

УДК 530.12; 531.51

© Гладуш В. Д., Головки М. Г., 2018

**ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЕ И КОНФИГУРАЦИОННОЕ
МНОГООБРАЗИЯ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ
ГРАВИТАЦИОННОГО И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЕЙ**Гладуш В. Д.^{a,1}, Головки М. Г.^{a,2}^a Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, г. Днепр, 49010, Украина

Исследуется пространственно-временное и конфигурационное пространства сферически-симметричной системы гравитационного и электромагнитного полей. Строится действие и динамические величины для этой системы полей. Вводятся дополнительные физические величины — полная масса и заряд. Оказывается, что скобка Пуассона полной массы с функцией Гамильтона равна нулю в слабом смысле. Для перехода в конфигурационное пространство, мы исключаем нединамическую степень свободы (функции хода) из действия с помощью гамильтоновой связи. Это приводит к действию в конфигурационном пространстве (минисуперпространстве) с соответствующей суперметрикой. Строится уравнение Эйнштейна-Гамильтона-Якоби и исследуется структура его решения, совместного с законами сохранения полной массы и заряда. Оказывается, что минисуперпространство является плоским, поэтому решениям уравнений Эйнштейна соответствует пучок прямых в минисуперпространстве. Их пересечения со световым конусом минисуперпространства соответствуют горизонтам событий в пространстве-времени заряженной ЧД. Квантование системы сводится к квантованию свободной частицы в трёхмерном псевдоевклидовом пространстве. На основе уравнения Девитта и квантовых операторов массы и заряда, строится волновая функция полевой конфигурации. В результате, мы получаем модель заряженной черной дыры с непрерывным спектром масс.

Ключевые слова: сферически-симметричные конфигурации, минисуперпространство, оператор Гамильтона, операторы массы и заряда, условие совместности.

**SPACE-TIME AND CONFIGURATION MANIFOLDS OF A
SPHERICALLY-SYMMETRIC SYSTEM OF GRAVITATIONAL AND
ELECTROMAGNETIC FIELDS**Gladush V. D.^{a,1}, Holovko M. H.^{a,2}^a Oles Honchar Dnipro National University, Dnepr, 49010, Ukraine

We investigate the space-time and configuration manifolds of a spherically symmetric system of gravitational and electromagnetic fields. For that, we construct the action and introduce dynamic quantities and relations for the field system under consideration. Then, additional physical quantities - the total mass and charge are introduced. We note, that the Poisson brackets of the total mass with the Hamiltonian function is zero in the weak sense. In order to make the transition into the configuration space, we exclude the non-dynamic degree of freedom from the action with the help of the Hamiltonian constraint. Herewith the Einstein-Hamilton-Jacobi equation is constructed and the structure of its solution compatible with the laws of conservation of total mass and charge is investigated. It turns out that the minisuperspace is flat, and therefore the solutions of the Einstein equations correspond to a bundle of straight lines in the minisuperspace. Their intersection with the light cone of minisuperspace corresponds to the horizons of events in the space-time of a charged black hole. The quantization of the fields system under consideration is analogous to the quantization of a free particle in a three-dimensional

¹E-mail: vgladush@gmail.com²E-mail: dilmendar@gmail.com

pseudo-Euclidean space. Using the Dewitt equations and the eigenvalue equations for the mass and charge operators, we construct a wave function of the field configuration. As a result, we obtain the model of a charged black hole with a continuous mass and charge spectra.

Keywords: spherical-symmetric configurations, minisuperspace, Hamilton operator, mass and charge operators, compatibility condition.

PACS: 04.40.Nr, 04.60.K

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2018.2.28-48

Введение

В ОТО для пространства-времени (ПВ) с метрикой в 3+1-расщепленной форме ($c=1$):

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + \gamma_{ik} (dx^i + N^i dt)(dx^k + N^k dt),$$

где N и N_i — функции хода и сдвига, лагранжиан Гильберта-Эйнштейна в каноническом подходе приводится к следующему виду:

$$L = \sqrt{-g}R = N\sqrt{\gamma}(K_{ij}K^{ij} - K^2 + R^{(3)}) - \\ - \partial_0(\sqrt{\gamma}K) + 2\partial_i\sqrt{\gamma}(KN^i + \gamma^{ij}\partial_j N).$$

Здесь $K_{ij} = (\mathcal{L}_{\vec{N}}\gamma_{ik} - \partial_0\gamma_{ij})/2$ — тензор внешней кривизны 3-поверхности постоянного координатно-го времени t с метрикой γ_{ij} ; $R^{(3)}$ — скалярная кривизна этой 3-поверхности, $K = \gamma^{ij}K^{ij}$, $\vec{N} = N^i\partial_i$, $\mathcal{L}_{\vec{N}}$ — производная Ли относительно вектора \vec{N} . Вводя импульсы, сопряженные γ_{ij} ,

$$P^{ij} = \frac{\partial L}{\partial \gamma_{ij,0}} = -\sqrt{\gamma}(K^{ij} - \gamma^{ij}K)$$

приходим к гамильтониану

$$\mathcal{H} = P^{ij}\gamma_{ij,0} - L = NT + N_i T^i,$$

где величины

$$T = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}(2P_{ij}P^{ij} - P^2) - \sqrt{\gamma}R^{(3)}, \quad T^i = 2P_{ij}^{ij}$$

образуют гамильтонову и импульсную вторичные связи: $T = 0$, $T^i = 0$.

Исследование задачи Коши для гравитационного поля так же, как канонического формализма ОТО, показывает, что вся динамическая информация о гравитационном поле содержится в связях. После замены $P_{ij} = \delta S/\delta \gamma_{ij}$ они приводят к уравнениям Эйнштейна-Гамильтона-Якоби (ЭГЯ) [1] для гравитационного поля

$$G_{ijkl} \frac{\delta S}{\delta \gamma_{ij}} \frac{\delta S}{\delta \gamma_{kl}} - \sqrt{\gamma}R^{(3)}S = 0$$

и условий инвариантности функционала S относительно преобразований координат на 3-поверхности $t = const$

$$\left(\frac{\delta S}{\delta \gamma_{ij}} \right)_{;j} = 0.$$

Здесь

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}(\gamma_{ik}\gamma_{jl} + \gamma_{il}\gamma_{jk} - \gamma_{ij}\gamma_{kl})$$

— суперметрика конфигурационного пространства всех 3-метрик γ_{ij} .

При квантовании, в соответствие с дираковским подходом, связи становятся условиями на вектор состояния: $\hat{T}^i|\Psi\rangle = 0$, $\hat{T}|\Psi\rangle = 0$. После замены $\hat{P}_{ij} = -i\delta/\delta\gamma_{ij}$ импульсная связь приводит к соотношению инвариантности вектора состояния относительно преобразования координат на 3-поверхности:

$$\left(\frac{\delta}{\delta\gamma_{ij}}|\Psi\rangle\right)_{;j} = 0.$$

При этом, гамильтонова связь приводит к уравнению Уилера-Девитта [2]

$$\left\{G_{ijkl}\frac{\delta}{\delta\gamma_{ij}}\frac{\delta}{\delta\gamma_{kl}} - \sqrt{\gamma}R^{(3)}\right\}\Psi = 0.$$

Подробности и ссылки смотрите, например, в [3].

Легко видеть, что как классические, так и квантовые аспекты поведения гравитационного поля определяется метрикой суперпространства так, что суперпространство является ареной действия классической и квантовой геометродинамики. Отметим, что суперпространственный подход может быть обобщён на случай конфигураций гравитационного поля с материальным источником [4]. Изучая геометрию общего суперпространства можно получить важную информацию о классических и квантовых проявлениях рассматриваемой динамической системы.

Однако, исследование суперпространства в общем случае сталкивается с непреодолимыми математическими трудностями. Поэтому широко используются редуцированные модели, среди которых сферически-симметричные (СС) конфигурации являются популярными и простейшими моделями, используемыми для изучения проблем квантовой гравитации в более простой постановке. Общий геометродинамический подход к СС гравитационному полю чёрной дыры (ЧД) был развит в работе [5], случай конфигурации электромагнитного и гравитационного полей, описывающий заряженные ЧД, рассмотрен в [6, 7]. Уже здесь возникают ряд проблем, среди которых упомянем лишь вопрос о спектре масс ЧД. Так, выше указанные работы, приводят к ЧД с непрерывным спектром масс. Формальный алгебраический подход [8, 9] даёт тот же результат. С другой стороны, начиная с работ Бекенштейна [10], утверждается, что ЧД имеют дискретный спектр масс, что связывается с идеей квантования площади горизонта ЧД. В дальнейшем, эти идеи развивались во многих работах (см., например, [11–13]).

Здесь мы ограничиваемся изучением некоторых классических и квантовых аспектов геометродинамики СС полевых систем. Работа посвящена исследованию свойств классического минисуперпространства СС конфигураций электромагнитного и гравитационного полей и поиску соответствия между пространством-временем и минисуперпространством рассматриваемой системы на элементарном уровне, с последующим переходом к квантованию. Здесь мы рассматриваем класс СС конфигураций с диагональными ПВ метриками, сократив класс допустимых преобразований до временных преобразований в Т-области или радиальных – в R-областях. Рассматриваемая модель основана на наблюдении, что классические СС конфигурации электромагнитного и гравитационного полей, являющиеся стационарными с точки зрения внешнего наблюдателя, имеют определенные области ПВ с динамическим поведением. Это означает, что в этих областях существует эволюция геометрии ПВ во времени, которая отвечает за квантово-механические свойства рассматриваемой модели ЧД [7, 14].

Оказывается, что конфигурационное пространство, данной динамической системы, является плоским, поэтому решениям уравнений Эйнштейна соответствует семейство прямых в минисуперпространстве. Для заряженных ЧД они начинаются на сингулярной прямой в области минисуперпространства, отвечающей внутренней R-области с центральной сингулярностью $R = 0$. Их пересечение со световым конусом в минисуперпространстве соответствуют горизонтам событий в ПВ, при этом внутренность конуса соответствует Т-области. Далее они движутся вне светового конуса минисуперпространства, уходя на бесконечность, что соответствует пространственной эволюции полей во внешней R-области. Для экстремальной ЧД, соответствующая прямая, указанного семейства, касается конуса. Для суперэкстремальных заряженных объектов, соответствующие прямые

проходит мимо конуса, соединяя центральную сингулярность с бесконечностью, что соответствует решениям с открытой сингулярностью. Всё это указывает нам на связь между геометриями минисуперпространства и пространства-времени СС конфигураций.

Работа начинается с классического описания СС конфигурации гравитационного и электромагнитного полей. Строится действие и обсуждается структура классического ПВ системы, определяются Т- и R-области. Вводятся динамические величины и соотношения между ними. Строятся законы сохранения для дополнительных физических величин: полной массы и заряда. Заметим, что скобки Пуассона указанной массы с функцией Гамильтона равны нулю в слабом смысле. Далее, после исключения нединамической переменной, осуществляется переход в конфигурационное пространство системы. Показывается, что исключение нединамической степени свободы, как из исходных уравнений движений, так из исходной функции Лагранжа приводят к одим и тем же динамическим уравнениям. Задача нахождения решений уравнений Эйнштейна сводится к построению решения уравнения Гамильтона-Якоби для геодезических в минисуперпространстве, совместного с законами сохранения полной массы и заряда. При этом, искомые метрические функции выражаются через натуральный параметр, соответствующей геодезической в минисуперпространстве.

Квантование СС системы гравитационного и электромагнитного полей аналогично квантованию свободной частицы в трёхмерном псевдоевклидовом пространстве. Используя уравнения Девитта и уравнения для собственных значений операторов массы и заряда, строится волновая функция рассматриваемой полевой конфигурации. Из условий совместности этих уравнений получаем анзац, с помощью которого находится решение для Т-области. Оказывается, что переход в R-область сводится к простому аналитическому продолжению волновой функции из Т-области в R-область. В результате, приходим к модели заряженной ЧД с непрерывным спектром масс и зарядов.

1. Классическое описание сферически-симметричной конфигурации гравитационного и электромагнитного полей

1.1. Сферически-симметричное пространство-время

Рассмотрим метрику сферически-симметричного ПВ $M^{(4)}$ в 2+2-расщепленной форме

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \gamma_{ab} dx^a dx^b - R^2 d\sigma^2, \quad (1)$$

$$d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\alpha^2. \quad (2)$$

Здесь $R = R(x^a)$, $\gamma_{ab} = \gamma_{ab}(x^a)$ — двухмерный метрический тензор, $\sqrt{-g} = \sqrt{-\gamma} R^2 \sin \theta$, где $g = \det |g_{\mu\nu}|$, $\gamma = \det |\gamma_{ab}|$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; $a, b = 0, 1$.

Полное действие для гравитационного и электромагнитного полей имеет вид

$$S_{tot} = S_g + S_f = -\frac{1}{16\pi c} \int_{M^{(4)}} \left(\frac{c^4}{\kappa} {}^{(4)}R + F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} d^4x. \quad (3)$$

Здесь ${}^{(4)}R$ — скалярная кривизна $M^{(4)}$ относительно $g_{\mu\nu}$. При 2+2 расщеплении $M^{(4)}$ она выражается через масштабный фактор $R(x^a)$ и скалярную кривизну ${}^{(2)}R$ двухмерных радиально-временных подпространств $M^{(2)} \subset M^{(4)}$ с метрикой γ_{ab} :

$${}^{(4)}R = {}^{(2)}R - \frac{4}{R} \Delta R - \frac{2}{R^2} (\nabla R)^2 - \frac{2}{R^2}, \quad (4)$$

где $\Delta R = \nabla^a \nabla_a R = \gamma^{ab} R_{;a;b}$, $(\nabla R)^2 = \gamma^{ab} R_{,a} R_{,b}$, $\nabla_a \equiv ;_a$ и $\partial_a = \partial/\partial x^a \equiv ,_a$ — ковариантная и частная производные по x^a на сечениях $\theta = const, \alpha = const$.

Тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$ для рассматриваемого $M^{(4)}$ переходит в двухмерный радиально-временной тензор

$$F_{ab} = E \epsilon_{ab} = \frac{E}{\sqrt{-\gamma}} e_{ab}, \quad (5)$$

где $A_\mu = \{A_a, 0, 0\}$ — векторный потенциал электромагнитного поля, $E = F_{01} = A_{1,0} - A_{0,1}$. Здесь

$$e_{ab} = -e_{ba} = (-\gamma)^{1/2} \epsilon_{ab}, \quad e^{ab} = -(-\gamma)^{-1/2} \epsilon^{ab}, \quad (6)$$

— двухмерный антисимметричный единичный тензор, ϵ_{ab} — символ Леви-Чивитты на $M^{(2)}$, причем $\epsilon_{ab} = -\epsilon_{ba}$, $\epsilon_{01} = \epsilon^{01} = 1$. Инвариант $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ в действии (3) теперь можно переписать следующим образом

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = F^{ab} F_{ab} = \frac{2}{\gamma} (F_{01})^2 = \frac{2}{\gamma} E^2. \quad (7)$$

Для СС пространства, учитывая (1), (4) и (7), после интегрирования по углам и отбрасывания поверхностного слагаемого, действие (3) можно представить в виде

$$S_{tot} = -\frac{1}{4c} \int_{M^{(2)}} \left\{ \frac{c^4}{\kappa} \sqrt{-\gamma} \left(R^2 \text{}^{(2)}R + 2(\nabla R)^2 - 2 \right) - \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} R^2 E^2 \right\} d^2x, \quad (8)$$

Редуцированное действие инвариантно относительно координатных $x^a = x^a(\dot{x}^b)$ и калибровочных $A_a = \tilde{A}_a + f_{,a}$ преобразований.

Оказывается, что в СС пространстве существует выделенная конгруэнция мировых линий, касательные к которым пропорциональны вектору Кодамы [15]:

$$\vec{K} = K^a \partial_a = -e^{ab} R_{,b} \partial_a. \quad (9)$$

Легко видеть, что $\vec{K}R = K^a R_{,a} = 0$ и, кроме того, вектор Кодамы удовлетворяет уравнению непрерывности

$$K^a_{;a} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^a} (\sqrt{-\gamma} K^a) = 0, \quad \text{или} \quad \mathcal{L}_{\vec{K}} \text{}^{(2)}\Omega = 0, \quad (10)$$

где $\text{}^{(2)}\Omega = \sqrt{-\gamma} dx^0 \wedge dx^1$ — 2-форма объёма на $M^{(2)}$, $\mathcal{L}_{\vec{K}}$ — производная Ли относительно \vec{K} . Уравнение неразрывности (10) векторного поля \vec{K} порождает диффеоморфизмы $M^{(2)}$, подобные потоку несжимаемой жидкости. Они порождают группу унимодулярных преобразований, сохраняющих двухмерный объём, так что $\vec{\eta}$ является вектором унимодулярной симметрии [16]. Для пространств со свободным гравитационным полем, а также для пространств электровакуума, вектор Кодамы совпадает с вектором Киллинга: $\vec{K} = \vec{\xi}$, что соответствует обобщенной теореме Биркгоффа [17].

Отметим, что информация о структуре $M^{(2)}$ содержится в квадрате вектора Кодамы

$$(\vec{K})^2 = \gamma^{ab} K_a K_b = -(\nabla R)^2 = -\gamma^{ab} R_{,a} R_{,b}. \quad (11)$$

Изотропные поверхности $R(r, x^0) = R_{1,2} = \text{const}$, для которых $(\vec{K})^2 = -(\nabla R)^2 = 0$, определяют горизонты ЧД и разбивают пространство $M^{(2)}$ на области. В координатах кривизн для заряженной ЧД можно выделить три области:

$$M^{(2)} = D_{Rin} \cup D_T \cup D_{Rout},$$

где

$$\begin{cases} D_{Rin} : & R < R_1, & (\vec{K})^2 > 0 \text{ — внутренняя R-область;} \\ D_T : & R_1 < R < R_2, & (\vec{K})^2 < 0 \text{ — T-область;} \\ D_{Rout} : & R > R_2, & (\vec{K})^2 > 0 \text{ — внешняя R-область.} \end{cases} \quad (12)$$

Отметим, что в случае максимального аналитического расширения для заряженных ЧД мы имеем бесконечную совокупность локальных областей (карт) (см. например [18]).

Поверхности $R(x^0, x^1) = \text{const}$ в R-областях — времениподобные, а в T-области — пространственноподобные. Поэтому, в T-области удобно использовать замену $R(x^0, x^1) = cT(x^0, x^1)$. Допустимым преобразованием координат метрика (1) приводится к диагональному виду

$$ds^2 = f(x^0, x^1)(dx^0)^2 - h(x^0, x^1)(dx^1)^2 - R^2(x^0, x^1)d\sigma^2, \quad (13)$$

Учитывая формулу

$${}^{(2)}R\sqrt{fh} = \left(\frac{f_{,1}}{\sqrt{fh}} \right)_{,1} - \left(\frac{h_{,0}}{\sqrt{fh}} \right)_{,0}, \quad (14)$$

перепишем действие (8) в виде

$$S_{tot} = \frac{1}{2c} \int_{M^{(2)}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{fh}} \left[\frac{c^4}{\kappa} \left(R_{,1}(fR)_{,1} - R_{,0}(hR)_{,0} \right) + R^2 E^2 \right] + \frac{c^4}{\kappa} \sqrt{hf} \right\} d^2x, \quad (15)$$

где $R_{,0} = \partial R / \partial x^0$, $R_{,1} = \partial R / \partial x^1$.

В Т-области можно выбрать такую ортогональную систему координат $\{x^0, x^1\}$, в которой вектор Киллинга $\vec{\xi}$ пропорционален пространственноподобному координатному вектору $\partial / \partial x^1$. Тогда x^0 — времениподобная эволюционная координата, от которой зависят все величины f , h , R и метрика имеет вид

$$ds_T^2 = f(x^0)(dx^0)^2 - h(x^0)(dx^1)^2 - R^2(x^0)d\sigma^2. \quad (16)$$

Здесь $(\vec{K})^2 = -f^{-1}(x^0)(R_{,0})^2 < 0$, что, с учётом сигнатурного условия $\gamma = -f(x^0)h(x^0) < 0$, даёт $f(x^0) > 0$ и $h(x^0) > 0$. В R-области x^0 — пространственноподобная координата и указанные функции меняют знак, $f(x^0) < 0$, $h(x^0) < 0$.

Граница Т-области определяется условием $(\vec{K})^2 = -f^{-1}(R_{,0})^2 = 0$. Отсюда вытекает, что на горизонте $f(x^0) \rightarrow \infty$. Поскольку, по предположению, геометрия гладкая, то элемент объёма: $d\Omega^{(4)} = R^2 \sqrt{fh} \sin \theta dx^0 dx^1 d\theta d\alpha$ должен быть регулярным. Отсюда следует, что на горизонте $h(x^0) \rightarrow 0$. Из уравнений Эйнштейна вытекает, что функция $h(x^0)$ в окрестности горизонта монотонная, поэтому, на горизонте она меняет знак. Из сигнатурного условия $\gamma = -f(x^0)h(x^0) < 0$ следует, что и $f(x^0)$ меняет знак на горизонте. Таким образом, координаты $\{x^0, x^1\}$ меняют свой смысл при переходе через горизонт.

1.2. Действие и лагранжиан для СС конфигурации гравитационного и электромагнитных полей

Согласно вышесказанному, действие (15) можно разбить на два слагаемых $S = S_T + S_R$, где S_T и S_R — действия для гравитационного поля в R- и Т-областях. Интегрируя в Т-области по пространственноподобной координате x в пределах от x_1 до x_2 , и обозначая $l = x_2 - x_1$, для действия S_T получаем

$$S_T = \frac{l}{2c} \int \left\{ \frac{1}{\sqrt{hf}} \left[R^2 E^2 - \frac{c^4}{\kappa} R_{,0}(hR)_{,0} \right] + \frac{c^4}{\kappa} \sqrt{hf} \right\} dx^0. \quad (17)$$

где $E = A_{1,0} = \phi_{,0}$.

В R-области, действие имеет аналогичный вид, причём эволюционная координата x^0 пространственноподобная и $f(x^0) < 0, h(x^0) < 0$. Метрика (16) допускает координатные преобразования $x^0 = x^0(x^0)$ и $x^1 = ax^1$, где $a = const$. При этом $\dot{f} = f(\partial x^0 / \partial x^0)^2$ и $\dot{h} = a^2 h$.

Далее, удобно перейти к новым переменным N и ξ с помощью соотношений

$$f = \frac{N^2}{h}, \quad h = \frac{\xi}{R}, \quad (18)$$

где $\xi > 0$ или $\xi < 0$ в Т- или R-областях; на горизонте $\xi = 0$. Тогда, метрика (16) принимает вид

$$ds_T^2 = \frac{1}{h} (N dx^0)^2 - h (dx^1)^2 - R^2 d\sigma^2 = \frac{R}{\xi} (N dx^0)^2 - \frac{\xi}{R} (dx^1)^2 - R^2 d\sigma^2. \quad (19)$$

В итоге $\sqrt{hf} = N$, и действие (17) можно переписать следующим образом

$$S_T = \int_{u \in M_T^{(2)}} L_T dx^0, \quad (20)$$

где

$$L_T = \frac{l}{2c} \left\{ \frac{\mathfrak{T}}{N} + NU \right\}, \quad (21)$$

— функция Лагранжа редуцированной системы с кинетической и потенциальной частями

$$\mathfrak{T} = -\frac{c^4}{\kappa} \xi_{,0} R_{,0} + R^2 \phi_{,0}^2. \quad U = \frac{c^4}{\kappa}. \quad (22)$$

1.3. Динамические величины и соотношения

Полная система Лагранжа-Эйлера для функции Лагранжа (21) состоит из связи

$$\frac{\delta L_T}{\delta N} = \frac{\partial L_T}{\partial N} = \frac{l}{2c} \left\{ -\frac{\mathfrak{T}}{N^2} + U \right\} = 0, \quad (23)$$

и динамических уравнений

$$\frac{\delta L_T}{\delta q^A} = \frac{\partial L_T}{\partial q^A} - \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\frac{\partial L_T}{\partial \dot{q}^A} \right) = \frac{l}{2c} \frac{\partial (NU)}{\partial q^A} - \frac{l}{2c} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^A} \left(\frac{\mathfrak{T}}{N} \right) = 0, \quad (24)$$

где введены такие обозначения для полевых переменных: $q^1 = \xi$, $q^2 = R$, $q^3 = \phi$ ($A, B = 1, 2, 3$).

Связь (23) приводит к следующему выражению для нединамической переменной

$$N = N(\xi_{,0}, R_{,0}, \phi_{,0}) = \sqrt{\frac{\mathfrak{T}}{U}} = \frac{\sqrt{\kappa}}{c^2} \sqrt{\mathfrak{T}}. \quad (25)$$

Подставляя N и $U = c^4/\kappa$ в (24), находим

$$\frac{\delta L}{\delta q^A} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial}{\partial q^A} (\sqrt{\mathfrak{T}}) - \frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^A} (\sqrt{\mathfrak{T}}) \right) = 0, \quad (26)$$

где

$$\mu = \frac{cl}{\sqrt{\kappa}}. \quad (27)$$

Полученные уравнения движения в ПВ содержат теперь только динамические величины.

Рассмотрим канонические уравнения. Из лагранжиана (21) следует первичная связь

$$P_N = \frac{\partial L_T}{\partial N_{,0}} = 0. \quad (28)$$

Остальные производные по скоростям дают импульсы:

$$\begin{aligned} P_\xi &= \frac{\partial L_T}{\partial \xi_{,0}} = -\frac{c^3 l}{2\kappa N} R_{,0}, \\ P_R &= \frac{\partial L_T}{\partial R_{,0}} = -\frac{c^3 l}{2\kappa N} \xi_{,0}, \\ P_\phi &= \frac{\partial L_T}{\partial \phi_{,0}} = \frac{l}{cN} R^2 \phi_{,0}. \end{aligned} \quad (29)$$

Функция Гамильтона системы

$$H = P_\xi \xi_{,0} + P_R R_{,0} + P_\phi \phi_{,0} - L_T \quad (30)$$

приводит к вторичной, гамильтоновой связи

$$H(R; \xi_{,0}, R_{,0}, \phi_{,0}) = \frac{l}{2c} \left\{ \frac{\mathfrak{T}}{N} - \frac{c^4}{\kappa} N \right\} = -N \frac{\partial L_T}{\partial N} \sim 0, \quad (31)$$

$$H(R; P_\xi, P_R, P_\phi) = \frac{Nc}{2l} \left\{ -\frac{4\kappa}{c^4} P_\xi P_R + \frac{1}{R^2} P_\phi^2 - \mu^2 \right\} \sim 0, \quad (32)$$

Символ " ~ 0 " означает, что функция Гамильтона обращается в нуль на решениях уравнений движений, то есть в слабом смысле (в смысле Дирака). Вытекающие из (32) канонические соотношения

$$\xi_{,0} = \frac{\partial H}{\partial P_\xi} = -\frac{2\kappa N}{lc^3} P_R, \quad \dot{P}_\xi = -\frac{\partial H}{\partial \xi} = 0, \quad (33)$$

$$R_{,0} = \frac{\partial H}{\partial P_R} = -\frac{2\kappa N}{lc^3} P_\xi, \quad \dot{P}_R = -\frac{\partial H}{\partial R} = \frac{Nc}{lR^3} P_\phi^2, \quad (34)$$

$$\phi_{,0} = \frac{\partial H}{\partial P_\phi} = \frac{Nc}{lR^2} P_\phi, \quad \dot{P}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \quad (35)$$

– это уравнения Эйнштейна для рассматриваемой СС конфигурации в канонической форме.

1.4. Дополнительные классические динамические величины

Кроме канонических динамических величин для рассматриваемой конфигурации гравитационного и электромагнитного полей существуют дополнительные динамические величины.

1. Зарядовая функция. Уравнения Максвелла для СС электромагнитного поля, вытекающие из действий (3) или (8) приводят к соотношениям

$$(\sqrt{-\gamma} R^2 F^{ab})_{,b} = (R^2 E e^{ab})_{,b} = -\left(\frac{R^2}{\sqrt{-\gamma}} E\right)_{,b} \epsilon^{ab} = 0, \quad (36)$$

$$d\left(\frac{R^2}{N} E\right) = 0.$$

Отсюда следует закон сохранения

$$\frac{R^2}{N} E = Q = const. \quad (37)$$

Учитывая третье соотношение в (29), получаем

$$E = \phi_{,0} = N \frac{Q}{R^2} = \frac{cN}{lR^2} P_\phi. \quad (38)$$

Естественно определить следующую функцию полевых переменных N, R и скорости $\phi_{,0}$:

$$Q(N, R, \phi_{,0}) = \frac{R^2}{N} \phi_{,0} = \frac{c}{l} P_\phi. \quad (39)$$

Эта функция для электромагнитного поля сохраняется и равна заряду конфигурации внутри области радиуса R . В дальнейшем мы будем называть её зарядовой функцией.

2. Массовая функция вакуумного СС гравитационного поля определяется соотношением [16, 19, 20]:

$$M_f(\gamma_{ab}, R) = \frac{c^2}{2\kappa} R (1 + \gamma^{ab} R_{,a} R_{,b}) \quad (40)$$

и в R -области связана с полевой энергией сферической области радиуса R . На бесконечности она равняется массе, которая фигурирует в ньютоновском пределе $\varphi = -\kappa m/R$. Её значение для вакуумного СС гравитационного поля постоянно: $M_f = m = const$. В T -области она сохраняется и для метрики (19) принимает вид

$$M_f = \frac{c^2}{2\kappa} \left(R + \frac{1}{N^2} \xi R_{,0}^2 \right). \quad (41)$$

Однако, в случае СС системы гравитационного и электромагнитного полей массовая функция уже не сохраняется. Чтобы ввести аналог массовой функции для всей конфигурации надо учесть вклад электромагнитной массы в полную массу данной сферической области ПВ. Для

этого рассмотрим общее уравнение, которому подчиняется массовая функция в случае наличия вещества [16, 20]:

$$dM_f = \frac{4\pi}{c^2} R^2 (T_a^a dR - R_{,a} T_b^a dx^b), \quad (42)$$

где T_b^a — радиально-временные компоненты тензора энергии-импульса (ТЭИ).

В случае электромагнитного поля

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} (-F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^\rho + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\mu\nu}) \quad (43)$$

для радиально-временных компонент ТЭИ СС конфигурации находим

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} (-F_{ac} F_b{}^c + \frac{1}{4} F_{cd} F^{cd} \gamma_{ab}) = \frac{E^2}{8\pi N^2} \gamma_{ab}. \quad (44)$$

Отсюда, учитывая (38), получаем

$$T_b^a = \frac{Q^2}{8\pi R^4} \delta_b^a, \quad T_a^a = \frac{Q^2}{4\pi R^4}. \quad (45)$$

Подставляя эти соотношения в (42), приходим к уравнению

$$dM_{tot} = d \left(M_f + \frac{Q^2}{2c^2 R} \right) = 0. \quad (46)$$

Откуда следует, что величина, определяемая формулой

$$M_{tot} = M_f + \frac{Q^2}{2c^2 R} = const, \quad (47)$$

является инвариантом, не зависящем от координат $\{x^0, x^1\}$. Она имеет смысл полной полевой массы сферической области радиуса R рассматриваемой конфигурации с учётом вклада электромагнитного поля. Заметим, что закон сохранения (46) имеет ту же дифференциальную структуру, что и закон сохранения (36). Это указывает на их геометрическую природу.

Полученное соотношение можно переписать в виде

$$M_{tot} c^2 = M_f c^2 + \frac{Q^2}{2R} = M_f c^2 + \frac{1}{2} Q \phi. \quad (48)$$

Эта формула описывает вклады гравитационного и электромагнитного полей в полную полевую энергию сферической области радиуса R . Интересно отметить, что вклад электромагнитной энергии аналогичен собственной электростатической энергии однородно заряженной тонкой оболочки радиуса R и заряда Q в плоском пространстве. Подставляя (41) и (39) в (47), получаем следующие представления полной массы

$$M_{tot} = \frac{c^2}{2\kappa} \left[R + \frac{1}{N^2} \left(\xi R_{,0}{}^2 + \frac{\kappa R^3 \phi_{,0}{}^2}{c^4} \right) \right]. \quad (49)$$

Полная массовая функция позволяет найти радиусы горизонтов R_{hor} для данных массы $M_{tot} = m$ и заряда Q заряженной ЧД. Действительно, поскольку на горизонте $\xi = 0$, из (49) получаем

$$\frac{c^2}{2\kappa} \left\{ R_{hor} + \frac{\kappa}{c^4} \frac{Q^2}{R_{hor}} \right\} = m, \quad (50)$$

откуда следует

$$R_{hor1,2} = \frac{1}{c^2} \left\{ \kappa m \pm \sqrt{\kappa^2 m^2 - \kappa Q^2} \right\}, \quad (\kappa m^2 \geq Q^2). \quad (51)$$

В заключение этого пункта, выпишем выражения для полной массы через импульсы

$$M_{tot}(\xi, R; P_\xi, P_\phi) = \frac{1}{2l^2} \left[\frac{l^2 c^2}{\kappa} R + \frac{4\kappa}{c^4} \xi P_\xi^2 + \frac{1}{R} P_\phi^2 \right], \quad (52)$$

и скобки Пуассона между дополнительными динамическими величинами и функцией Гамильтона:

$$\{H, M_{tot}\} = \frac{2\kappa}{l^2 c^4} P_\xi H \sim 0, \quad \{H, Q\} = 0, \quad \{M_{tot}, Q\} = 0. \quad (53)$$

Таким образом, полная масса сохраняется в силу гамильтоновой связи $H \sim 0$, то есть на решениях (в слабом смысле). В то время, как для заряда имеем сильный закон сохранения.

1.5. Конфигурационное пространство СС системы гравитационного и электромагнитных полей и его геометрия

С точки зрения классической механики метрические коэффициенты и потенциал электрического поля в полученном лагранжиане (21) выполняют роль обобщённых координат (координаты минисуперпространства Уилера-Девитта) $q^a = \{\xi, R, \phi\}$. Однако, метрическая переменная N входит в лагранжиан без производной по времени, что связано с тем, что метрика допускает произвольную параметризацию времени $x^0 = x^0(x^0)$. Поэтому N является нединамической переменной и входит в лагранжиан, как множитель Лагранжа. Оказывается, что пользуясь уравнением (25), можно исключить эту переменную из S . В итоге, исходное действие преобразуется к новому действию в конфигурационном пространстве, при этом время устраняется из рассмотрения.

Действительно, подставляя значение N из (25) в (21), получаем новую функцию Лагранжа

$$L_{\mathfrak{R}} = L_T|_{H=0} = \mu\sqrt{\mathfrak{T}}. \quad (54)$$

При этом, исходное действие (20), определённое в T -области ПВ, переходит в действие $S_{\mathfrak{R}}$ для кривой γ , определённой в минисуперпространстве \mathfrak{R} :

$$S_{\mathfrak{R}} = \int_{\gamma \in \mathfrak{R}} L_{\mathfrak{R}} dx^0 = \mu \int_{\gamma \in \mathfrak{R}} \sqrt{\mathfrak{T}} dx^0 = \mu \int_{\gamma \in \mathfrak{R}} d\Omega, \quad (55)$$

где

$$d\Omega^2 = \Omega_{AB} dq^A dq^B = \mathfrak{T}(dx^0)^2 = -\frac{c^4}{\kappa} d\xi dR + R^2 d\phi^2 > 0, \quad (56)$$

– метрика минисуперпространства \mathfrak{R} в координатах $q^1 = \xi$, $q^2 = R$, $q^3 = \phi$ ($A, B = 1, 2, 3$) (общее рассмотрение см. в [21]).

Легко видеть, что, хотя вариационная задача для нового действия не эквивалентна исходной, уравнения Лагранжа-Эйлера для новой функции Лагранжа $L_{\mathfrak{R}} = \mu\sqrt{\mathfrak{T}}$ эквивалентны уравнениям (26), вытекающим из уравнений Лагранжа-Эйлера (24) для исходной функции Лагранжа (21), при подстановки туда N (отличие состоит в несущественном общем множителе $1/2$ в (26)). Таким образом, исключение N или из исходных уравнений движений (24), или из исходной функции Лагранжа (21) приводят к одинаковым динамическим уравнениям.

Для детерминанта метрического тензора Ω_{AB} получаем

$$\det \|\Omega_{AB}\| = -\frac{c^8}{4\kappa^2} R^2 < 0, \quad (57)$$

что определяет элемент объёма, задающий натуральную меру в псевдоевклидовом пространстве:

$$dV = \sqrt{-\det \|\Omega_{AB}\|} dq^1 dq^2 dq^3 = \frac{c^4}{2\kappa} R d\xi dR d\phi. \quad (58)$$

Мы видим, что новый функционал $S_{\mathfrak{R}}$ представляет собой действие для геодезической в конфигурационном пространстве. Как следует из предыдущего, полученные отсюда уравнения геодезической вместе с уравнением для N (25) эквивалентны исходной системе пространственно-временных уравнений Эйнштейна вместе с уравнением для электростатического поля. Оказывается, что компоненты канонического импульсы (29), определённые для исходного лагранжиана (21) совпадают с компонентами импульса релятивистской частицы массы μ и скорости $dq^a/d\Omega = \{d\xi/d\Omega, dR/d\Omega, d\phi/d\Omega\}$, движущейся по геодезической в минисуперпространстве с метрикой (56). Действительно, рассмотрим, для примера, компоненту импульса P_ξ исходной динамической системы. Из (29), учитывая (25), (56) и (27), последовательно находим

$$P_\xi = -\frac{c^3 l}{2\kappa N} \frac{dR}{dx^0} = -\frac{c^5 l}{2\kappa \sqrt{\kappa} \sqrt{\mathfrak{T}}} \frac{dR}{dx^0} = -\frac{\mu c^4}{2\kappa} \frac{dR}{d\Omega}. \quad (59)$$

Наконец, из (56) вытекает $\Omega_{\xi R} = -c^4/2\kappa$, что даёт

$$P_{\xi} = \mu\Omega_{\xi R} \frac{dR}{d\Omega}. \quad (60)$$

Аналогичные формулы вытекают и для остальных компонент. В итоге, общую формулу для импульсов конфигурации можно записать в стандартном виде

$$P_a = \mu\Omega_{ab} \frac{dq^a}{d\Omega}, \quad (61)$$

что совпадают с компонентами импульса релятивистской частицы массы μ . Указанные импульсы, в силу гамильтоновой связи (32) или, в силу обычного геометрического условия нормировки 3-скорости в минисуперпространстве, подчиняются условию $\Omega^{AB}P_AP_B = \mu^2$. Отмеченный переход к минисуперпространству, как и метрика суперпространства, не зависят от преобразования $N = \tilde{N}f(R, \xi, \phi)$.

Оказывается, что для рассматриваемого минисуперпространства с метрикой (56), тензор кривизны равен нулю. Поэтому существуют преобразования полевых функций, например,

$$\xi = \frac{\kappa}{c^4} \left(c\tau - x - \frac{y^2}{c\tau + x} \right), \quad \phi = \frac{y}{c\tau + x}, \quad R = c\tau + x, \quad (62)$$

приводящие метрику (56) к лоренцевому виду

$$d\tilde{\Omega}^2 = -c^2 d\tau^2 + dx^2 + dy^2. \quad (63)$$

В дальнейшем будем считать τ времениподобной переменной. Выпишем здесь также обратные преобразования

$$\tau = \frac{1}{2c} \left[\frac{c^4}{\kappa} \xi + (1 + \phi^2) R \right], \quad x = \frac{1}{2} \left[-\frac{c^4}{\kappa} \xi + (1 - \phi^2) R \right], \quad y = R\phi. \quad (64)$$

В новых координатах лагранжиан СС конфигурации гравитационного и электромагнитного полей (21) и связь приобретают форму

$$L = \frac{l}{2c} \left\{ \frac{1}{N} (-c^2 \tau_{,0}^2 + x_{,0}^2 + y_{,0}^2) + \frac{c^4}{\kappa} N \right\}, \quad (65)$$

$$c^2 \tau_{,0}^2 - x_{,0}^2 - y_{,0}^2 + \frac{c^4}{\kappa} N^2 = 0. \quad (66)$$

Итак, уравнения геодезического движения частицы в трёхмерном псевдоевклидовом пространстве с метрикой (63), которым соответствуют прямые линии в минисуперпространстве, с учётом связи (66), эквивалентны уравнениям Эйнштейна, вытекающие из (65). Заметим, что метрика (63), лагранжиан (65) и связь (66), инварианты относительно группы преобразований $O(1, 2)$.

1.6. Классическое решение в минисуперпространстве

Подставляя соотношения

$$P_{\xi} = \frac{\partial S}{\partial \xi}, \quad P_R = \frac{\partial S}{\partial R}, \quad P_{\phi} = \frac{\partial S}{\partial \phi} \quad (67)$$

в гамильтонову связь (32) и массовую функцию (52), приходим к уравнению Эйнштейна-Гамильтона-Якоби

$$-\frac{4\kappa}{c^4} \frac{\partial S}{\partial \xi} \frac{\partial S}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 = \mu^2 \quad (68)$$

и уравнению для массы конфигурации

$$M_{tot} = \frac{1}{2l^2} \left[\frac{l^2 c^2}{\kappa} R + \frac{4\kappa}{c^4} \xi \left(\frac{\partial S}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 \right] = m. \quad (69)$$

Уравнение (68) можно интерпретировать, как уравнение Гамильтона-Якоби для свободной частицы с массой $\mu = lc/\sqrt{\kappa}$, движущейся по геодезической в конфигурационном пространстве с метрикой (56).

Совместность системы дифференциальных уравнений (68) и (69) вытекает из совместности уравнений для гамильтоновой связи $H = 0$ и массы $M = m$, что сводится к равенству нулю скобки Пуассона (53) на решениях уравнения движения, то есть в слабом смысле. Подчеркнем, что для нахождения траекторий в конфигурационном пространстве не требуется фиксации калибровки.

Из канонических уравнений (33-35) следует, что система имеет два интеграла движения $P_\xi = const, P_\phi = (l/c)Q = const$, поэтому ищем решения уравнения (68) в виде

$$S = \frac{l}{c}Q\phi + P_\xi\xi + \sigma(R). \quad (70)$$

Функцию $\sigma(R)$ находим с помощью (68), что приводит к решению

$$S = \frac{l}{c}Q\phi + P_\xi\xi - \frac{l^2c^6}{4\kappa^2P_\xi^2} \left(\frac{\kappa Q^2}{c^4R} + R \right). \quad (71)$$

Отсюда, дифференцируя S по Q и P_ξ и приравнявая постоянным ξ_0 и ϕ_0 , находим траектории

$$\frac{\partial S}{\partial Q} = \frac{l}{c}\phi - \frac{l^2c^2}{2\kappa P_\xi} \frac{Q}{R} = \frac{l}{c}\phi_0, \quad (72)$$

$$\frac{\partial S}{\partial P_\xi} = \xi + \frac{l^2c^6}{4\kappa^2P_\xi^2} \left(\frac{\kappa Q^2}{c^4R} + R \right) = \xi_0. \quad (73)$$

С помощью калибровочного преобразования потенциала постоянную ϕ_0 обращаем в нуль.

Уравнение для массы конфигурации (69) даёт

$$\frac{4\kappa}{c^4}\xi P_\xi^2 + \frac{l^2c^2}{\kappa} \left(\frac{\kappa Q^2}{c^4R} + R \right) = 2ml^2. \quad (74)$$

Совместное решение уравнений траектории (73) и массы (74), возможны только при следующей связи между массой ЧД и импульсом P_ξ :

$$P_\xi = \pm lc^2 \sqrt{\frac{m}{2\kappa\xi_0}}. \quad (75)$$

В результате, уравнения траекторий в минисуперпространстве принимают вид

$$\phi(R) = c\sqrt{\frac{\xi_0}{2\kappa m}} \frac{Q}{R}, \quad \xi(R) = \frac{c^2}{2\kappa m} \xi_0 R F_T(m, Q, R), \quad (76)$$

где

$$F_T(m, Q, R) = -1 + \frac{2\kappa m}{c^2R} - \frac{\kappa Q^2}{c^4R^2}. \quad (77)$$

Здесь в качестве эволюционного параметра используется масштабный фактор R (в T -области: $R = cT$). Таким образом, для искомой метрической функции в (19), находим

$$h = \frac{c^2\xi_0}{2\kappa m} F_T(T, m, q), \quad F_T(T, m, q) = -1 + \frac{2\kappa m}{c^3T} - \frac{\kappa q^2}{c^6T^2} > 0 \text{ — в } T\text{-области}; \quad (78)$$

$$h = -\frac{c^2\xi_0}{2\kappa m} F_R(R, m, q), \quad F_R(R, m, q) = 1 - \frac{2\kappa m}{c^2R} + \frac{\kappa q^2}{c^4R^2} > 0 \text{ — в } R\text{-областях}. \quad (79)$$

Эволюционный параметр T можно выразить через инвариантный натуральный параметр Ω геодезической в минисуперпространстве, соответствующей классическому ПВ решению. Действительно, приравнявая правые части соотношений (59) и (75), находим

$$\frac{c^3}{\kappa} \frac{dR}{d\Omega} = \mp \sqrt{\frac{2m}{\xi_0}}. \quad (80)$$

Отсюда, опуская постоянную интегрирования и ограничиваясь нижним знаком, получаем выражение метрической функции R через натуральный параметр Ω :

$$R = cT = \frac{\kappa}{c^3} \sqrt{\frac{2m}{\xi_0}} \Omega. \quad (81)$$

Мы видим, что функция R ("площадная координата") пропорциональна натуральному параметру Ω и, таким образом, является инвариантным параметром (как и следовало ожидать), через который можно выразить решение, не конкретизируя калибровку N . Подставляя это соотношение в (78)-(79) мы можем найти искомое выражение метрических функций через натуральный параметр (81), соответствующей геодезической.

Чтобы получить ПВ форму метрики, рассматриваемой конфигурации, воспользуемся первым из канонических уравнений (34). Подставляя в него импульс (75), находим

$$R_{,0} = -\frac{2\kappa N}{lc^3} P_\xi = \frac{N}{c} \sqrt{\frac{2\kappa m}{\xi_0}}. \quad (82)$$

Отсюда вытекает

$$N dx^0 = \sqrt{\frac{\xi_0 c^2}{2\kappa m}} dR. \quad (83)$$

Подставляя это соотношение в метрику (19) и, учитывая (78) и соотношение $R = cT$, получаем инвариантную форму метрики, которая совпадает со стандартной метрикой Рейсснера-Нордстрема в T -области координат кривизны:

$$ds^2 = \frac{c^2 dT^2}{F_T(T, m, q)} - F_T(T, m, q) dr^2 - c^2 T^2 d\sigma. \quad (84)$$

Здесь мы ввели новую радиальную координату

$$r = c \sqrt{\frac{\xi_0}{2\kappa m}} x^1.$$

Рассмотрим теперь структуру траекторий в конфигурационном пространстве. Область допустимых движений, соответствующей решению в T -области, определяется $\xi > 0$, $R > 0$. В лоренцевых координатах (64) эта область определяется неравенствами

$$-\tilde{\Omega}^2 = c^2 \tau^2 - x^2 - y^2 > 0, \quad R = c\tau + x > 0, \quad (85)$$

что соответствуют верхней внутренности конуса $\tilde{\Omega}^2 = 0$ (см. рис. 1). Решению в R -области, соответствуют движения вне светового конуса $\tilde{\Omega}^2 = 0$. Граница T -области $\xi = 0$ совпадает со световым конусом в конфигурационном пространстве $\tilde{\Omega}^2 = -c^2 \tau^2 + x^2 + y^2 = 0$. В этих координатах решение (76) описываются семейством прямых

$$c\tau(R) = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{a}{R_g}\right) R + a \right], \quad x(R) = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{a}{R_g}\right) R - a \right], \quad y = \sqrt{\frac{\xi_0}{R_g}} Q, \quad (86)$$

где введены обозначения

$$R_g = \frac{2\kappa m}{c^2}, \quad a = \frac{\xi_0 c^4}{\kappa}. \quad (87)$$

Отметим, что эволюция систем в конфигурационном пространстве во всех случаях происходит в пространственноподобных направлениях $d\tilde{\Omega}^2 = -c^2 d\tau^2 + dx^2 + dy^2 = (a/R_g) dR^2 > 0$.

Исключая из первых двух уравнений (86) параметр R , получаем уравнение рассматриваемого семейства прямых в минисуперпространстве

$$(R_g + a) \left(c\tau - \frac{a}{2} \right) - (R_g - a) \left(x + \frac{a}{2} \right) = 0, \quad y = \sqrt{\frac{\xi_0}{R_g}} Q, \quad (88)$$

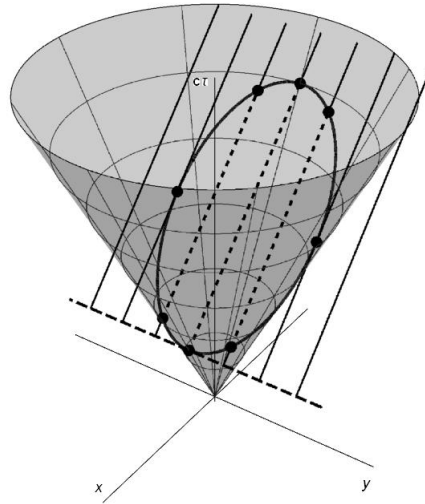


Рис. 1. Минусуперпространство сферически-симметричной конфигурации гравитационного и электромагнитных полей в координатах $\{ct, x, y\}$ (64) и классические решения для заряженных ЧД с начальными условиями (89). Параллельные прямые представляют семейство (88) траекторий движений, описывающих эволюцию систем для различных зарядов Q ЧД. Отрезки прямых внутри конуса соответствуют Т-области ПВ, а их пересечение с поверхностью конуса — горизонтам событий $R = R_{hor1,2}$ (51). Внешняя область конуса в секторе $R = ct + x > 0$ представляет R-область ПВ. Жирная пунктирная линия изображает начальную прямую (89) при различных значениях Q , соответствующую ПВ центральной сингулярности $R = 0$.

образующих плоскость, проходящую через начальную прямую

$$ct(0) = \frac{a}{2}, \quad x(0) = -\frac{a}{2}, \quad y(0) = y = \sqrt{\frac{\xi_0}{R_g}} Q, \quad (89)$$

соответствующей центральной ПВ сингулярности $R = ct + x = 0$. Угловые коэффициенты прямых семейства не зависят от заряда Q и равны

$$k = \frac{R_g - a}{R_g + a}. \quad (90)$$

Они лежат в пределах $-1 < k < 1$, при $0 < R_g < \infty$. При $Q = 0$ движение происходит вдоль прямой (88) с $y = 0$. Наличие заряда приводит к сдвигу этой прямой на величину $y(0) = Q\sqrt{\xi_0/R_g}$ вдоль оси y .

Таким образом, эволюцию системы в конфигурационном пространстве, при заданных массе M и заряда Q , можно представить, как движение вдоль прямой семейства (88) (см. рис. 1), начинающейся вне светового конуса $\tilde{\Omega}^2 = 0$ на линии (89) (центральная сингулярность). Далее, прямая пересекает конус $\tilde{\Omega}^2 = 0$ при $R = R_{hor1}$ (51) (внутренний горизонт), попадает внутрь конуса, пересекает его при $R = R_{hor2}$ (внешний горизонт) и уходит на бесконечность минусуперпространства. Множество точек горизонтов, пересечений прямых семейства (86) с конусом $\tilde{\Omega}^2 = 0$, образует эллипс:

$$\frac{4}{aR_g} y^2 + \frac{16}{(a_g + R_g)^2} \left(x + \frac{a_g - R_g}{4} \right)^2 = 1,$$

лежащий в плоскости, образованной семейством прямых (88).

Движению внутри светового конуса $\tilde{\Omega}^2 = 0$ минисуперпространства соответствуют решения для Т-область ПВ, движению вне светового конуса — решения для R-области (см. рис. 1). Для экстремально заряженной ЧД, когда $|Q| = m\sqrt{\kappa}$, соответствующая прямая семейства (88) касается конуса $\tilde{\Omega}^2 = 0$ в точке $R_{hor} = m\kappa$. Для суперэкстремальных зарядов $|Q| > m\sqrt{\kappa}$ эти прямые лежат вне светового конуса $\tilde{\Omega}^2 = 0$.

2. Квантовое описание сферически-симметричной конфигурации гравитационного и электромагнитного полей

Квантовое состояние рассматриваемой полевой конфигурации задаются волновой функцией $\Psi(R, \xi, \phi)$ на минисуперпространстве с координатами $\{R, \xi, \phi\}$. Соответствующие им операторы импульса в координатном представлении имеют вид:

$$\hat{P}_R = -i\hbar \frac{\partial}{\partial R}, \quad \hat{P}_\xi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \hat{P}_\phi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (91)$$

Классической гамильтоновой связи $H(R; P_\xi, P_R, P_\phi) = 0$ (32), ограничивающей физическое состояние конфигурации, сопоставляется квантовый аналог $\hat{H}\Psi = 0$. В результате подстановки (91) в (32) получаем оператор Гамильтона

$$\hat{H} = \frac{Nc}{2l} \left\{ \frac{4\kappa\hbar^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial R \partial \xi} - \frac{\hbar^2}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \mu^2 \right\}, \quad (92)$$

и соотношение $\hat{H}\Psi = 0$ приводит к уравнению Девитта:

$$\left(4 \frac{\partial^2}{\partial R \partial \xi} - \frac{c^4}{\kappa R^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \Psi = \frac{c^6 l^2}{\kappa^2 \hbar^2} \Psi. \quad (93)$$

Заряду (39) и полной массе (52) сопоставляются операторы

$$\hat{Q} = \frac{c}{l} \hat{P}_\phi = -i \frac{c\hbar}{l} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (94)$$

$$\hat{M} = \frac{1}{2l^2} \left(\frac{l^2 c^2}{\kappa} R + \frac{4\kappa}{c^4} \hat{P}_\xi \xi \hat{P}_\xi + \frac{1}{R} \hat{P}_\phi^2 \right) = \frac{1}{2l^2} \left(\frac{l^2 c^2}{\kappa} R - \frac{4\kappa\hbar^2}{c^4} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\hbar^2}{R} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right). \quad (95)$$

Отметим, что для эрмитовости оператора полной массы, в конфигурационном пространстве с элементом объёма (58), используется следующее упорядочивание операторов: $\xi P_\xi^2 \Rightarrow \hat{P}_\xi \xi \hat{P}_\xi$. Для операторов (92), (94) и (95) выполняются коммутационные соотношения

$$[\hat{H}, \hat{M}] = -\frac{2\kappa\hbar^2}{l^2 c^4} \frac{\partial}{\partial \xi} \hat{H} \sim 0, \quad [\hat{H}, \hat{Q}] = 0, \quad [\hat{Q}, \hat{M}] = 0. \quad (96)$$

Здесь первое соотношение коммутации означает, что физическое состояние Ψ может быть собственным состоянием оператора массы [7].

Мы будем строить состояния с определённой полной массой и зарядом, то есть состояния соответствующие собственным функциям и собственным значениям операторов полной массы и заряда:

$$\hat{M}\Psi_m = m\Psi_m, \quad \hat{Q}\Psi_q = q\Psi_q. \quad (97)$$

Эти уравнения, с учётом (95,94) и (91), могут быть переписаны следующим образом

$$\left\{ \frac{c^2 l^2}{\kappa} R - \frac{4\kappa\hbar^2}{c^4} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\hbar^2}{R} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} \Psi_m = 2l^2 m \Psi_m. \quad (98)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \Psi_q = \frac{iq l}{c\hbar} \Psi_q. \quad (99)$$

Из соотношения (99) вытекает $\Psi_q = Ae^{i(ql/c\hbar)\phi}$. Поэтому, общие волновые функции операторов Девитта и заряда также, как операторов полной массы и заряда, можно представить в виде

$$\Psi = \psi(\xi, R) e^{i(ql/c\hbar)\phi}, \quad \Psi_m = \psi_m(\xi, R) e^{i(ql/c\hbar)\phi}. \quad (100)$$

Согласно (93) и (98), функции ψ и ψ_m удовлетворяют уравнениям

$$\left(\frac{4\partial^2}{\partial R \partial \xi} + \frac{c^2 q^2 l^2}{\kappa \hbar^2} \frac{1}{R^2} \right) \psi = \frac{c^6 l^2}{\kappa^2 \hbar^2} \psi, \quad (101)$$

$$\left\{ \frac{l^2 c^2}{\kappa} R - \frac{4\kappa \hbar^2}{c^4} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{q^2 l^2}{c^2} \right\} \psi_m = 2m l^2 \psi_m. \quad (102)$$

Введём планковские и безразмерные величины по формулам

$$m_{pl}^2 = \frac{c\hbar}{\kappa}, \quad l_{pl}^2 = \frac{\hbar\kappa}{c^3}, \quad q_{pl} = m_{pl} \sqrt{\kappa} = \sqrt{c\hbar}, \quad (103)$$

$$\nu = \frac{m}{m_{pl}}, \quad \sigma = \frac{q}{q_{pl}}, \quad x = \frac{\xi}{l_{pl}}, \quad y = \frac{R}{l_{pl}}, \quad \chi = \frac{l}{l_{pl}}. \quad (104)$$

В итоге, систему (101), (102) можно переписать в следующем безразмерном виде

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = \frac{\chi^2}{4} \left(1 - \frac{\sigma^2}{y^2} \right) \psi, \quad (105)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} = -\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_m}{\partial x} + \frac{\chi^2}{4x} \left(y + \frac{\sigma^2}{y} - 2\nu \right) \psi_m. \quad (106)$$

Согласно (96), оператор полной массы \hat{M} слабо коммутирует с Гамильтонианом \hat{M} . Чтобы физические состояния Ψ , удовлетворяющие уравнению Девитта (93), были также собственными функциями оператора полной массы (98), система уравнений (105), (106) должна иметь общее решение $\psi = \psi_m$. Условие совместности этой системы:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad (107)$$

приводит к уравнению

$$\left(1 - \frac{\sigma^2}{y^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{x} \left(y + \frac{\sigma^2}{y} - 2\nu \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (108)$$

Его уравнение характеристик

$$\frac{dx}{x} = \frac{-(y^2 - \sigma^2) dy}{y(y^2 - 2\nu y + \sigma^2)} \quad (109)$$

имеет интеграл

$$Z = \frac{x}{y} (y^2 - 2\nu y + \sigma^2) = C. \quad (110)$$

Тогда, общее решение уравнения (108) – это произвольная функция $\psi = \psi(Z)$ аргумента Z . Подставляя найденный анзац в уравнение Девитта (105), приходим к уравнению

$$Z \frac{d^2 \psi}{dZ^2} + \frac{d\psi}{dZ} - \frac{\chi^2}{4} \psi = 0. \quad (111)$$

Его общее решение имеет вид

$$\psi = C_1 J_0(\chi \sqrt{-Z}) + C_2 Y_0(\chi \sqrt{-Z}), \quad (112)$$

где J_0 и Y_0 – функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка.

Возвращаясь к исходным переменным и учитывая $R = cT$ для T-области, получаем

$$\psi = C_1 J_0 \left(\frac{lcT}{l_{pl}^2} \sqrt{hF_T(T, m, q)} \right) + C_2 Y_0 \left(\frac{lcT}{l_{pl}^2} \sqrt{hF_T(T, m, q)} \right), \quad (113)$$

где функция $F_T(T, m, q) > 0$ определена согласно (78). На горизонтах $F_T = 0$, поэтому, для регулярности полагаем $C_2 = 0$.

Таким образом, для Т-области получаем следующую волновую функцию конфигурации в состоянии с данными массой m и зарядом q [22]:

$$\Psi_{m,q}(h, T, \phi) = C J_0 \left(\frac{lc}{l_{pl}^2} T \sqrt{h F_T(T, m, q)} \right) e^{i(ql/c\hbar)\phi}. \quad (114)$$

Отметим, что h и T здесь положительные независимые величины. Для классического решение Рейсснера-Нордстрема переменные $\xi = hR$ и $R = cT$ входят в исходную метрику (19), причём в Т-области, величина h определяется значением T посредством функции $F_T(T, m, q) > 0$, согласно (78).

Поскольку для метрики (56) минисуперпространственные сигнатурные условия не нарушаются, как в Т-, так и R-областях ПВ, а эволюция системы в конфигурационном пространстве во всех случаях происходит внутри направления $d\Omega^2 > 0$, то квантовые уравнения (105, 106), построенные в минисуперпространстве, выполняются независимо от типа области ПВ. Поэтому волновая функция системы в R-области имеет вид аналогичный (114) и может быть выписана путём формальной замены $hF_T(T, m, q) \rightarrow -hF_R(R, m, q)$ (см. формулы (78, 79)):

$$\Psi_{m,q}(h, R, \phi) = C J_0 \left(\frac{l}{l_{pl}^2} R \sqrt{-h F_R(R, m, q)} \right) e^{i(ql/c\hbar)\phi}. \quad (115)$$

Здесь $R > 0$ и h — отрицательная величина. Поскольку $F_R(R, m, q) > 0$, то величина под радикалом положительна. В классическом случае величина h определяется значением R посредством функции $F_R(R, m, q)$, согласно (79). Волновую функцию (115) можно формально получить исходя из метрики (19) и лагранжиана конфигурации (21) в R-области, где эволюционный параметр x^0 является пространственноподобным. Поэтому решение (115) можно считать аналитическим продолжением решения (114) через горизонты $F_R(R, m, q) = F_T(T, m, q) = 0$.

Заметим, что коэффициент N не входит в волновую функцию $\Psi_{m,q}(h, T, \phi)$, которая определяет амплитуду вероятности конфигурации $\{h, T, \phi; m, q\}$, то есть точки $\{h, T, \phi\}$ минисуперпространства, для данных наблюдаемых m, q . Спектры массы и заряда ЧД в рассматриваемом подходе получаются непрерывными.

Для сравнения приведём частный случай волновой функции, когда $q = 0$:

$$\Psi_m(h, T) = C J_0 \left(\frac{lc}{l_{pl}^2} T \sqrt{h \left(\frac{2\kappa m}{c^3 T} - 1 \right)} \right),$$

которая описывает Т-область нейтральной ЧД с непрерывным спектром массы.

Заключение

Как было показано в пункте (1.5) конфигурационное пространство СС системы электромагнитного и гравитационного полей является плоским, поэтому решениям уравнений Эйнштейна соответствуют прямые линии в минисуперпространстве с метрикой (63). Это значительно упрощает дифференциально-геометрическую структуру решений уравнений ЭГЯ. Кроме этого, оказывается, что искомые выражения для метрических функций можно выразить через натуральный инвариантный параметр, соответствующей геодезической в минисуперпространстве. Вследствие этого, классические решения для ПВ метрики можно построить без фиксации калибровки, для произвольной функции смещения.

Решениями уравнения Девитта (93) являются плоские волны. Если потребовать, чтобы волновая функция, удовлетворяющая уравнению Девитта, была собственной функцией оператора

полной массы и заряда (97), то получаем волновую функцию (114) СС конфигурации электромагнитного и гравитационного полей в состоянии с данными массой m и зарядом q , которую можно представить в виде некоторого волнового пакета.

Попутно заметим, что используемые дифференциальные уравнения определяют только локальную структуру пространства, тогда как глобальное строение нужно доопределять. Так, пространственную часть метрики (63) $dl^2 = dx^2 + dy^2$ можно рассматривать, как метрику на плоском двухмерном торе \mathbb{T}^2 : $X^1 = \cos x$, $X^2 = \sin x$, $X^3 = \cos y$, $X^4 = \sin y$, вложенном в четырёхмерное плоское пространство с декартовой метрикой $dl^2 = (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 + (dX^4)^2$. Таким образом, здесь на координаты x, y налагаются условия $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 2\pi$, причём точки отрезков прямых $\{0, y\}$ и $\{2\pi, y\}$ ($\forall y : 0 \leq y \leq 2\pi$), также, как отрезки прямых $\{x, 0\}$ и $\{x, 2\pi\}$ ($\forall x : 0 \leq x \leq 2\pi$) следует отождествить. Указанное вложение определяется с точностью до преобразований $O(1, 2)$.

Таким образом, вопрос о спектре масс не решается при локальном подходе, поскольку характер спектра зависит от глобальных свойств геометрии ПВ и суперпространства, их строения в целом, а также структуры фазового пространства системы. Поэтому, для получения дискретного спектра, вводятся дополнительные дифференциально-геометрические и алгебраические (групповые) структуры на пространственно-временном, конфигурационном или фазовом пространствах (см., например, работу [23] и ссылки в ней).

Как правило дискретный спектр возникает при наличии потенциальной ямы или компактной геометрии конфигурационного или фазового пространства, приводящих к финитным движениям. Так, чтобы получить дискретный спектр, в работе [12] используются свойства евклидовой термодинамики ЧД и квантовой механики систем с периодической координатой фазового пространства, Другая возможность связана с выбором немонотонного преобразования времени, что достигается соответствующим преобразованием функции хода [24], и использовании периодического решения. Использование такого рода замены переменной N , приводит к немонотонной зависимости собственного времени от координатного, что может привести к различным экзотическим обстоятельствам.

Ситуация существенно меняется при рассмотрении динамической картины образования ЧД, в результате гравитационного коллапса вещества. Так, квантовая механика коллапсирующих конфигураций на основе пылевых оболочек приводит к дискретному спектру [25–27]. Более сложные пылевые конфигурации (см, например в [28]), также могут привести к дискретному спектру без введения дополнительных структур.

Список литературы

1. Peres A. On Cauchy's Problem in General Relativity. *Nuovo Cimento*. 1962. V. 26. S. 53-61.
2. Dewitt B.S. Quantum theory of gravity. I. The canonical theory. *Phys. Rev.* 1967. V. 160. S. 1113-1148.
3. Schulz B. Review on the Quantization of Gravity / 2014 arXiv:1409.7977. 100 p.
4. Lapchinsky V.G., Rubakov V.A. Canonical quantization of gravity and quantum field theory in curved space-time. *Acta Physica Polonica*. 1979. V. B10. S. 1041-1048.
5. Kuchař K. Geometrodynamics of Schwarzschild black holes. *Phys. Rev. D*. 1994. V. 50. S. 3961-3981.
6. Louko J., Winters-Hilt S. Hamiltonian thermodynamics of the Reissner-Nordstrom anti-de Sitter black hole. *Phys. Rev. D*. 1996. V. 54. S. 2647-2663.
7. Nakamura K., Konno S., Oshiro Y., Tomimatsu A. Quantum Fluctuations of Black Hole Geometry. *Prog. Theor. Phys.* 1993. V. 90. № 4. S. 861-870.
8. Cavaglia M., Alfaro V., Filippov A.T. Hamiltonian formalism for black holes and quantization. *Int. J. Mod. Phys. D*. 1995. V. 4. S. 661-672.
9. Cavaglia M., Alfaro V., Filippov A.T. Hamiltonian formalism for black holes and quantization II. *Int. J. Mod. Phys. D*. 1996. V. 5. S. 227-250.
10. Bekenstein J.D. The quantum mass spectrum of the Kerr black hole *Lett. Nuovo Cimento*. 1974. V. 11. № 2. S. 467-470.

11. Bekenstein J.D., Mukhanov V.F. Spectroscopy of the quantum black hole. *Phys. Lett. B.* 1995. V. 360. S. 7-12.
12. Barvinsky A., Das S., Kunstatter G. Spectrum of Charged Black Holes – The Big Fix Mechanism Revisited. *Class. Quantum Grav.* 2001. V. 18. S. 4845-4861.
13. Khriplovich I.B. Spectrum of quantized black hole, correspondence principle, and holographic bound. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 2004. V. 126. S. 527-532.
14. Gladush V. D. On the quantization of black holes. *Visnik Dnipropetrovs'kogo universitetu. Seria Fizika, radioelektronika.* 2016. V. 24. Issue 23(2). S. 31–34.
15. Kodama H. Conserved Energy Flux for the Spherically Symmetric System and the Backreaction. *Progr. Theor. Phys.* 1980. V. 63. №4. S. 1217-1228.
16. Гладуш В.Д. Дополнительная симметрия сферически-симметричных конфигураций, законы сохранения и их применение // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2012. № 1. С. 48-59.
17. Frolov V.P., Novikov I.D. *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic, 1998. 770 p.
18. Хокинг С., Эллис Дж. *Крупномасштабная структура пространства-времени.* М.: Мир, 1977. 432 с.
19. Cahill M.E., McVittie G.C. Spherical symmetry and mass-energy in general relativity. I General Theory. *J. Math. Phys.* 1970. V. 11. №. 4. S. 1382-1387.
20. Березин В.А., Кузьми В.А., Ткачев И.И. О глобальной геометрии сферически-симметричной Вселенной // *ЖЭТФ.* 1987. Т. 93. Вып. 4(10). С. 1159-1166.
21. Gowdy R. Action functional of general relativity as a path length. 1. Closed empty universes. *Phys. Rev. D.* 1970. V. 2. S. 2774-2783.
22. Gladush V.D. Quantum model of the charged black hole. *Odessa Astronomical Publications.* 2017. V. 30/2, S. 19-22.
23. Das S., Ramadev P., Yajnik U. A., Sule A. Quantum Mechanical Spectra of Charged Black Holes. *Phys. Lett. B* 565. 2003. S. 201-206.
24. Jalalzadeh S., Vakili B. Quantization of the interior Schwarzschild black hole. *Int. J. Theor. Phys.* 2012. V. 51. S. 263-275.
25. Hájíček P., Kay B.S., Kuchař K. Quantum collapse of a self-gravitating: Equivalence to Coulomb scattering. *Phys. Rev. D.* 1992. V. 46. № 12. S. 5439-5448.
26. Dolgov A.D., Khriplovich I.B. Instructive properties of quantized gravitating dust shell. *Physics Letters B.* 1997. V. 400. № 1-2. S. 12-14.
27. Gladush V.D. The quasi-classical model of the spherical configuration in general relativity. *Int. J. Mod. Phys. D.* 2002. V. 11. № 3. S. 367-389.
28. Vaz C., Witten L. Mass quantization of the Schwarzschild black hole. *Physical Review D.* 1999. V. 60. S. 024009-024009-5

References

1. Peres A. On Cauchy's Problem in General Relativity. *Nuovo Cimento*, 1962, vol. 26, pp. 53-61.
2. Dewitt B.S. Quantum theory of gravity. I. The canonical theory. *Phys. Rev.*, 1967, vol. 160, pp. 1113-1148.
3. Schulz B. Review on the Quantization of Gravity, 2014, arXiv:1409.7977. 100 p.
4. Lapchinsky V.G., Rubakov V.A. Canonical quantization of gravity and quantum field theory in curved space-time. *Acta Physica Polonica*, 1979, vol. B10, pp. 1041-1048.
5. Kuchař K. Geometrodynamics of Schwarzschild black holes. *Phys. Rev. D.*, 1994, vol. 50, pp. 3961-3981.
6. Louko J., Winters-Hilt S. Hamiltonian thermodynamics of the Reissner-Nordstrom anti-de Sitter black hole. *Phys. Rev. D.*, 1996, vol. 54, pp. 2647-2663.
7. Nakamura K., Konno S., Oshiro Y., Tomimatsu A. Quantum Fluctuations of Black Hole Geometry. *Progr. Theor. Phys.*, 1993, vol. 90, no. 4, pp. 861-870.
8. Cavaglia¹ M., Alfaro V., Filippov A.T. Hamiltonian formalism for black holes and quantization. *Int. J. Mod. Phys. D.*, 1995, vol. 4, pp. 661 - 672.

9. Cavaglia¹ M., Alfaro V., Filippov A.T. Hamiltonian formalism for black holes and quantization II. *Int. J. Mod. Phys. D.*, 1996, vol. 5., pp. 227-250.
10. Bekenstein J.D. The quantum mass spectrum of the Kerr black hole. *Lett. Nuovo Cimento.*, 1974, vol. 11, no. 2, pp. 467-470.
11. Bekenstein J.D., Mukhanov V.F. Spectroscopy of the quantum black hole. *Phys. Lett. B.*, 1995, vol. 360, pp. 7-12.
12. Barvinsky A., Das S., Kunstatter G. Spectrum of Charged Black Holes – The Big Fix Mechanism Revisited. *Class. Quantum Grav.*, 2001, vol. 18, pp. 4845-4861.
13. Khriplovich I.B. Spectrum of quantized black hole, correspondence principle, and holographic bound. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 2004, vol. 126, pp. 527-532.
14. Gladush V. D. On the quantization of black holes. *Visnik Dnipropetrovs'kogo universitetu, Seria Fizika, radioelektronika*, 2016, vol. 24, Issue 23(2), pp. 31-34.
15. Kodama H. Conserved Energy Flux for the Spherically Symmetric System and the Backreaction. *Progr. of Theor. Phys.*, 1980, vol. 63, no. 4, pp. 1217-1228.
16. Gladush V.D. Additional symmetry of spherically symmetric configurations, conservation laws and their application. *Space, time and fundamental interactions*, 2012, no. 1, pp. 48-59 (in Russian).
17. Frolov V.P., Novikov I.D. *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic, 1998, 770 p.
18. Hawking, S.W., Ellis, G.F.R. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1973, 391 p.
19. Cahill M.E., McVittie G.C. Spherical symmetry and mass-energy in general relativity. I General Theory. *J. Math. Phys.*, 1970, vol. 11, no. 4, pp. 1382-1387.
20. Berezin V.A., Kuzmin V. A., Tkachev I.I. O globalnoy geometrii sfericheskii-simmetrichnoy Vselennoj [On the global geometry of a spherically symmetric universe], *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 1987, vol. 93, no. 4(19), pp. 1159-1166. (in Russian)
21. Gowdy R. Action functional of general relativity as a path length. 1. Closed empty universes. *Phys. Rev. D*, 1970, vol. 2, pp. 2774-2783.
22. Gladush V.D. Quantum model of the charged black hole. *Odessa Astronomical Publications* 2017, vol. 30/2, pp. 19-22.
23. Das S., Ramadev P., Yajnik U. A., Sule A. Quantum Mechanical Spectra of Charged Black Holes. *Phys. Lett.*, B565, 2003, pp. 201-206.
24. Jalalzadeh S. Vakili B. Quantization of the interior Schwarzschild black hole. *Int. J. Theor. Phys.*, 2012, vol. 51, pp. 263-275.
25. Hájíček P., Kay B.S., Kuchař K. Quantum collapse of a self-gravitating: Equivalence to Coulomb scattering. *Phys. Rev. D.*, 1992, vol. 46, no. 12, pp. 5439-5448.
26. Dolgov A.D., Khriplovich I.B. Instructive properties of quantized gravitating dust shell. *Physics Letters B.*, 1997. vol. 400, no. 1-2. pp. 12-14.
27. Gladush V.D. The quasi-classical model of the spherical configuration in general relativity. *Int. J. Mod. Phys. D.*, 2002, vol. 11, no. 3. pp. 367-389.
28. Vaz C., Witten L. Mass quantization of the Schwarzschild black hole. *Physical Review D*, 1999, vol. 60, pp. 024009-024009-5

Авторы

Гладуш Валентин Данилович, проф., д. ф.-м. н., профессор кафедры теоретической физики, Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, пр. Гагарина, 72, г. Днепр, 49010, Украина.

E-mail: vgladush@gmail.com

Головко Максим Геннадиевич, магистрант, кафедра теоретической физики, Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, пр. Гагарина, 72, г. Днепр, 49010, Украина.

E-mail: dilmendar@gmail.com

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Гладуш В. Д., Головко М. Г. Пространственно-временное и конфигурационное многообразия сферически-симметричной системы гравитационного и электромагнитного полей // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2018. № 2. С. 28–48.

Authors

Gladush Valentin Danilovich, Professor, Doctor of Physics, professor at the Department of Theoretical Physics, Oles Honchar Dnipro National University, Gagarin Ave, 72, Dnepr, 49010, Ukraine.
E-mail: vgladush@gmail.com

Holovko Maksym Hennadiyovich, magistrant, Department of Theoretical Physics, Oles Honchar Dnipro National University, Gagarin Ave, 72, Dnepr, 49010, Ukraine.
E-mail: dilmendar@gmail.com

Please cite this article in English as:

Gladush V. D., Holovko M. H. Space-time and configuration manifolds of a spherically-symmetric system of gravitational and electromagnetic fields. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2018, no. 2, pp. 28–48.