nu}=\Gamma^{+r\nu}=\left(Fo_{e,\nu},Fo_{r,\nu}\right),\Gamma^{-r\nu}=\left(Fo_{r,\nu},Fo_\nu^*\right)$, где Fo^* – время локализации процесса.* Применяя Теорему 1. и Теорему 2. Решение (6) имеет вид:

$$\Theta_\nu\left(X_\nu,\mu,\varphi,Fo\right)=\sum_{\nu=1}^{m}\left\{\begin{array}{l}\sum\limits_i\sum\limits_j\sum\limits_k\left(m_{jkv}^{(i)}erfc\frac{X}{2\sqrt{Fo_g}}+m_{jkv}^{(\bar{i})}\Gamma\left(i+1/2\right)\right)+\\ \sum\limits_{\bar{i}}\sum\limits_{\bar{j}}\sum\limits_{\bar{k}}\end{array}\right. \tag{9}$$

где $g=1,2,3$. $Fo_1=Fo\frac{\tau_{0,\nu}}{1+\bar{\alpha}(Fo_{r,\nu})},Fo_2=Fo\frac{\tau_{0,\nu}}{1+\bar{\alpha}(Fo_{r,\nu})}Fo_{r,\nu},Fo_3=Fo\frac{\tau_{0,\nu}}{1+\bar{\alpha}(Fo_{r,\nu})}\beta\left(\bar{Fo}_{e,\nu}\right)$

Теорема 4. *Если асимптотический ряд системы (5) включает в области определения полином-экспоненциальные функции всех своих аргументов, тогда на промежутках $Fo\in(0,Fo_{e,\nu})$, $Fo\in(Fo_{e,\nu},Fo_{r,\nu})$ ряд (9) – сходится.*

Метод тройного асимптотического разложения (асимптотическое разложение решения в поле изображений, асимптотическое разложение граничных функций (3), асимптотическое разложение экспонент-полиномиальных слагаемых) позволяет получить оригинал решения задачи (1)-(2) в виде степенного ряда от малого параметра ϵ. Таким образом унифицирован асимптотически-структурный метод получения оригинала (9) задачи (1)-(4).

Выводы

Разработана математическая модель неравновесных процессов теплопроводности при тепловых воздействиях на поверхность многослойных материалов. Определены границы существования разрушительных воздействий нелокального процесса, выявлены границы релаксационного воздействия функций теплового потока и внутренней энергии. На основе операционного метода преобразования по Лапласу предложены структурные решения задачи нестационарной теплопроводности гиперболического и интегро-дифференциального типа для многослойных материалов, которые позволяют учитывать факторы, вызывающие возмущение теплового поля на каждом из слоев.

Список литературы

1. Босенко Т.М. Исследование и оценка сходимости асимптотических решений интегро-дифференциальных уравнений теплопроводности при локально-неравновесных условиях // Вестник ХНТУ. Херсон. 2009. Вып. 2 (35). С. 117-121.

2. Веселовский В.Б., Босенко Т.М. Решение задач теплопроводности для составных тел при экстремальном воздействии // Вестник тернопольского государственного университета. 2009. Т. 14. № 1. С. 168-179.

3. Босенко Т.М. Оценка сходимости решений интегро-дифференциальных уравнений теплопроводности в условиях релаксации системы // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2013. Т. 6. № 4 (66). С. 4-9.

4. Соболев С.Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса // УФН. 1997. Т. 167. № 10. С. 1095-1106.

5. Фортов В.Е. Мощные ударные волны и экстремальные состояния вещества // УФН. 2007. Т. 177. № 4. С. 347-368.

6. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный поход. М.: Эдиториал УРСС, 2004. 296 с.

7. David J.N., Wall. Invariant imbedding and hyperbolic heat waves. *J.Math. Phys.* 1997. Vol. 38 (3). S. 1723-1749.

8. Pakdemirli M., Sahin A.Z. Approximate symmetries of hyperbolic heat conduction equation with temperature dependent thermal properties. *Mathematical and Computational Applications.* 2005. Vol. 10. № 1. S. 139-145.

References

1. Bosenko T.M. Issledovanie i ocenka skhodimosti asimptoticheskih reshenij integro-differencial'nyh uravnenij teploprovodnosti pri lokal'no-neravnovesnyh usloviyah. *Vestnik HNTU.* Herson; 2009, vol. 2 (35), pp. 117-121. (in Russian)

2. Veselovskij V.B., Bosenko T.M. Reshenie zadach teploprovodnosti dlya sostavnyh tel pri ekstremal'nom vozdejstvii. *Vestnik ternopol'skogo gosudarstvennogo universiteta,* 2009, vol. 14, no. 1, pp. 168-179. (in Russian)

3. Bosenko T.M. Ocenka skhodimosti reshenij integro-differencial'nyh uravnenij teploprovodnosti v usloviyah relaksacii sistemy. *Vostochno-Evropejskij zhurnal peredovyh tekhnologij*, 2013, vol. 6, no. 4 (66), pp. 4-9. (in Russian)

4. Sobolev S.L. Lokal'no-neravnovesnye modeli processov perenosa. *Uspekhi fiz. nauk*, 1997, vol. 167, no. 10, pp. 1095-1106. (in Russian)

5. Fortov V.E. Moshchnye udarnye volny i ekstremal'nye sostoyaniya veshchestva. *Uspekhi fizich. Nauk*, 2007, vol. 177, no. 4, pp. 347-368. (in Russian)

6. Shashkov A.G., Bubnov V.A., Yanovskij S.Yu. *Volnovye yavleniya teploprovodnosti. Sistemno-strukturnyj pohod.* Moscow, Editorial URSS Publ., 2004. 296 p. (in Russian)

7. David J.N. Wall. Invariant imbedding and hyperbolic heat waves. *J.Math. Phys.*, 1997, 38 (3), pp. 1723-1749.

8. Pakdemirli M., Sahin A.Z. Approximate symmetries of hyperbolic heat conduction equation with temperature dependent thermal properties. *Mathematical and Computational Applications,* 2005, vol. 10, no. 1, pp. 139-145.

Авторы

Босенко Тимур Муртазович, к.т.н., доцент кафедры информатики, Институт цифровой экономики и информационных технологий, Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Стремянный переулок, д. 36, г. Москва, 117997, Россия.
E-mail: timur-bosenko@yandex.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Босенко Т. М. Моделирование неравновесных процессов теплопроводности при тепловых воздействиях на поверхность многослойных материалов // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2018. № 4. С. 104—109.

Authors

Bosenko Timur Murtazovich, Associate Professor, Department of Computer Science, Institute of Digital Economics and Information Technologies, Plekhanov Russian University of Economics, Stremyanny lane 36, Moscow, 117997, Russia.
E-mail: timur-bosenko@yandex.ru

Please cite this article in English as:

Bosenko T. M. Simulation of nonequilibrium processes of thermal conductivity of thermal effects on the surface of multilayer materials. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2018, no. 4, pp. 104–109.