

ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МЕТОДОВ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ НАУКИ

УДК 519.6

© Костиков Ю. А., Павлов В. Ю., Романенков А. М., 2018

ОПТИМИЗАЦИЯ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИКостиков Ю. А.^{a, 1}, Павлов В. Ю.^{a, 2}, Романенков А. М.^{a, 3}^a ФГБОУ ВО Московский Авиационный Институт (Научно-исследовательский университет), 125993, г. Москва, Россия

В данной работе рассматривается задача оптимизации частоты колебаний упругой пластинки, которая полностью погружена в идеальную жидкость. Моделью малых колебаний пластинки в данном случае является интегро-дифференциальное уравнение с соответствующими граничными условиями. Данная задача рассмотрена в качестве модельного примера в книге Баничука Н. В. [5]. Особенностью данной задачи является специальный вид функционального уравнения, которому удовлетворяет функция отклонения пластины от положения равновесия. Благодаря тому, что интегральный оператор является самосопряженным удалось получить необходимые условия экстремума, на основе которых был разработан оригинальный численный алгоритм оптимизации частот колебаний. Поиск решения оптимизационной задачи основан на методе проектирования градиента, этом в работе были получены точные формулы для отыскания проекции градиента.

С использованием метода гидродинамических потенциалов задача о колебании пластины была сведена к задаче о колебании балки. В работе рассматривались разные способы закрепления балки на концах: шарнирное и жесткое. Также был исследован случай при жестких ограничениях, наложенных на толщину пластину. Для всех рассмотренных способах закрепления были проведены численные расчеты, результаты которых представлены на соответствующих графиках.

В работе исследуется задача оптимизации частот упругой пластинки, совершающей колебания в идеальной жидкости. Приводится постановка соответствующей задачи гидроупругости. Методами теории функций комплексного переменного получено решение внешней гидродинамической задачи и определены силы, действующие со стороны жидкости на колеблющуюся пластинку. С помощью идей и методов, предложенных в работах [1, 5], получено интегро-дифференциальное уравнение, описывающее одномерные колебания пластинки в жидкости. Дается формальная математическая постановка и исследование задачи оптимизации. Приводятся численный алгоритм определения оптимальных форм и результаты расчетов на ПК.

Ключевые слова: колебания упругой пластины, метод проектирования градиента.

OPTIMIZATION OF VIBRATION FREQUENCIES OF THE ELASTIC PLATE IN AN IDEAL FLUIDKostikov Yu. A.^{a, 1}, Pavlov V. Y.^{a, 2}, Romanenkov A. M.^{a, 3}^a Moscow Aviation Institute (State University of Aerospace Technologies), 125993, Moscow, Russia

¹E-mail: kostikov@mail.ru²E-mail: v.pavlov@mail.ru³E-mail: romanaleks@gmail.com

In this paper, we consider the problem of optimizing the vibration frequency of the elastic plate, which is completely immersed in the ideal liquid. The model of small oscillations of a plate in this case is an integro-differential equation with the appropriate boundary conditions. This problem is considered as a model example in the book Banichuk N. B. [5]. The peculiarity of this problem is a special kind of functional equation, which satisfies the function of deflection of the plate from the equilibrium position. Due to the fact that the integral operator is self-adjoint, it was possible to obtain the necessary extremum conditions, on the basis of which an original numerical algorithm for optimizing the oscillation frequencies was developed. The search for the solution of the optimization problem is based on the method of gradient design, this work has been obtained exact formulas for finding the projection of the gradient.

Using the method of hydrodynamic potentials the problem of plate oscillation was reduced to the problem of beam oscillation. In work different ways of fixing of a beam on the ends were considered: hinged and rigid. The case of rigid restrictions imposed on the thickness of the plate was also investigated. For all considered methods of fixing numerical calculations which results are presented on the corresponding schedules were carried out.

The paper investigates the problem of optimizing the frequencies of an elastic plate oscillating in an ideal fluid. The formulation of the corresponding problem of hydroelasticity is given. By methods of the theory of functions of complex variable the solution of an external hydrodynamic problem is received and the forces acting from liquid on oscillating plate are defined. With the help of ideas and methods proposed in [1, 5], an integro-differential equation describing one-dimensional oscillations of a plate in a liquid is obtained. A formal mathematical formulation and study of the optimization problem are given. The numerical algorithm for determining the optimal forms and the results of calculations on the PC.

Keywords: vibrations of an elastic plate, the gradient projection.

PACS: 04.50.Kd

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2018.1.82-91

Введение

Данная работа посвящена численному решению экстремальной задачи о поиске минимального собственного числа самосопряженного интегро-дифференциального оператора. Рассмотрим задачу на собственные значения. Необходимо найти нетривиальные решения уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(h^3(x) \frac{d^2 U(x,t)}{dx^2} \right) - \lambda^2 \left(h(x) U(x,t) + \alpha \int_{-1}^1 K(x,t) U(x,t) dt \right) = 0 \quad (1)$$

и соответствующие значения λ^2 , удовлетворяющее граничным условиям:

$$U|_{x=-1} = U|_{x=1} = 0, \quad \left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{x=-1} = \left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{x=1} = 0, \quad (2)$$

где $x \in [-1; 1]$, $0 \leq t \leq 1$, $K(x,t) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{(1-x)(1+t)}{(1-t)(1+x)}}}{1 - \sqrt{\frac{(1-x)(1+t)}{(1-t)(1+x)}}} \right|$, $h(x) \in C^2[-1; 1]$ и на функцию $h(x)$ выставлено дополнительное ограничение:

$$\int_{-1}^1 h(x) dx = P, \quad P > 0, \quad h_{min} \leq h(x) \leq h_{max}. \quad (3)$$

Далее введем функционал:

$$J(h(x)) = \lambda_1^2, \quad (4)$$

где λ_1^2 — первое собственное число задачи (1)–(3). В данной работе описывается численный метод, который позволяет определить такую функцию $h(x)$, что $J(h(x))$ принимает минимальное значение.

Стоит отметить, что уравнение (1) возникает при описании малых колебаний пластинки бесконечной длины и фиксированной ширины в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости.

Плоскость Oxy , в которой происходят колебания пластинки и жидкости, перпендикулярна длинным краям пластинки. Точка $A(x = -l, y = 0)$ и $B(x = l, y = 0)$ на плоскости Oxy соответствуют закрепленным краям. Ширина пластинки равна $2l$ (см. рисунок 1). Предполагается, что толщина пластинки является переменной по координате x , то есть $h = h(x)$, и не меняется в направлении оси z (ось параллельная закрепленным краям пластинки). Обозначая через t время, а через $u = u(x, t)$ и $Q = Q(x, t)$ соответственно функцию прогиба пластинки и реакцию жидкости, можно записать уравнение цилиндрических колебаний пластинки:

$$\rho_1 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = Q, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (5)$$

Здесь D — жесткость пластинки при изгибе, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, ρ_1 — удельная плотность материала пластинки. Для определенности примем следующие граничные условия в точках A и B , соответствующие шарнирному закреплению концов пластинки:

$$u|_A = u|_B = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_B = 0. \quad (6)$$

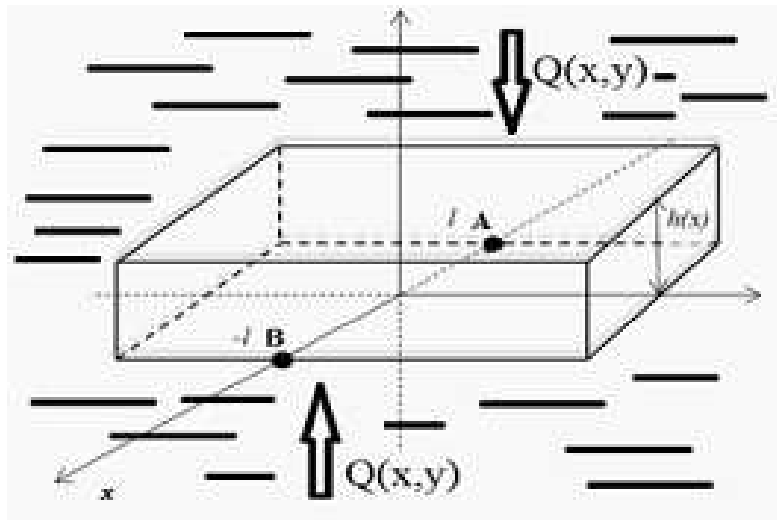


Рис. 1.

Движение жидкости предполагается безвихревым с потенциалом поля скоростей $\varphi = \varphi(x, y, t)$, удовлетворяющим уравнению Лапласа и линеаризованным граничным условиям

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{(x, \varepsilon)} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{(x, -\varepsilon)} = -\frac{\partial u}{\partial t} \quad -l \leq x \leq l, \quad \varepsilon > 0. \quad (8)$$

Граничные условия (8) получены путем сноса на ось x условий непротекания жидкости через поверхность пластинки. При этом используются предположения о малости прогиба u , гладкости функции $h(x)$, а также о безотрывности движений жидкости и пластинки.

Распределение давлений $p = p(x, y, t)$ в жидкости вычисляется с помощью интеграла Коши-Лагранжа

$$p = p_\infty - \rho_2 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \right] \approx p_\infty - \rho_2 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (9)$$

где ρ_2 — плотность жидкости, p_∞ — давление жидкости на бесконечности. При выводе данного соотношения учтен тот факт, что скорость жидкости мала на бесконечности. Соотношение (9) позволяет определить p , если найден потенциал φ . Реакция жидкости $Q(x, t)$, фигурирующая в правой части уравнения колебаний (1), определяется линеаризованной формулой

$$Q = p^- - p^+, \quad (10)$$

где через $p^+ = (p(x, 0, t))^+$ и $p^- = (p(x, 0, t))^-$ обозначены распределения давлений соответственно для верхнего и нижнего берегов разреза $-l \leq x \leq l$, $y = 0$. Определяя Q из соотношений (9), (10) и подставляя найденное выражение в (5), можно преобразовать уравнение колебаний пластинки к виду

$$\rho_1 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^-}{\partial t} \right). \quad (11)$$

Приходим к замкнутой краевой задаче гидроупругости. Гидродинамическая задача (7), (8) об определении потенциала φ и задача (6), (11) о колебаниях пластинки являются связанными, так как в граничные условия (8) входят распределения скоростей колебания пластинки, а в правую часть уравнения (11) — производные потенциала φ .

Решение задачи (6)–(8), (11) будем искать в виде

$$u = e^{i\omega t} U(x), \quad \varphi = i\omega e^{i\omega t} \Phi(x, y). \quad (12)$$

Для удобства анализа и решения задачи перейдем к безразмерным переменным и обозначениям

$$x' = x/l, \quad y' = y/l, \quad U' = U/l, \quad \Phi' = \Phi/l^2, \quad h' = lh/S \quad (13)$$

$$\lambda^2 = 12\rho_1 l^6 (1 - \nu^2) \omega^2 / S^2 E, \quad \alpha = \rho_2 l^2 / \rho_1 S, \quad (14)$$

где S — площадь поперечного сечения пластинки. Штрихи у безразмерных переменных в дальнейшем опускаются.

Подстановка в (12), (13) в (6)–(8), (11) приводит к следующим соотношениям для определения амплитудных функций $U(x)$ и $\Phi(x, y)$.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(h^3 \frac{d^2 U}{dx^2} \right) - \lambda^2 (hU - \alpha (\Phi^+ - \Phi^-)) = 0, \quad (15)$$

$$U|_{x=-1} = U|_{x=1} = 0, \quad \frac{d^2 U}{dx^2} \Big|_{x=-1} = \frac{d^2 U}{dx^2} \Big|_{x=1} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{(x, \varepsilon)} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{(x, -\varepsilon)} = U, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad \varepsilon > 0. \quad (18)$$

Таким образом, путем разделения пространственных и временной переменных исходная задача (6)–(8), (11) сводится к краевой задаче (15), (17) на собственные значения для дифференциального уравнения (15) при граничных условиях (16) и связанной с ней граничной задаче (17), (18) для уравнения Лапласа во внешности разреза $-1 \leq x \leq 1$, $y = 0$.

1. Решение гидродинамической задачи

Определим функцию (потенциал) $\Phi(x, y)$, являющуюся решением краевой задачи (17), (18). С этой целью рассмотрим вспомогательную функцию $W = \Psi + i\Phi$, аналитическую в плоскости с разрезом $-1 \leq x \leq 1$, $y = 0$. Из условий Коши-Римана и граничных условий (18) будем иметь

$$\partial \Psi / \partial x = \partial \Phi / \partial y = U, \quad (19)$$

откуда

$$\Psi = \int_{-1}^x U(\xi)d\xi + C(y) = f(x) + C(y). \quad (20)$$

Задача определения потенциала Φ сводится к отысканию мнимой части аналитической функции W , действительная часть которой на отрезке $[-1, 1]$ равна

$$\operatorname{Re}W = \Psi = f(x) + C(y). \quad (21)$$

Решение данной задачи легко выписывается ($z = x + iy$):

$$W = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 \left(\frac{t+1}{t-1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{f(t) + C}{t-z} dt, \quad (22)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(t) + C}{\sqrt{t^2-1}} dt = 0. \quad (23)$$

Соотношение (23) служит для определения постоянной C .

Учитывая, что

$$-\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = 1, \quad (24)$$

из (23) можно получить

$$C = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}. \quad (25)$$

Используя далее выражение (22) для C и формулу

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \left(\frac{\xi+1}{\xi-1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d\xi}{\xi-z} = \frac{1}{2} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}, \quad (26)$$

выполним следующие преобразования в представлении (22) для W :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 \left(\frac{\xi+1}{\xi-1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z} + \frac{C}{2} \left[1 - \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 f(\xi) \left(\frac{\xi+1}{\xi-1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\xi-z} - \frac{1}{\xi+1} \right) d\xi + \frac{C}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{z^2-1}}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)\sqrt{\xi^2-1}} + \frac{C}{2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Вычислим величину Φ^+ , переходя к пределу в (22) при $z = x + iy \rightarrow x + i0$ ($0 < y \rightarrow +0$) и выделяя в полученном выражении мнимую часть

$$\Phi^+ = \lim_{y \rightarrow +0} [\operatorname{Im} W(x + iy)] = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi} \left(V.p. \int_{-1}^1 \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-x)\sqrt{1-\xi^2}} \right). \quad (28)$$

Для разности потенциалов на верхнем (плюс) и нижнем (минус) берегах разреза имеем

$$\Phi^+ - \Phi^- = 2\Phi^+, \quad (29)$$

Преобразуем интеграл (28), используя определение интеграла в смысле главного значения:

$$\begin{aligned} 2\Phi^+ &= \frac{1}{\pi} \left(V.p. \int_{-1}^1 \left(\frac{1-x^2}{1-t^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)dt}{t-x} \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left[\int_{-1}^{x-\varepsilon} \left(\frac{1-x^2}{1-t^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)dt}{t-x} + \int_{x+\varepsilon}^1 \left(\frac{1-x^2}{1-t^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)dt}{t-x} \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Выполняя далее интегрирование по частям, используя выражение (20) для $f(t)$, обозначая через $K(t, x)$ ядро интеграла, получим

$$2\Phi^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[K(x - \varepsilon, x) \int_{-1}^{x-\varepsilon} U(t) dt - K(x + \varepsilon, x) \int_{-1}^{x+\varepsilon} U(t) dt - \int_{-1}^{x-\varepsilon} K(t, x) U(t) dt - \int_{-1}^{x-\varepsilon} U(t) dt \right]. \quad (31)$$

Стоит отметить, что все выражения в правой части (30) (записанные в квадратных скобках) конечны, и, следовательно, применение интегрирования по частям законно. При $\varepsilon \rightarrow 0$ сумма первых двух членов в (31) обращается в нуль, а два последних интеграла сходятся. Таким образом, искомая зависимость величины скачка потенциалов $\Phi^+ - \Phi^- = 2\Phi^+$ от распределения прогибов пластинки имеет вид

$$2\Phi^+ = - \int_{-1}^1 K(t, x) U(t) dt. \quad (32)$$

Подставляя найденные величины в (15) и в (16), придём к уравнению (1) с граничными условиями (2).

2. Описание метода решения

Обозначим левую часть уравнения (1) через LU и перепишем его в следующем виде: $LU = 0$. Тогда из соотношения $(LU, U) = 0$ и из уравнения (1) можно выразить собственное число

$$\lambda^2 = \frac{\int_{-1}^1 h^3(x) \left(\frac{d^2 U}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_{-1}^1 h(x) U^2(x) dx + \alpha \iint_{[-1;1] \times [-1;1]} K(x, t) U(x) U(t) dx dt}. \quad (33)$$

Получим необходимое условие оптимальности в задаче (1)–(4). Выписывая для этого уравнение Эйлера по h для функционала (33), имеем

$$3h^2 \left(\frac{d^2 U}{dx^2} \right)^2 - \lambda^2 U^2 = c^2, \quad (34)$$

где c^2 - множитель Лагранжа.

При решении подобных задач с применением известных алгоритмов оптимизации требуется на каждом шаге алгоритма определять величины $U(x)$ и λ , удовлетворяющие условиям (2), (3). Для этой цели в данной работе используется метод последовательных приближений.

Для численной реализации этого метода удобнее перейти от уравнения (1) к системе уравнений вида:

$$\begin{cases} h^3 u_{xx} = v \\ v_{xx} = \lambda \left(hu + \alpha \int_{-1}^1 K(t, x) u(t) dt \right) \end{cases} \quad (35)$$

Тогда граничные условия (2) могут быть переписаны в следующем виде:

$$u|_{x=-1} = u_{x=1} = v|_{x=-1} = v|_{x=1} = 0. \quad (36)$$

Согласно методу Чернущко организуем итерационный процесс

$$\begin{cases} h^3 u_{xx}^{(s+1)} = v^{(s+1)} \\ v_{xx}^{(s+1)} = hu^{(s)} + \alpha \int_{-1}^1 K(t, x) u^{(s)}(t) dt \end{cases}; \quad (37)$$

$$\lambda^{(s+1)} = \frac{(v^{(s+1)})_{xx}, u^{(s+1)}}{\left(hu^{(s+1)} + \alpha \int_{-1}^1 K(t, x) u^{(s+1)}(t) dt, u^{(s+1)} \right)}. \quad (38)$$

Итак, возникает следующая задача: определить функции $u(x)$ и $v(x)$ и управляющую функцию $h(x)$, удовлетворяющие уравнениям (37), граничным условиям (36) и ограничениям (3) и также, чтобы первое значение λ из (1) принимало минимальное значение.

Для решения этой задачи применяется метод проектирования градиента. Для реализации этого метода необходимо выразить вариацию оптимизируемого функционала через вариацию управляющей функции $h(x)$:

$$\delta\lambda = \frac{\int_{-1}^1 \left(3\frac{v^2}{h} - \lambda u^2 \right) \delta h dx}{\int_{-1}^1 \left(hu^2 + \alpha u \int_{-1}^1 K(t, x) u dt \right) dx}. \quad (39)$$

Для численного решения задачи вводим разностную сетку $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ с постоянным шагом $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \dots, N - 1$. Функция $h(x)$ аппроксимируется кусочно-постоянной функцией вида:

$$h(x) = h_i \quad \text{при } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad i = 1..N, \quad (40)$$

где h_i — некоторые константы. Тогда оптимизируемый функционал λ становится функцией N переменных, т.е.

$$\lambda = F(h_1, h_2, \dots, h_N). \quad (41)$$

Для оптимизации этой функции применим метод градиентного спуска. Формула (39) позволяет определить производные $\delta\lambda/\delta h_i$, а именно

$$\frac{\delta\lambda}{\delta h_i} = \frac{\frac{3v_i^2}{h_i} - \lambda u_i^2}{\sum_{j=1}^N h_j u_j^2 + \alpha \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N K_{jk} u_j u_k \Delta x}, \quad i = 1..N. \quad (42)$$

Чтобы учесть ограничения (3) применим метод проектирования градиента.

Пусть проекция точки a на гиперплоскость имеет координаты (x_1, x_2, \dots, x_N) . Для нахождения этой точки необходимо решить следующую классическую задачу на условный экстремум

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (x_i - a_i)^2 &\rightarrow \min, \\ \Delta x \sum_{i=1}^N x_i &= P. \end{aligned} \quad (43)$$

Откуда следует, что

$$x_i = -\frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N a_i - \frac{P}{\Delta x} \right) + a_i. \quad (44)$$

Пусть решается задача минимизации фундаментальной частоты. Тогда градиентный метод заключается в построении последовательности $\{h_i\}_{i=0}^N$.

Обозначим

$$\tilde{h}_i^{k+1} = h_i^k - \alpha_k \frac{\partial \lambda}{\partial h_i}, \quad (45)$$

тогда

$$h_i^{k+1} = \tilde{h}_i^{k+1} - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \tilde{h}_i^{k+1} - \frac{P}{\Delta x} \right). \quad (46)$$

Учитывая симметрию задачи относительно точки $x = 0$, будем искать решение на интервале $[0, 1]$, выставив в точке $x = 0$ граничные условия

$$u_x|_{x=0} = v_x|_{x=0} = 0.$$

Как было отмечено выше, задача на собственные значения (в данном случае речь идет о первом собственном значении) решается методом последовательных приближений. Для численного решения используется центральная разностная схема, аппроксимирующая уравнения (35) с последующим применением метода матричной прогонки.

Дискретизированная задача имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_i^3 \left(\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} \right) = v_i \\ \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta x^2} = \lambda^2 \left(h_i u_i + \alpha \sum_{j=0}^N K(t_j, x_i) u_j \Delta x \right) \end{array} \right. , \quad i, j = 1..N. \quad (47)$$

Критерием остановки итерационного процесса является выполнение условия

$$|\lambda^{(s+1)} - \lambda^{(s)}| + \|h^{(s+1)} - h^{(s)}\|_{\infty} < \varepsilon, \text{ где } \varepsilon - \text{требуемая точность.}$$

3. Результаты

Стоит отметить следующий факт, что форма прогиба U и толщина $h(x)$ выглядят идентично для жестко закрепленных краев и для шарнирно закрепленных, поэтому будут представлены графики соответствующих функций для шарнирно закреплённых краев.

Рассмотрим шарнирный способ закрепления. Зададим $\alpha = 0.025$, при этом первое собственное число $\lambda = 1,1379$, получено без управления, а именно, при константной $h(x) = 0.9$. В случае, использования функции толщины, которая вычислена по алгоритму, который предложен в данной работе значение собственного числа $\lambda = 0,9578$, то есть уменьшение произошло чуть более чем на 15%. На рисунке 2 представлена функция прогиба, толщина показана на рисунке 3. Количество итераций, потребовавшееся для $\varepsilon = 0.001$ равно 57.

Для жестко закрепленных краев ситуация аналогичная, только число итераций равно 46.

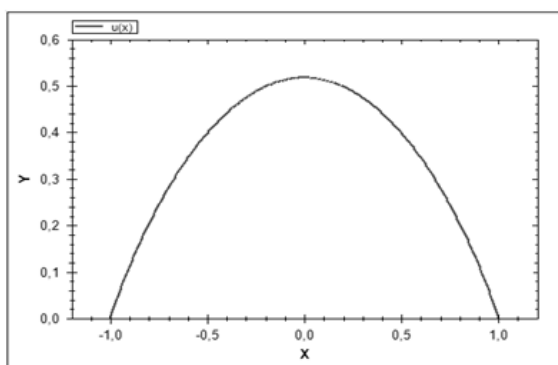


Рис. 2.

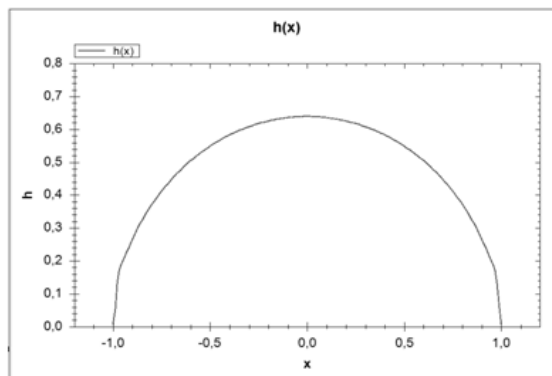


Рис. 3.

4. Заключение

В данной работе разработан и реализован численный алгоритм, оптимизирующий частоты колебаний упругой пластинки в идеальной жидкости.

Установлена самосопряженность ядра интегро-дифференциального уравнения. Получены необходимые условия экстремума, на основе которых был разработан оригинальный численный метод, который основан на проектировании градиента, причем для данной задачи были выведены точные формулы для отыскания проекции градиента.

Были рассмотрены разные способы закрепления балки на концах: шарнирное и жесткое. Также был исследован случай при жестких ограничениях, наложенных на толщину пластину.

Список литературы

1. Баничук Н.В. Оптимизация устойчивости стержня с упругой заделкой // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 4. С. 150-154.
2. Olhoff N. Optimal design of vibrating rectangular plates. *Internet J. Solids and Structures*. 1974, vol.10, № 1.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 736 с.
4. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 236 с.
5. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 256 с.
6. Петров В.М., Черноусько Ф.Л. О равновесии жидкости, ограниченной гибкой пленкой. М.: изв. АН СССР. МТТ, 1971. № 4. С. 131-142.
7. Гурченков А.А., Муравей Л.А., Романенков А.М. Моделирование и оптимизация технологического процесса ионно-лучевого травления // Инженерный журнал: наука и инновации. 2014. № 1.

References

1. Banichuk N.V. Optimizaciya ustojchivosti sterzhnya s uprugoj zadelkoj [Optimization of stability of a rod with elastic sealing]. WPI. USSR ACADEMY OF SCIENCES. MTT, 1974, no. 4, pp. 150-154. (in Russian)
2. Olhoff N. Optimal design of vibrating rectangular plates. *Internet J. Solids and Structures*, 1974, vol.10, no. 1.
3. Lavrentyev M.A., Shabat B.V. Metody teorii funkcij kompleksnogo peremennogo [Methods of the theory of functions of complex variable]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 736 p. (in Russian)
4. Chernous'ko F.L., Banichuk N.V. Variacionnye zadachi mekhaniki i upravleniya [Variational problems of mechanics and control]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 236 p. (in Russian)
5. Banichuk N.V. Optimizaciya form uprugih tel [Optimization of forms of elastic bodies]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 256 p. (in Russian)
6. Petrov V.M., Chernousko F.L. O ravnovesii zhidkosti, ogranichennoj gibkoj plenkoj [On liquid equilibrium bounded by a flexible film]. Moscow, Izv. USSR ACADEMY OF SCIENCES, MTT, 1971. No. 4, pp. 131-142 (in Russian)
7. Gurchenkov A.A., Muravej L.A. Romanenko A.M. Modelirovanie i optimizaciya tekhnologicheskogo processa ionno-lucheвого travleniya [Modeling and optimization of ion-beam etching process]. *Engineering journal: science and innovation*, 2014, vol. 1. (in Russian)

Авторы

Костиков Юрий Александрович, к.ф.-м.н., заведующий кафедрой 812, ФГБОУ ВО Московский Авиационный Институт (Научно-исследовательский университет), А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, дом 4, г. Москва, 125993, Россия.

E-mail: kostikov@mail.ru

Павлов Виталий Юрьевич, к.ф.-м.н., заведующий кафедрой 316, ФГБОУ ВО Московский Авиационный Институт (Научно-исследовательский университет), А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, дом 4, г. Москва, 125993, Россия.

E-mail: v.pavlov@mail.ru

Романенков Александр Михайлович, к.ф.-м.н., доцент кафедры 812, ФГБОУ ВО Московский Авиационный Институт (Научно-исследовательский университет), А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, дом 4, г. Москва, 125993, Россия.

E-mail: romanaleks@gmail.com

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Костиков Ю. А., Павлов В. Ю., Романенков А. М. Оптимизация частот колебаний упругой пластинки в идеальной жидкости // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2018. № 1. С. 82–91.

Authors

Kostikov Yuri Alexandrovich, PhD in Physics, head of Department 812, Moscow Aviation Institute (State University of Aerospace Technologies), A-80, GSP-3, Volokolamskoe shosse, 4, Moscow, 125993, Russia.

E-mail: kostikov@mail.ru

Pavlov Vitaly Yurievich, PhD in Physics, head of Department 316, Moscow Aviation Institute (State University of Aerospace Technologies), A-80, GSP-3, Volokolamskoe shosse, 4, Moscow, 125993, Russia.

E-mail: v.pavlov@mail.ru

Romanenkov Alexander Mikhailovich, PhD in Physics, associate Professor of Department 812, Moscow Aviation Institute (State University of Aerospace Technologies), A-80, GSP-3, Volokolamskoe shosse, 4, Moscow, 125993, Russia.

E-mail: romanaleks@gmail.com

Please cite this article in English as:

Kostikov Yu. A., Pavlov V. Y., Romanenkov A. M. Optimization of vibration frequencies of the elastic plate in an ideal fluid. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2018, no. 1, pp. 82–91.