ГРАВИТАЦИЯ, КОСМОЛОГИЯ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОЛЯ

***

УДК 530.12; 530.51

ЕЩЕ РАЗ О ФРИДМАНА-ПОДОБНОЙ МОДЕЛИ ОТКРЫТОЙ ВСЕЛЕННОЙ С ДАВЛЕНИЕМ

Баранов А. М. [a, 1]

[a] Красноярский государственный педагогический университет им. В.П.Астафьева, 660049, г. Красноярск, Россия

На основе предложенного ранее метода получения точных решений космологических уравнений, исходя из решения Фридмана для открытой Вселенной в записи Фока, продолжено исследование по нахождению фридмана-подобных решений, в частности, отвечающих дискретному набору значений функции состояния, имеющих физическую интерпретацию. Новая переменная, через которую теперь записаны основные уравнения, тесно связана с решением Фридмана для открытой Вселенной, заполненной некогерентной пылью, и даже совпадает с этим решением для конкретного значения используемого в работе параметра. Исследование использует подход, разработанный в предыдущих работах и позволяющий свести моделирование открытой Вселенной, описываемой конформно-плоской метрикой, к задаче о механическом движении частицы в заданном силовом поле. Применение линейной силовой функции с переменным коэффициентом, позволяет найти класс решений, зависящий от параметра, ряд рациональных значений (и одно бесконечное) которого позволяет получить несколько физически интерпретируемых решений с фридмановской асимптотикой. Соответствующие значения функций состояния в начальный «момент» для модели дискретны и совпадают с известными уравнениями состояния среды. Полученные решения вместе с функциями состояния представлены в двух таблицах и трех графиках.

Ключевые слова: конструирование космологических моделей, точные открытые космологические решения, функция состояния, эволюция Вселенной.

ONCE AGAIN ON THE FRIEDMAN-LIKE MODEL OF OPEN UNIVERSE WITH PRESSURE

Baranov A. M. [a, 1]

[a] Krasnoyarsk State Pedagogical University named after V.P.Astaf'ev, 660049, Krasnoyarsk, Russia

In this article there is a development of a new method of finding of exact solutions on the basis of the Friedman solution for the open Universe in the Fock form. This method was proposed in the previous article. Besides this the approach is closely connected with another method which allows to reduce the modelling problem of the open Universe with the conformally flat metric in the Fock form to a problem of mechanical moving of a particle in the given force field. In this case the Einstein equations with an energy-momentum tensor in an approximation of a Pascal perfect fluid are transformed to the equation similar to the second law of Newton for function which is a root of the fourth degree of conformal factor. In this case analog of "force"is proportional to the pressure. This "force"is chosen in the form of the linear law with a variable "stiffness"coefficient which

[1]E-mail: alex_m_bar@mail.ru; baranov@stfi.ru

is inversely to the square of the "displacement". This "displacement"is a new variable here which is connected with the Fiedman solution for the open Universe. When the "force"equals zero, the equation solution is equal to the solution for the Friedman open cosmological model in the Fock form for an incoherent dust. The solution is chosen as a basis function, and an integration constant, generally speaking, coincides with the Friedman constant only for a concrete value of parameter of a model. As the result a family of solutions of cosmological equations is found for discrete values of function of state into the Universe origin (in the sense of new variable) for physically interpreted cases. All found solutions have the Friedman asymptotic. In such cases were constructed two tables with functions of state and conformal factors. In the article the graphs of functions of state and conformal factors were also made in these cases. There is the most low state with equation of state of relativistic strings.

Keywords: construction of cosmological models, exact open cosmological solutions, function of state, the open Universe evolution.

PACS: 04.20.-q; 04.20.Cv
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2018.1.4-12

Введение

При обсуждении моделей открытой Вселенной как правило говорят об эталонной классической модели — открытой модели Фридмана [1]. В предыдущей работе [2] была сделана попытка конструирования открытой фридмана-подобной модели Вселенной на базе эталонного решения Фридмана в записи Фока [3] и анализа ее поведения. Эта модель обладает давлением, исчезающем на галилеевой бесконечности, приводя в асимптотике к открытой модели Фридмана для некогерентной пыли.

В настоящей работе будет продолжено исследование и выявлено существование моделей, которые отвечают дискретным значениям параметра, соответствующего состояниям среды с физически интерпретируемыми уравнениями состояния.

Модельный подход, используемый здесь и заменяющий описание эволюции Вселенной эквивалентной задачей о движении частицы единичной массы в некотором силовом поле, изложен в работах ([4] –[23]). Он позволяет получать космологические модели для открытой Вселенной, как точные решения уравнений тяготения.

1. Краткое описание модели

Запишем $4D$ метрику согласно [2] в виде

$$ds^2 = exp(2\sigma(S))\,\delta_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu, \tag{1}$$

где $exp(2\sigma(S))$ – конформный множитель, который зависит от переменной S, $S^2 = \delta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ и $\delta_{\mu\nu} = diag(1;-1;-1;-1)$ – метрический тензор Минковского; $\mu,\nu = 0,1,2,3$; гравитационная постоянная Ньютона и скорость света равны единице, а эйнштейновская гравитационная постоянная равна $\varkappa = 8\pi$.

По прежнему будем рассматривать среду в приближении идеальной жидкостью с отличным от нуля давлением, записывая тензор энергии-импульса (ТЭИ) в виде

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon\, u_\mu u_\nu + p\, b_{\mu\nu}, \tag{2}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(S)$ – плотность энергии; $p = p(S)$ – давление; $u_\mu = exp(\sigma)S_{,\mu}$ – 4-скорость, удовлетворяющая условию нормировки $u_\mu u^\mu = 1$; $b_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}$ – метрический тензор 3-пространства, который совпадает с 3-проектором, $b_{\mu\nu}u^\nu = 0$.

Далее произведем (1+3)-расщепление уравнений Эйнштейна

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\varkappa T_{\mu\nu} \tag{3}$$

без космологического члена для метрики (1), согласно монадному подходу ([26]– [28]). Здесь $G_{\mu\nu}$ – тензор Эйнштейна; $R_{\mu\nu}$ – тензор Риччи; R – скалярная кривизна.

Такое расщепление фактически есть проецирование уравнений тяготения как на временно-подобное направление $(G_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu})$, задаваемое 4-скоростью u^{μ}, так и на 3-площадку $(G_{\mu\nu}b^{\mu\rho}b^{\nu\lambda})$, определяемую 3-проектором $b_{\mu\nu}$. В результате, после замен $y = exp(\sigma/2)$ и $S = 1/x$ получаем два дифференциальных уравнений

$$y'' = -(1/4)\cdot \varkappa p \cdot y^5/x^4; \tag{4}$$

$$y'(xy' - y) = (1/12)\cdot \varkappa\varepsilon \cdot y^6/x^3, \tag{5}$$

где штрихом обозначена производная по x.

Принимем выражение (5) за определение плотности энергии ε. Тогда уравнение (4) будем рассматривать как аналог уравнения второго закона Ньютона для частицы единичной массы при учете x в качестве новой временной переменной

$$y'' = F^*(x) \tag{6}$$

и некоторой силовой функцией $F^*(x)$, задаваемой правой частью уравнения (4) согласно ([13] – [14], [18]). Это позволяет заменить основную проблему о нахождении функции $\sigma(S)$ (или $y(S)$) задачей об одномерном движении частицы в заданном силовом поле. В упомянутых выше работах этот подход уже был использован при получениии точных открытых космологических моделей.

2. Класс точных решений

Совершенно ясно, что открытая модель Фридмана с $y_F(x) = 1 - A_F x$, заполненная некогерентной пылью, удовлетворяет уравнению (4) при нулевом давлении p : $y''_F = 0$, где величины с индексом F относятся к решению Фридмана. Как мы знаем из [2] для новой переменной $\zeta_F(x) \equiv y_F(x) = 1 - A_F/S$ будет выполняться уравнение $d^2y/d\zeta_F^2(x) = 0$ (A_F - фридмановская постоянная). Кроме того, следуя далее работе [2], возьмем аналоги «потенциальной силы», $F^*(x) = -\partial U/\partial y$, и «потенциальной энергии», $U = k(\zeta)\cdot y^2/2$, с непостоянным коэффициентом жесткости специального вида $k(\zeta) = a/\zeta^2$, вводя, как и ранее, $\zeta(x) = 1 - Ax$ и $y(\zeta) = \zeta^L$, где L–произвольное вещественное число [2]; $0 \le \zeta \le 1$ для $1/A \le x \le 0$ или $A \le S \le \infty$.

Тогда уравнение (4) в форме (6) может быть представлено через переменную ζ как

$$\frac{d^2y}{d\zeta^2} = \frac{L(L-1)}{\zeta^2}y \tag{7}$$

при $a = -A^2L(L-1)$.

Выбор такой зависимости $k(\zeta)$ обусловлен тем, что записанное здесь уравнение (7) имеет своими решениями степенные функции от переменной уравнения ζ (см., например, [24]).

Для того, чтобы выяснить асимптотическую связь конформного множителя $exp(2\sigma) = y^4$ с решением Фридмана для некогерентной пыли, разложим в ряд $y(x)$ вблизи $x = 0$ (или $S = \infty$) и потребуем совпадения с решением Фридмана. В результате получим

$$y(x) = \zeta^L = (1 - Ax)^L \approx 1 - LAx = 1 - A_F x. \tag{8}$$

Следовательно, $LA = A_F$ или $A = A_F/L$, то есть теперь для каждого L имеется своя переменная

$$\zeta_L = (1 - \frac{A_F}{L}x), \tag{9}$$

связанная с физически интерпретируемыми решениями, например, при $L = 1$ получаем совпадение с решением Фридмана $\zeta_1 = \zeta_F \equiv y_F$.

[2] Вообще говоря, показатель степени L может быть целым, дробным, рациональным, положительным и отрицательным, суммой или произведением рациональных чисел, факториалом. Ограничения выбора связаны с физическими требованиями.

Соответственно перепишутся давление (с учетом $x = \dfrac{L}{A_F}(1-\zeta_L)$)

$$\varkappa p_L = -\frac{4}{A_F^2} L^3 (L-1)(1-\zeta_L)^4 \cdot \zeta_L^{-2(2L+1)} \tag{10}$$

и плотность энергии

$$\varkappa \varepsilon_L = \frac{12}{A_F^2} L^3 (L - \zeta_L(L-1)) \cdot (1-\zeta_L)^3 \cdot \zeta_L^{-2(2L+1)}. \tag{11}$$

Для $L = 1$ давление обращается в нуль (некогерентная пыль), а плотность энергии в

$$\varkappa \varepsilon_F = \frac{12 A_F x^3}{(1-A_F x)^6}, \tag{12}$$

что оказывается совпадает с соответствующим выражением для открытой модели Фридмана, приведенной в ([25], с.75) в форме Фока ([3], [25]).

Асимптотические поведения давления и плотности энергии вне зависимости от значения L вблизи точки $\zeta_L = 1$ могут быть записаны как

$$\varkappa p_L \approx \frac{4}{A_F^2} L^3 (L-1)(1-\zeta_L)^4; \tag{13}$$

$$\varkappa \varepsilon_L \approx \frac{12}{A_F^2} L^3 (1-\zeta_L)^3 + \frac{12}{A_F^2} L^3 (5L+1)(1-\zeta_L)^4. \tag{14}$$

3. Функция состояния и физические решения

На основе найденных выражений для давления и плотности энергии нетрудно построить функцию состояния [3], запись которой также будет зависеть от параметра L,

$$\beta_L = \frac{p_L}{\varepsilon_L} = -\frac{1}{3} \frac{(L-1)(1-\zeta_L)}{((1-\zeta_L)\cdot L + \zeta_L)} \tag{15}$$

Данное выражение при $L \to \infty$ имеет предел, равный

$$\beta_\infty = \lim_{L\to\infty} \beta_L = -\frac{1}{3}, \tag{16}$$

а при $L = 1$ функция состояния (14) обращается в нуль, $\beta_0 = 0$ (случай фридмановской открытой модели с $y = \zeta_F$). Что касается случая $L = 0$, то получаем плоское пространство-время ($y = 1$).

Если наложить для каждого L в точке $\zeta_L = 0$ обычное для функции состояния условие $|\beta_L(0)| \leq 1$, то решения (конформные множители), удовлетворяющие этому требованию для рациональных значений L и имеющих физическую интерпретацию, можно свести в Таб.1, где $\beta_L(0)$ также будут рациональными. При этом конформный множитель для состояния $\beta_\infty = -1/3$ есть предел

$$exp(2\sigma(S)) = \lim_{L\to\infty} \left(1 - \frac{A_F}{L\cdot S}\right)^L = exp\left(-\frac{A_F}{S}\right). \tag{17}$$

Таблица 1

L	$\beta_L(\zeta_L = 0)$	**состояние среды**	$exp(2\sigma(S))$
1/4	+1	сверх жесткое	$(1-4A_F/S)$
1/3	+2/3	нерелятивистский вырожденный газ	$1-3A_F/S)^{4/3}$
1/2	+1/3	ультралятивистский газ	$(1-2A_F/S)^2$
1	0	некогерентная пыль	$4(1-A_F/S)^4$
∞	-1/3	релятивистские струны	$exp(-A_F/S)$

[3] В каждый момент времени функция состояния представляет собой уравнение состояния.

Необходимо еще отметить, что из всех приведенных в Таб.1 состояний только три можно отнести к «стандартным космологическим»: $\beta = 1/3,\, 0, -1/3$.

В Таб.2 собраны функции состояния для различных физически интерпретируемых состояний, указанных в Таб.1. На основе этих выражений построены графики, приведенные ниже.

Таблица 2

L	$\beta(\zeta)$	ζ_L	$\beta_L(\zeta_L)$
1/4	$(1-\zeta)/(1+3\zeta)$	$1-4A_F/S$	$(A_F/S)/(1-3A_F/S)$
1/3	$(2/3)(1-\zeta)/(1+2\zeta)$	$1-3A_F/S$	$(2/3)(A_F/S)/(1-2A_F/S)$
1/2	$4(1/3)(1-\zeta)/(1+\zeta)$	$1-2A_F/S$	$(1/3)(A_F/S)/(1-A_F/S)$
1	0	$-A_F/S$	0
∞	$-1/3$	1	$-1/3$

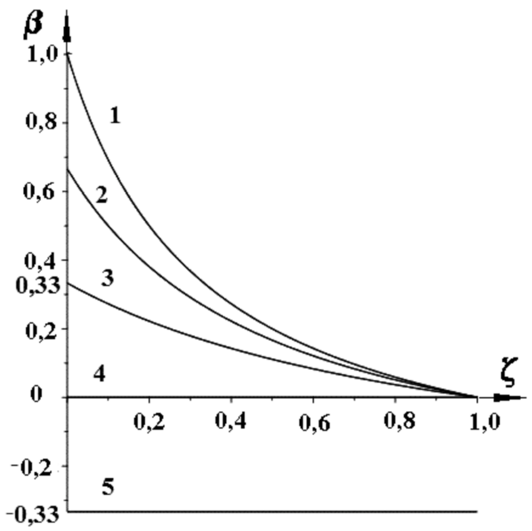

Рис. 1. Семейство графиков поведения функции состояния β как функции от безразмерной переменной $\zeta = 1 - A/S$ для различных значений L, отвечающих физически интерпретируемым состояниям среды: **1** $\leftrightarrow L = 1/4$; **2** $\leftrightarrow L = 1/3$; **3** $\leftrightarrow L = 1/2$; **4** $\leftrightarrow L = 1$; **5** $\leftrightarrow L = \infty$.

4. Заключение

В работе продолжено получение и исследование фридмана-подобных решений. Метод нахождения таких решений на основе решения Фридмана для открытой Вселенной в форме Фока был предложен в предыдущей статье [2]. Кроме того, такой подход тесно связан с другим, который позволяет свести проблему моделирования открытой Вселенной с конформно плоской метрикой к задаче о механическом движении частицы в силовом поле.

В этом случае уравнения Эйнштейна с тензором энергии-импульса в приближении паскалевой идеальной жидкости преобразуются в уравнение, подобное уравнению второго закона Ньютона для функции, которая есть корень четвертой степени из конформного множителя. Аналог «силы» пропорционален давлению. Эта «сила» выбирается в виде линейного закона с переменным «коэффициентом жесткости», который обратно пропорционален квадрату «смещения». Это «смещение» и есть новая переменная, которая связана с решением Фридмана для открытой Вселенной.

Когда «сила» равна нулю, решение уравнения совпадает с решением для открытой модели Фридмана, записанной в форме Фока и заполненной некогерентной пылью. Это решение выбирается в качестве базовой функции, а постоянная интегрирования совпадает с фридмановской константой только для конкретного значения модельного параметра.

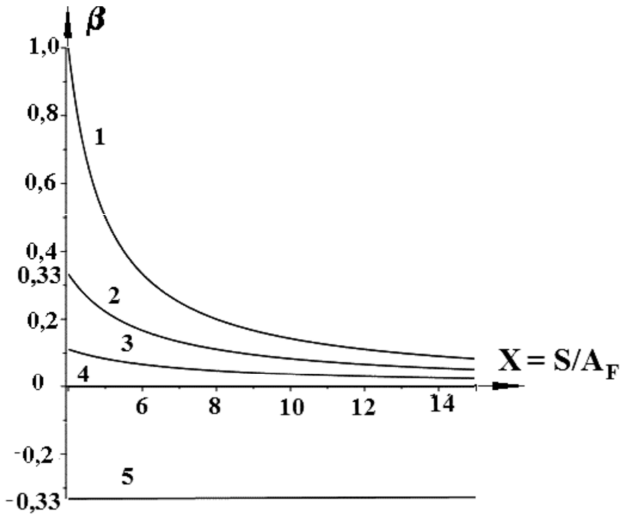

Рис. 2. Семейство графиков поведения функции состояния β как функции от безразмерной переменной $X = S/A_F$, изменяющейся до бесконечности, для различных значений L, отвечающих физически интерпретируемым состояниям среды: $\mathbf{1} \leftrightarrow L = 1/4$; $\mathbf{2} \leftrightarrow L = 1/3$; $\mathbf{3} \leftrightarrow L = 1/2$; $\mathbf{4} \leftrightarrow L = 1$; $\mathbf{5} \leftrightarrow L = \infty$.

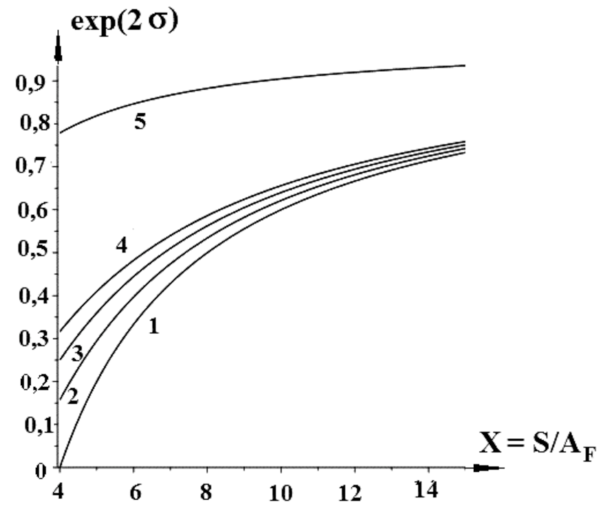

Рис. 3. Семейство графиков поведения конформного множителя $exp(2\sigma)$ как функции от безразмерной переменной $X = S/A_F$, изменяющейся до бесконечности, для различных значений L, отвечающих физически интерпретируемым состояниям среды: $\mathbf{1} \leftrightarrow L = 1/4$; $\mathbf{2} \leftrightarrow L = 1/3$; $\mathbf{3} \leftrightarrow L = 1/2$; $\mathbf{4} \leftrightarrow L = 1$; $\mathbf{5} \leftrightarrow L = \infty$.

Как результат получено семейство решений космологических уравнений для дискретного набора значений функции состояния в начальный момент Вселенной (в смысле новой переменной) для физически интерпретируемых случаев. Все найденные решения имеют фридмановскую асимптотику. Полученные результаты сведены в две таблицы с функциями состояния и конформными множителями. Кроме того, приведены графики функций состояния и конформных множителей. Самым низким состоянием здесь оказывается состояние для релятивистских струн.

Список литературы

1. Фридман А.А. О возможности мира с постоянной отрицательной кривизной // УФН. 1963. Т. 80. Вып. 3. С. 447-452.

2. Баранов А.М. Фридмана-подобная модель с давлением на основе решения Фридмана для открытой

Вселенной // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2017. № 4. С. 26-35.

3. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. 563 с.

4. Баранов А.М., Савельев Е.В. Сферически-симметричное светоподобное излучение и конформно-плоские пространства-времена // Изв.вузов (Физика). 1984. № 7. С. 32-35.

5. Baranov A.M., Saveljev E.V. Spherically symmetric lightlike radiation and conformally flat space-times. *Russ. Phys. J.* 1984; V. 27. № 7. S. 569-572.

6. Баранов А.М., Жабрун И.В., Савельев Е.В. Конформно-плоские открытые космологические модели: описание в классе специальных функций: 1.Функции Бесселя / КрасГУ. Красноярск, 1990. 10 с. Деп. в ВИНИТИ СССР 29.12.1990, № 6483-В90.

7. Баранов А.М., Савельев Е.В. Модель открытой Вселенной с переменным уравнением состояния // Изв.вузов (Физика). 1994. № 1. С. 89-94.

8. Baranov A.M., Saveljev E.V. A model of an open universe with a variable equation of state. *Russ. Phys. J.* 1994. V. 37. № 1. S. 80-84.

9. Баранов А.М., Савельев Е.В. Модели открытых Вселенных с переменным уравнением состояния вблизи сингулярности // Изв.вузов (Физика). 1994. № 7. С. 51-55.

10. Baranov A.M., Saveljev E.V. Models of an open universe with a variable equation of state near a singularity. *Russ. Phys. J.* 1994. V. 37. № 7. S. 640-644.

11. Баранов А.М., Жабрун И.В. Модель открытой Вселенной как осциллятор с диссипацией // Изв.вузов. (Физика). 1994. № 9. С. 104-109.

12. Baranov A.M., Zhabrun I.V. A model of an open universe as an oscillator with losses. *Russ. Phys. J.* 1994. V. 37. № 9. S. 893-897.

13. Баранов А.М., Савельев Е.В. Об одном обобщении решения Фридмана для открытой Вселенной // Основания теории гравитации и космологии: тез.докл. Международн. шк.-семинара (Одесса-95). М., 1995. С. 10.

14. Баранов А.М., Савельев Е.В. Механическое движение материальной точки и эволюция открытой Вселенной // Геометризация физики II: тез. докл. II Международн. конфер. (Казань-95). Казань: КГУ, 1995. С. 11.

15. Баранов А.М., Жабрун И.В., Савельев Е.В. Точное решение для открытой Вселенной с вязкостью // Изв.вузов. Физика. 1995. № 1. С. 79-83.

16. Baranov A.M., Zhabrun I.V., Saveljev E.V. Exact solution for an open universe with viscosity. *Russian Physics Journal.* 1995. V. 38. № 1. S. 68-71.

17. Baranov A.M. Generalization of open universe solution with viscosity // Теоретич. и эксперимент. проблемы гравитации: тез. докл. IX Российской конфер. (Новгород-96). М., 1996. Ч. 2. С. 93.

18. Баранов А.М., Савельев Е.В. Точные решения для конформно-плоской Вселенной. I. Эволюция модели как задача о движении частицы в силовом поле // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2014. № 1. С. 37-46.

19. Баранов А.М., Савельев Е.В. Точные решения для конформно-плоской Вселенной. II. Линейное уравнение состояния и многомерные пространства-времена // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2014. № 2. С. 19-30.

20. Баранов А.М., Савельев Е.В. Точные решения для конформно-плоской Вселенной. III. «Внутреннее» решение // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2014. № 4. С. 59-70.

21. Баранов А.М., Савельев Е.В. Точные решения для конформно-плоской Вселенной. IV. Космологическая модель для «бутылочного» потенциала // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2015. № 3. С. 61-66.

22. Баранов А.М. Эволюция открытой космологической модели с излучением // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2017. № 1. С. 20-29.

23. Баранов А.М. Одно обобщение открытой космологической модели Фридмана при наличии вязкости // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2017. № 3. С. 5-11.

24. Darboux G. Sur une proposition relative aux équations linéaires. *Comptes Rendus Acad. Sci.* 1882. V. 94. S. 1456-1459.

25. Мицкевич Н.В. Физические поля в общей теории относительности. М.: Наука, 1969. 326 с.

26. Зельманов А.Л. Хронометрические инварианты и сопутствующие координаты в общей теории относительности // ДАН СССР. 1956. Т. 107. № 6. С. 815-818.

27. Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982. 256 с.

28. Mitskievich N.V. Relativistic Physics in Arbitrary Reference Frames. New York: Nova Science Publishers, Inc., 2006.

References

1. Friedman A.A. Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes. *Z. Phys.*, 1924, vol. 21, Lief., no. 1, pp. 326-333.

2. Baranov A.M. Friedmanlike model with pressure on the Friedman solution basis for the open Universe. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2017, no. 4, pp. 26-35. (in Russian)

3. Fock V.A. *The Theory of Space, Time and Gravitation.* New York: Pergamon, U.S.A., 1964 (2nd edition).

4. Baranov A.M. Saveljev E.V. Sfericheski-simmetrichnoe svetopodobnoe izluchenie i konformno-ploskie prostranstva-vremena [Spherically symmetric lightlike radiation and conformally flat space-times]. *Izv.vuzov (Fizika)*, 1984, no. 7, pp. 32-35. (in Russian)

5. Baranov A.M., Saveljev E.V. Spherically symmetric lightlike radiation and conformally flat space-times. *Russ. Phys. J.*, 1984, vol. 27, no. 7, pp. 569-572.

6. Baranov A.M., Zhabrun I.V., Saveljev E.V. Konformno-ploskie otkrytye kosmologicheskie modeli: opisanie v klasse special'nyh funkcij: 1.Funkcii Besselja [Conformally flat open cosmological models: description in a class of higher transcendental functions: 1. Bessel functions]. *KrasGU, Krasnojarsk, 1990, 10 s. Dep. v VINITI SSSR 29.12.1990, № 6483-V90* [KrasSU, Krasnoyarsk, 1990. 10 p. Deposited in VINITI USSR 29.12.1990], 1990, no. 6483-B90 (in Russian)

7. Baranov A.M., Saveljev E.V. Model' otkrytoj Vselennoj s peremennym uravneniem sostojanija [A model of an open universe with a variable equation of state]. *Izv. vuz. (Fizika)*, 1994, no. 1, pp. 89-94.

8. Baranov A.M., Saveljev E.V. A model of an open universe with a variable equation of state. *Russ. Phys. J.*, 1994, vol. 37, no. 1, pp. 80-84.

10. Baranov A.M., Saveljev E.V. Models of an open universe with a variable equation of state near a singularity. *Russ. Phys. J.*, 1994, vol. 37, no. 7, pp. 640-644.

11. Baranov A.M., Zhabrun I.V. Model' otkrytoj Vselennoj kak oscilljator s dissipaciej [A model of an open universe as an oscillator with dissipation]. *Izv. vuz. (Fizika)*, 1994, no. 9, pp. 104-109. (in Russian)

12. Baranov A.M., Zhabrun I.V. A model of an open universe as an oscillator with losses. *Russ. Phys. J.*, 1994, vol. 37, no. 9, pp. 893-897.

13. Baranov A.M., Saveljev E.V. Ob odnom obobshhenii reshenija Fridmana dlja otkrytoj Vselennoj [On one generalisation of the Friedman solution for the open Universe]. *Osnovanija teorii gravitacii i kosmologii: tez.dokl. Mezhdunarodn. shk.-seminara (Odessa-95)* [Foundation of Theory Gravitation and Cosmology: Abstracts of Int. School-Seminar (Odessa-95)], Moscow, 1995, p. 10. (in Russian)

14. Baranov A.M., Saveljev E.V. Mehanicheskoe dvizhenie material'noj tochki i jevoljucija otkrytoj Vselennoj [Mechanical motion of a mass point and evolution of the open Universe]. *Geometrizacija fiziki II: tez. dokl. II Mezhdunarodn. konfer. (Kazan'-95)* [Geometrization of Physics II: Abstracts of II Int. Conf. (Kazan-95)], Kazan: KSU, 1995, p. 11. (in Russan)

15. Baranov A.M., Zhabrun I.V., Saveljev E.V. Tochnoe reshenie dlja otkrytoj Vselennoj s vjazkost'ju [Exact solution for an open universe with viscosity]. *Izv. vuz.(Fizika)*, 1995, no. 1, pp. 79-83.

16. Baranov A.M., Zhabrun I.V., Saveljev E.V. Exact solution for an open universe with viscosity. *Russ. Phys. J.*, 1995, vol. 38, no. 1, pp. 68-71.

17. Baranov A.M. Generalization of open universe solution with viscosity. *Teoretich. i jeksperiment. problemy gravitacii: tez. dokl. IX Rossijskoj konfer. (Novgorod-96)* [Theoretical and experimental problems of gravitation: Abstracts of 9-th Russian conference (Novgorod-96)], Moscow, 1996, part 2, p. 93 (in English).

18. Baranov A.M., Saveljev E.V. Exact solutions of the conformally flat Universe. I. The evolution of model as the problem about a particle movement in a force field. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2014, no. 1, pp. 37-46. (in Russian)

19. Baranov A.M., Saveljev E.V. Exact solutions of the conformally flat Universe. II. The linear equation of state and multidimensional space-times. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2014, no. 2, pp. 19-30. (in Russian)

20. Baranov A.M., Saveljev E.V. Exact solutions of the conformally flat Universe. III. The "interior" solution. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2014, no. 4, pp. 59-70. (in Russian)

21. Baranov A.M., Saveljev E.V. Exact solutions of the conformally flat Universe. IV. Cosmological model with the "bottle" potential. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2015, no. 3, pp. 61-66. (in Russian)

22. Baranov A.M. Evolution of the open cosmological model with radiation. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2017, no. 1, pp. 20-29. (in Russian)

23. Baranov A.M. An extension of the Friedman open cosmological model in the presence of viscosity *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2017, no. 3, pp. 5-11. (in Russian)

24. Darboux G. Sur une proposition relative aux équations linéaires. *Comptes Rendus Acad. Sci.*, 1882, vol. 94, pp. 1456-1459.

25. Mitskievich N.V. *Fizicheskie polja v obshhej teorii otnositel'nosti* [Physical fields in general relativity]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 326 p. (in Russian)

26. Zelmanov A.L. Hronometricheskie invarianty i soputstvujushhie koordinaty v obshhej teorii otnositel'nosti [Chronometric Invariants and co-moving coordinates in general relativity]. *DAN SSSR* [DAN USSR], 1956, vol. 107, no. 6, pp. 815-818. (in Russian)

27. Vladimirov Yu.S. *Sistemy otscheta v teorii gravitacii* [Reference Frames in the Gravitation Theory]. Moscow: Energoizdat Publ., 1982. 256 p. (in Russian)

28. Mitskievich N.V. *Relativistic Physics in Arbitrary Reference Frames.* New York: Nova Science Publ., Inc., 2006.

Авторы

Баранов Александр Михайлович, проф., д.ф.-м.н., Красноярский государственный педагогический университет им. В.П.Астафьева (КГПУ), ул. Ады Лебедевой, д. 89, г. Красноярск, 660049, Россия.
E-mail: alex_m_bar@mail.ru; baranov@stfi.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Баранов А. М. Еще раз о фридмана-подобной модели открытой Вселенной с давлением // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2018. № 1. С. 4—12.

Authors

Baranov Alexandre Mikhailovich, Professor, Doctor of Physics, Krasnoyarsk State Pedagogical University named after V.P.Astaf'ev, Ada Lebedeva St., 89, Krasnoyarsk, 660049, Russia.
E-mail: alex_m_bar@mail.ru; baranov@stfi.ru

Please cite this article in English as:
Baranov A. M. Once again on the Friedman-like model of open Universe with pressure. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2018, no. 1, pp. 4–12.