

УДК 5530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

**Ю. Г. Игнатьев<sup>1</sup>**

**КАЧЕСТВЕННЫЙ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
ОСНОВАННЫХ НА АСИММЕТРИЧНОМ СКАЛЯРНОМ ДУБЛЕТЕ:  
КЛАССИЧЕСКОЕ + ФАНТОМНОЕ СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ.  
I. СЛУЧАЙ МИНИМАЛЬНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ:  
КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ**

В статье исследуются на основе качественного и численного анализа космологические модели, основанные на асимметричном скалярном дублете, состоящем из классического и фантомного скалярного полей. Наличие фантомного скалярного поля позволяет рассматривать и классические скалярные поля с притяжением одноименно скалярно заряженных частиц, что существенно расширяет многообразие поведений космологических моделей. Показано, что космологическая модель, основанная на асимметричном скалярном дублете, в случае минимального взаимодействия имеет 9 особых точек, из которых 2 точки являются притягивающими, остальные точки являются неустойчивыми седловыми. Показано, что наличие даже весьма слабого фантомного поля существенно изменяет динамику космологической модели.

**Ключевые слова:** фантомные скалярные поля, скалярное взаимодействие частиц, асимметричный скалярный дублет, космологические модели, качественный анализ, численное моделирование.

**PACS:** 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

*This work was founded by the subsidy allocated to Kazan Federal University for the state assignment in the sphere of scientific activities.*

## 1. Введение

Стандартные космологические модели (СКМ)<sup>2</sup>, основанные на классическом скалярном поле, были исследованы методами качественного анализа динамических систем в работах [2–5, 8] (см. также [6]). В работе Журавлева [4] методами качественной теории динамических систем исследовалась также двухкомпонентная космологическая модель с минимальным взаимодействием (см. также [7])<sup>3</sup>. В статье Автора [9] был заново проведен качественный, а также и численный анализ космологической стандартной космологической модели, основанной на классическом скалярном поле, сведением задачи к исследованию динамической системы на двумерной фазовой плоскости  $\{\Phi, \dot{\Phi}\}$ . При этом был показан микроскопический колебательный характер инвариантного космологического ускорения на поздних стадиях расширения. Далее результаты были обобщены на космологические модели с  $\Lambda$  – членом [10, 11]<sup>4</sup>, причем удалось подтвердить сохранение колебательного характера инвариантного космологического ускорения при достаточно малых значениях величины космологического члена. Кроме того, в последних работах усреднением космологического ускорения по микроскопическим осцилляциям было показана возможность выхода на поздних стадиях ранней Вселенной<sup>5</sup> макроскопического ускорения на нерелятивистский режим. В работе В.М. Журавлева [13] был использован метод исследования, предложенный в указанных работах, и применен к двухкомпонентной системе «скалярное поле+жидкость» с произвольной потенциальной функцией  $V(\phi)$ <sup>6</sup>.

С формальной точки зрения фантомные поля были введены в гравитацию в качестве одной из возможных моделей скалярного поля в 1983 году в работе Автора [14]. В указанной работе, а также и в более

<sup>1</sup>E-mail: [ignatev\\_yu@rambler.ru](mailto:ignatev_yu@rambler.ru)

<sup>2</sup>см., например, [1]

<sup>3</sup>см. также [8]

<sup>4</sup>см. также [12]

<sup>5</sup>то есть, на стадиях с доминированием скалярного поля

<sup>6</sup>В частности, для Хиггсовского потенциала.

поздних (см., например, [15, 16]) фантомные поля классифицировались как скалярные поля с притяжением одноименно заряженных частиц и выделялись множителем  $\epsilon = -1$  в тензоре энергии - импульса скалярного поля. Заметим, что фантомные поля применительно к кротовым норам и так называемым черным вселенным рассматривались в работах [17, 18]<sup>7</sup>. Заметим также, что одиночное классическое скалярное поле с притяжением существовать не может, так как ему соответствует чисто отрицательная полная энергия. Такое поле может существовать, в принципе, лишь в мультиплете с другими полями.

Таким образом, фантомным скалярным полям с притяжением одноименно заряженных частиц соответствует отрицательный кинетический член в тензоре энергии - импульса, а фантомным полям с отталкиванием - положительный кинетический член. Однако, в обоих случаях им соответствуют противоположные знаки кинетического и массивного членов. Это эквивалентно изменению знака массивного члена в уравнении Клейна - Гордона. Соответствующие решения для уединенного скалярного заряда принимают не форму потенциала Юкавы, а форму решений уравнений скалярных возмущений Лифшица для сферической симметрии ( $\sin kr/r$ ) [19].

В последующих работах неминимальная теория скалярного взаимодействия на основе понятия фундаментального скалярного заряда последовательно развивалась, как для классических, так и фантомных скалярных полей [19–22]. В частности, в этих работах были выявлены некоторые особенности фантомных полей, например, особенности межчастичного взаимодействия. Позже эти исследования были углублены для распространения теории скалярных, в том числе, и фантомных полей на сектор отрицательных масс частиц, вырожденные Ферми-системы, конформно-инвариантные взаимодействия и так далее [23–27]. Сконструированные таким образом математические модели скалярных полей были применены к исследованию космологической эволюции систем взаимодействующих частиц и скалярных полей, как классического, так и фантомного типов [28–30]. Эти исследования выявили уникальные особенности космологической эволюции плазмы с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием, такие как существование гигантских всплесков космологического ускорения, наличие плато с постоянным ускорением и другие аномалии, резко отличающие поведение космологических моделей с фантомным скалярным полем от моделей с классическим скалярным полем. В частности, в работах [30] – [32] была проведена классификация типов поведения космологических моделей с межчастичными фантомным скалярным полем и выделены 4 принципиально различные модели. В этих же работах также была указана возможность бозе - конденсации нерелятивистских скалярно заряженных фермионов в условиях сильного роста потенциала скалярного поля и рассмотрения этого конденсата в качестве компонента темной материи. Важно отметить то обстоятельство, что в случае фантомного поля с притяжением в ходе космологической эволюции достижимы значения космологического ускорения большие 1, что соответствует по общепринятой классификации именно фантомному состоянию материи.

Указанные исследования показывают необходимость исследования фантомных скалярных полей в качестве возможной основы космологической модели ранней Вселенной. В работах [35] – [37] был проведен предварительный качественный анализ космологической модели, основанной на фантомном скалярном поле с самодействием. В настоящей работе мы разовьем и детализируем результаты исследований космологических моделей, основанных на классическом и фантомном скалярных полях. В отличие от работ [23] – [29] мы не будем учитывать вклад обычной материи, то есть, будем рассматривать свободные классические и фантомные поля без источника, причем будем исследовать комбинированную систему состоящую из пары скалярных полей, классического и фантомного. В дальнейшем систему, состоящую из двух скалярных полей, классического,  $\Phi$ , и фантомного,  $\phi$ , будем называть *асимметричным скалярным дублетом*. В этой статье мы рассмотрим наиболее простой случай свободных скалярных полей, взаимодействующих между собой лишь посредством гравитации, причем ограничимся, в основном, качественным исследованием такой динамической системы, перенося результаты по численному моделированию, а также по исследованию космологической эволюции асимметричного скалярного дублета с взаимодействующими между собой полями на последующие части работы. Отметим, что даже та-

<sup>7</sup>При этом необходимо отметить тот факт, что понятие «фантомности» в наших работах и цитированных выше несколько отличается, совпадая, по сути, в случае фантомного поля с отталкиванием.

кая упрощенная задача оказывается значительно сложнее рассмотренных в цитируемых выше работах, так как сводится теперь к исследованию четырехмерной динамической системы в отличие от двумерных динамических систем, исследованных ранее. Поэтому в данной статье мы ограничимся классификацией особых точек системы, а также представим некоторые результаты численного моделирования динамической системы вблизи ее нулевой особой точки.

## 2. Основные соотношения космологической модели, основанной на асимметричном скалярном дублете

### 2.1. Уравнения поля

Функцию Лагранжа скалярного дублета, состоящего из классического и фантомного скалярных полей с самодействием в форме Хиггса и с минимальным взаимодействием между собой запишем в виде:

$$L = \frac{\epsilon_1}{8\pi} (g^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} - 2V(\Phi)) + \frac{\epsilon'_1}{8\pi} (g^{ik} \phi_{,i} \phi_{,k} - 2v(\phi)), \quad (1)$$

где

$$V(\Phi) = -\frac{\alpha}{4} \left( \Phi^2 + \frac{m^2}{\alpha} \right)^2; \quad (2)$$

$$v(\phi) = -\frac{\beta}{4} \left( \phi^2 - \frac{\mathbf{m}^2}{\beta} \right)^2 \quad (3)$$

— потенциальная энергия Хиггса<sup>8</sup> соответствующих скалярных полей,  $\alpha$  и  $\beta$  — константы их самодействия,  $m$  и  $\mathbf{m}$  — их массы квантов; для поля с отталкиванием одноименно заряженных частиц  $\epsilon_1, \epsilon'_1 = 1$ , для поля с притяжением одноименно заряженных частиц  $\epsilon_1, \epsilon'_1 = -1$ .

Тензор энергии-импульса скалярного поля относительно функции Лагранжа (1) принимает стандартный вид:

$$T_{ik} = \frac{\epsilon_1}{8\pi} (2\Phi_{,i} \Phi_{,k} - g_{ik} \Phi_{,j} \Phi^{,j} + 2V(\Phi)g_{ik}) + \frac{\epsilon'_1}{8\pi} (2\phi_{,i} \phi_{,k} - g_{ik} \phi_{,j} \phi^{,j} + 2v(\phi)g_{ik}). \quad (4)$$

Вариация функции Лагранжа (1) приводит к уравнениям поля:

$$\square \Phi + V'(\Phi) = 0; \quad (5)$$

$$\square \phi + v'(\phi) = 0. \quad (6)$$

Поскольку к функции Лагранжа можно добавить произвольную постоянную<sup>9</sup>, в дальнейшем мы будем опускать соответствующие постоянные в потенциальных функциях там, где это приводит к упрощениям. Такая перенормировка возвращает нас к исходной функции Лагранжа скалярного поля с самодействием работ [35] — [37], которой мы и будем пользоваться (см. [14]):

$$L = \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left( g^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} - m^2 \Phi^2 + \frac{\alpha}{2} \Phi^4 \right) + \frac{\epsilon'_1}{8\pi} \left( g^{ik} \phi_{,i} \phi_{,k} + \mathbf{m}^2 \phi^2 + \frac{\beta}{2} \phi^4 \right). \quad (7)$$

Тензор энергии — импульса относительно функции Лагранжа (7) равен

$$T_{ik} = \frac{\epsilon_1}{8\pi} (2\Phi_{,i} \Phi_{,k} - g_{ik} \Phi_{,j} \Phi^{,j} + g_{ik} m^2 \Phi^2 - g_{ik} \frac{\alpha}{2} \Phi^4) + \frac{\epsilon'_1}{8\pi} (2\phi_{,i} \phi_{,k} - g_{ik} \phi_{,j} \phi^{,j} - g_{ik} \mathbf{m}^2 \phi^2 - g_{ik} \frac{\beta}{2} \phi^4). \quad (8)$$

Стандартной вариационной процедурой над функцией Лагранжа в форме (7) получим уравнения свободных классического и фантомного полей:

$$\square \Phi + m_*^2 \Phi = 0; \quad (9)$$

$$\square \phi - \mathbf{m}_*^2 \phi = 0, \quad (10)$$

<sup>8</sup>Надо помнить о том, что на самом деле потенциальная энергия скалярного поля согласно (1) равна  $\epsilon_1 V(\Phi)$

<sup>9</sup>что приведет к перенормировке космологической постоянной

где  $m_*$ ,  $\mathbf{m}_c$  – эффективные массы скалярных бозонов

$$m_*^2 = \epsilon_2 m^2 - \alpha \Phi^2; \quad (11)$$

$$\mathbf{m}_*^2 = \epsilon_2 \mathbf{m}^2 + \beta \phi^2, \quad (12)$$

которые, в принципе, могут быть и мнимыми величинами.

Выпишем также уравнения Эйнштейна с космологическим членом<sup>10</sup>

$$R^{ik} - \frac{1}{2} R g^{ik} = \lambda g^{ik} + 8\pi T^{ik}, \quad (13)$$

где  $\lambda \geq 0$  – космологическая постоянная.

## 2.2. Уравнения космологической модели

Выпишем самосогласованную систему уравнений космологической модели (9), (10), (13), основанной на свободном асимметричном скалярном дублете и пространственно - плоской метрики Фридмана

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (14)$$

полагая  $\Phi = \Phi(t)$ ,  $\phi = \phi(t)$ .

В этом случае тензор энергии – импульса (8) имеет структуру тензора энергии – импульса изотропной жидкости с суммарными плотностью энергии  $\varepsilon$  и давлением  $p$ :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_c + \varepsilon_f; \quad p(t) = p_c + p_f : \quad (15)$$

$$\varepsilon_c = \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left( \dot{\Phi}^2 + m^2 \Phi^2 - \frac{\alpha}{2} \Phi^4 \right); \quad p_c = \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left( \dot{\Phi}^2 - m^2 \Phi^2 + \frac{\alpha}{2} \Phi^4 \right); \quad (16)$$

$$\varepsilon_f = \frac{\epsilon'_1}{8\pi} \left( \dot{\phi}^2 - \mathbf{m}^2 \phi^2 - \frac{\beta}{2} \phi^4 \right); \quad p_f = \frac{\epsilon'_1}{8\pi} \left( \dot{\phi}^2 + \mathbf{m}^2 \phi^2 + \frac{\beta}{2} \phi^4 \right), \quad (17)$$

$$(18)$$

где  $\dot{f} \equiv df/dt$ . При этом справедливо соотношение:

$$\varepsilon + p = \frac{\epsilon_1}{4\pi} \dot{\Phi}^2 + \frac{\epsilon'_1}{4\pi} \dot{\phi}^2. \quad (19)$$

Указанная система состоит из одного уравнения Эйнштейна

$$3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \equiv 3H^2 = \epsilon_1 \left( \dot{\Phi}^2 + m^2 \Phi^2 - \frac{\alpha}{2} \Phi^4 \right) + \epsilon'_1 \left( \dot{\phi}^2 - \mathbf{m}^2 \phi^2 - \frac{\beta}{2} \phi^4 \right) + \lambda \quad (20)$$

и двух уравнений скалярного поля:

$$\ddot{\Phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Phi} + m_*^2 \Phi = 0, \quad (21)$$

$$\ddot{\phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} - \mathbf{m}_*^2 \phi = 0. \quad (22)$$

В данной статье мы рассмотрим классическое поле с отталкиванием одноименно скалярно заряженных частиц, полагая  $\epsilon_1 = +1$ . В этом случае система уравнений (20), (21), (22) принимают окончательный вид:

$$3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \dot{\Phi}^2 + m^2 \Phi^2 - \frac{\alpha}{2} \Phi^4 + \epsilon'_1 \left( \dot{\phi}^2 - \mathbf{m}^2 \phi^2 - \frac{\beta}{2} \phi^4 \right) + \lambda, \quad (23)$$

$$\ddot{\Phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Phi} + m^2 \Phi - \alpha \Phi^3 = 0, \quad (24)$$

<sup>10</sup> Мы используем планковскую систему единиц:  $G = c = \hbar = 1$ ; тензор Риччи получается сверткой первого и четвертого индексов  $R_{ik} = R^j_{ikj}$ ; метрика имеет сигнатуру  $(-1, -1, -1, +1)$ .

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - m^2\phi - \beta\phi^3 = 0. \quad (25)$$

В дальнейшем нам также понадобятся значения двух кинематических функций Вселенной Фридмана:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \geq 0; \quad \Omega(t) = \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \equiv 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (26)$$

— постоянная Хаббла  $H(t)$  и инвариантное космологическое ускорение  $\Omega(t)$ , которое является инвариантом и выражается следующим образом с помощью коэффициента баротропии  $\varkappa = p/\varepsilon$ :

$$\Omega = -\frac{1}{2}(1 + 3\varkappa). \quad (27)$$

### 3. Качественный анализ

#### 3.1. Приведение системы уравнений к нормальному виду

Пользуясь тем, что постоянную Хаббла можно выразить из уравнения Эйнштейна (20) через функции  $\Phi, \dot{\Phi}$ , переходя к безразмерному комптоновскому времени:

$$mt = \tau; \quad (m \neq 0) \quad (28)$$

и проводя стандартную замену переменных  $\Phi' = Z(\tau)$ ,  $\phi' = z$ , ( $f' \equiv df/d\tau$ ), приведем уравнение Эйнштейна (20) к безразмерному виду:

$$H_m'^2 = \frac{1}{3} \left[ Z^2 + \Phi^2 - \frac{\alpha_m}{2}\Phi^4 + \epsilon'_1 \left( z^2 - \mu^2\phi^2 - \frac{\beta_m}{2}\phi^4 \right) + \lambda_m \right], \quad (29)$$

а уравнения поля (21), (22) к виду нормальной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в четырехмерном фазовом пространстве  $\mathbb{R}_4 : \{\Phi, Z, \phi, z\}$ :

$$\begin{aligned} \Phi' &= Z; \\ Z' &= -\sqrt{3}Z \sqrt{Z^2 + \Phi^2 - \frac{\alpha_m}{2}\Phi^4 + \epsilon'_1 \left( z^2 - \mu^2\phi^2 - \frac{\beta_m}{2}\phi^4 \right) + \lambda_m - \Phi + \alpha_m\Phi^3}; \\ \phi' &= z; \\ z' &= -\sqrt{3}z \sqrt{Z^2 + \Phi^2 - \frac{\alpha_m}{2}\Phi^4 + \epsilon'_1 \left( z^2 - \mu^2\phi^2 - \frac{\beta_m}{2}\phi^4 \right) + \lambda_m + \phi + \beta_m\phi^3}, \end{aligned} \quad (30)$$

где введены безразмерные параметры:

$$\lambda_m \equiv \frac{\lambda}{m^2}; \quad \alpha_m \equiv \frac{\alpha}{m^2}; \quad \beta_m \equiv \frac{\beta}{m^2}; \quad \mu \equiv \frac{m}{m}.$$

При этом:

$$\frac{a'}{a} \equiv \Lambda' = H_m \equiv \frac{H}{m}; \quad \Omega = \frac{a a''}{a'^2} \equiv 1 + \frac{h'}{h^2}, \quad (31)$$

где

$$\Lambda = \ln a(\tau). \quad (32)$$

Заметим, что в этих обозначениях все величины задачи  $\Phi, Z, H_m, \alpha_m, \beta_m, \mu, \Omega, \tau$  являются безразмерными; время  $\tau$  при этом измеряется в комптоновских масштабах по отношению к классическому скалярному полю.

Таким образом, имеем автономную двумерную динамическую систему в четырехмерном фазовом пространстве  $\mathbb{R}_4 : \{\Phi, Z, \phi, z\}$ . Для приведения ее к стандартным обозначениям качественной теории дифференциальных уравнений (см., например, [38])

$$\frac{dx_i}{d\tau} = F_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n} \quad (33)$$

и упрощения записи примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi &= x; & \phi &= y; & F_1 &\equiv P = Z; & F_3 &\equiv p = z; \\ F_2 &\equiv Q & &= -\sqrt{3}Z\sqrt{Z^2 + x^2 - \frac{\alpha_m}{2}x^4 + \epsilon'_1\left(z^2 - \mu^2y^2 - \frac{\beta_m}{2}y^4\right) + \lambda_m - x + \alpha_mx^3}; \\ F_4 &\equiv q & &= -\sqrt{3}z\sqrt{Z^2 + x^2 - \frac{\alpha_m}{2}x^4 + \epsilon'_1\left(z^2 - \mu^2y^2 - \frac{\beta_m}{2}y^4\right) + \lambda_m + \mu^2y + \beta_my^3}. \end{aligned} \quad (34)$$

Соответствующая нормальная система уравнений в стандартных обозначениях имеет вид:

$$x' = P; \quad Z' = Q; \quad y' = p; \quad z' = q. \quad (35)$$

Для того, чтобы система дифференциальных уравнений (30) (или (35)) имела вещественное решение, необходима неотрицательность выражения под радикалом:

$$Z^2 + x^2 - \frac{\alpha_m}{2}x^4 + \epsilon'_1\left(z^2 - \mu^2y^2 - \frac{\beta_m}{2}y^4\right) + \lambda_m \geq 0. \quad (36)$$

### 3.2. Особые точки динамической системы

Особые точки динамической системы определяются системой алгебраических уравнений (см., например, [38], [39]):

$$M: \quad F_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (37)$$

Поскольку согласно (34), (35) и (37) в особых точках динамической системы всегда

$$Z = 0, \quad z = 0, \quad (38)$$

получим для нахождения решений уравнение:

$$x(1 - \alpha_mx^2) = 0; \quad (39)$$

$$y(1 + \beta_my^2) = 0. \quad (40)$$

1.  $\mathbf{M}_0$ : Таким образом, при любых значениях  $\alpha_m$  и  $\beta_m$  и  $\lambda_m \geq 0$  система алгебраических уравнений (37) всегда имеет тривиальное решение:

$$x = 0; \quad Z = 0; \quad y = 0; \quad z = 0 \Rightarrow M_0 : (0, 0, 0, 0). \quad (41)$$

Подставляя решение (41) в условие (36), получим необходимое условие вещественности решений в особой точке:

$$(36) \rightarrow \lambda_m \geq 0. \quad (42)$$

2.  $\mathbf{M}_{01}, \mathbf{M}_{02}$ : Далее, при любых  $\alpha$  и  $\beta < 0$  – еще два симметричных по  $\phi$ :

$$x = 0; Z = 0; \quad y_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{-\beta_m}}; \quad z = 0 \Rightarrow M_{01}(0, 0, |x_{\pm}|, 0); \quad M_{02}(0, 0, -|x_{\pm}|, 0). \quad (43)$$

Подставляя решения (41) в условие (36), получим необходимое условие вещественности решений в особых точках  $M_{01}, M_{02}$ :

$$(36) \rightarrow \frac{\epsilon'_1}{|\beta_m|} \left( \frac{1}{2} - \mu^2 \right) + \lambda_m \geq 0. \quad (44)$$

3.  $\mathbf{M}_{10}, \mathbf{M}_{20}$ : Далее, при любых  $\beta$  и  $\alpha > 0$  – еще два симметричных по  $\Phi$ :

$$x_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha_m}}; \quad Z = 0; \quad y = 0; \quad z = 0 \Rightarrow M_{10}(|x_{\pm}|, 0, 0, 0); \quad M_{20}(-|x_{\pm}|, 0, 0, 0). \quad (45)$$

Подставляя решения (45) в условие (36), получим необходимое условие вещественности решений в особых точках  $M_{10}, M_{20}$ :

$$(36) \rightarrow \frac{2}{\alpha_m} + 2\lambda_m - 1 \geq 0. \quad (46)$$

4.  $M_{12}, M_{21}, M_{11}, M_{22}$ : Далее, при  $\beta < 0$  и  $\alpha > 0$  – еще четыре симметричных по  $\Phi$  и  $\phi$ :

$$x_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha_m}}; \quad Z = 0; \quad y_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{-\beta_m}}; \quad z = 0 \quad \Rightarrow \quad (47)$$

$$M_{11}(|x_{\pm}|, 0, |y_{\pm}|, 0); \quad M_{12}(|x_{\pm}|, 0, -|y_{\pm}|, 0); \quad (48)$$

$$M_{21}(-|x_{\pm}|, 0, |y_{\pm}|, 0); \quad M_{22}(-|x_{\pm}|, 0, -|y_{\pm}|, 0). \quad (49)$$

Подставляя решения (47) в условие (36), получим необходимое условие вещественности решений в особых точках  $M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}$ :

$$(36) \rightarrow \frac{1}{2\alpha_m} + \frac{e'_1}{|\beta_m|} \left( \frac{1}{2} - \mu^2 \right) + \lambda_m \geq 0. \quad (50)$$

Таким образом, динамическая система (30) имеет 9 особых точек, исследуем их характер. Матрица динамической системы (35),  $A$ , имеет вид при  $Z = z = 0$ :

$$A = \left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial Z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial q}{\partial y} & \frac{\partial q}{\partial z} \end{array} \right\|_{Z=z=0}. \quad (51)$$

Определитель этой матрицы определяется лишь частными производными по динамическим переменным  $x, y$ :

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix}. \quad (52)$$

### 3.3. Характеристическое уравнение и качественный анализ вблизи нулевой особой точки

Вычисляя производные функций (34) в нулевой особой точке (37) при  $\lambda_m \geq 0$ , найдем в этой точке матрицу системы:

$$A_0 \equiv A(M_0) = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3\pi\lambda_m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mu^2 & -\sqrt{3\pi\lambda_m} \end{array} \right\|. \quad (53)$$

Ее определитель равен:

$$\Delta(A_0) = -\mu^2 \leq 0. \quad (54)$$

Таким образом, получаем характеристическое уравнение и его корни  $k_i$

$$A_0 \equiv A(M_0) = \begin{vmatrix} -k & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3\pi\lambda_m} - k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k & 1 \\ 0 & 0 & \mu^2 & -\sqrt{3\pi\lambda_m} - k \end{vmatrix} = 0. \quad (55)$$

Вычисляя, найдем собственные числа:

$$k_1(M_0) = -\xi + \sqrt{\sigma}; \quad k_2(M_0) = -\xi - \sqrt{\sigma}; \quad k_3(M_0) = -\xi + \zeta; \quad k_4(M_0) = -\xi - \zeta; \quad (56)$$

$$\xi^2 \equiv \frac{3\pi\lambda_m}{4} > 0; \quad \zeta^2 \equiv \xi^2 + \mu^2 > \xi^2; \quad \sigma = \xi^2 - 1 < \xi^2. \quad (57)$$

Таким образом,

$$\operatorname{Re}(k_1) < 0; \quad \operatorname{Re}(k_2) < 0; \quad k_3 > 0; \quad k_4 < 0. \quad (58)$$

Поэтому согласно качественной теории динамических систем [38] невырожденная точка  $M0$  является *седловой точкой*, причем все выходящие из этой точки траектории лежат в одномерном многообразии  $W_u^1$ , а все входящие в эту точку траектории при  $\tau \rightarrow +\infty$  входят в эту точку по трехмерному инвариантному многообразию  $W_s^3$ . Вблизи особых точек  $M(x_i^0)$  (37) асимптотические решения системы (33) имеют вид:

$$x_i(\tau) = x_i^0 + \operatorname{Re} \left( \sum_{j=1}^n C_j u_i^j e^{k_j \tau} \right), \quad (59)$$

где  $u_i^j$  — собственный вектор матрицы  $A(M0)$ , соответствующий собственному значению  $k^j$ . Найдем эти векторы:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(M0) &= [1, -\xi + \sqrt{\sigma}, 0, 0]; & \mathbf{u}_2(M0) &= [1, -\xi - \sqrt{\sigma}, 0, 0]; \\ \mathbf{u}_3(M0) &= [0, 0, 1, -\xi + \zeta]; & \mathbf{u}_4(M0) &= [0, 0, 1, -\xi - \zeta]. \end{aligned} \quad (60)$$

Поэтому, фазовые траектории выходят из точки  $M0$  касательно вектору  $\mathbf{u}_3(M0)$ , а входят в эту точку при  $t \rightarrow +\infty$  в касательном трехмерном подпространстве  $V_3(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4)$ . Таким образом, классическое скалярное поле исчезает в этой особой точке.

Заметим, что при достаточно малых значениях космологической постоянной

$$\xi^2 < 1 \Rightarrow \lambda_m < \frac{4}{3\pi} \quad (61)$$

собственные значения  $k_1(M0), k_2(M0)$  (56) становятся комплексно сопряженными с положительными действительными частями. В отсутствие фантомного скалярного поля, когда динамическая система становится двумерной, нулевая точка  $M0$  является притягивающим фокусом для классического поля (при  $\lambda \equiv 0$ ), либо притягивающим центром при  $\lambda > 0$  (см. [9], [10], [11]). Присутствие даже слабого фантомного поля в корне меняет ситуацию, точка  $M0$  становится седловой. Вблизи этой точки фазовые траектории согласно (59) имеют асимптотику:

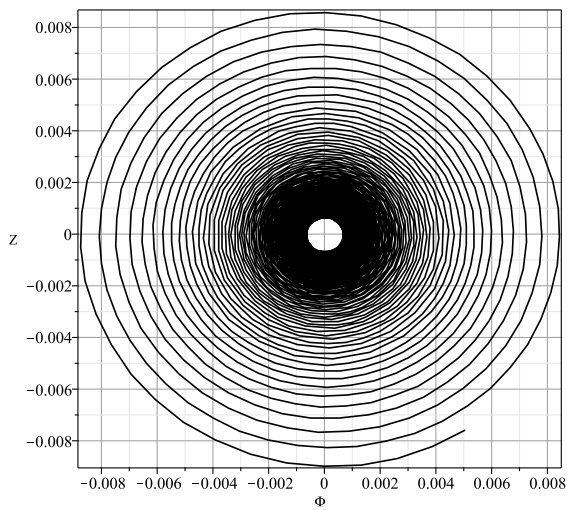
$$x_i(\tau) \sim u_i^j e^{\sqrt{\sigma}\tau \pm ib^2\tau}; \quad (\sigma > 0), \quad (62)$$

то есть, отталкиваются от этой особой точки в колебательном режиме в направлении  $\{\Phi, Z\}$ .

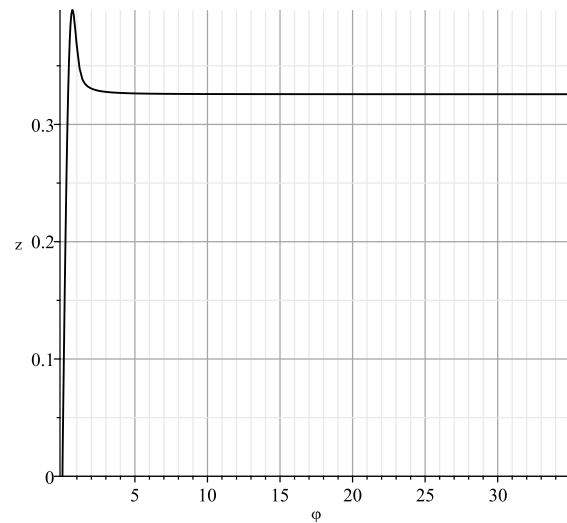
На рисунках (Рис. 1, Рис. 2) показаны проекции фазовых траекторий динамической системы (30) в плоскостях  $\{\Phi, Z\}$  и  $\{\phi, z\}$  для фантомного поля с притяжением в случае, когда одно из из скалярных полей отключено. Результаты в этом случае, как и следует, совпадают с результатами цитированных выше предыдущих работ. Всюду на графиках исследован лишь случай  $\mu = 1$ , то есть,  $\mathbf{m} = m$ .

Однако, при появлении даже очень слабого фантомного поля поведение классического поля вблизи конечной точки  $M0$  радикально меняется, хотя в больших масштабах мало отличается от фазовой траектории одиночного поля (Рис. 7, Рис. 8). Поведение же фантомного поля практически не зависит от классического поля (Рис. 5). На рисунке (Рис. 6) показана трехмерная проекция фазовой траектории этой системы.

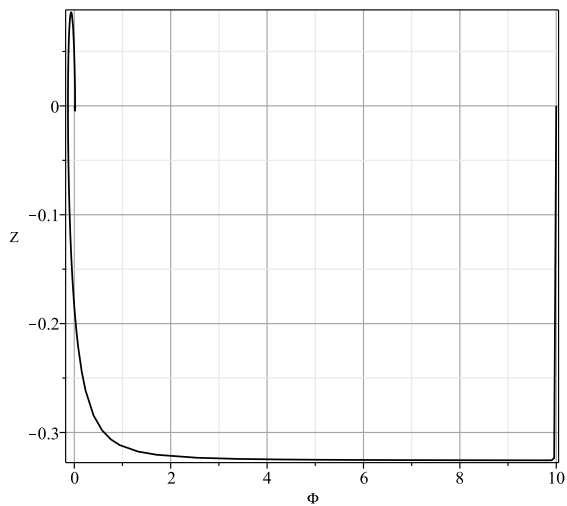




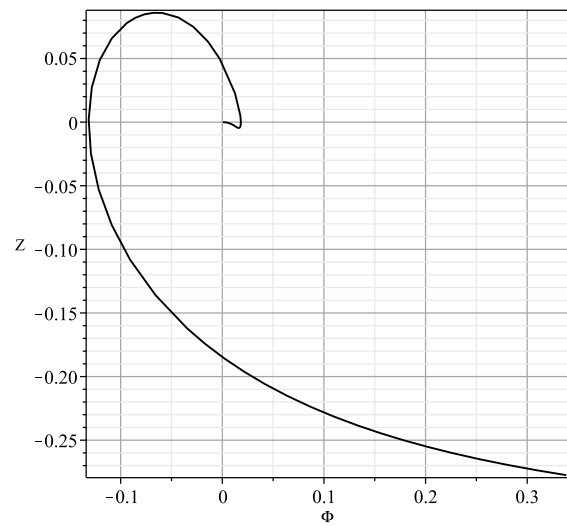
**Рис. 1.** Фазовая траектория динамической системы без самодействия при отсутствии фантомного поля ( $\phi(-10) = 0; z(-10) = 0$ ) в плоскости  $\{\Phi, Z\}$ ;  $\Phi(-10) = 10, Z(-10) = 0; \lambda = 0$ .



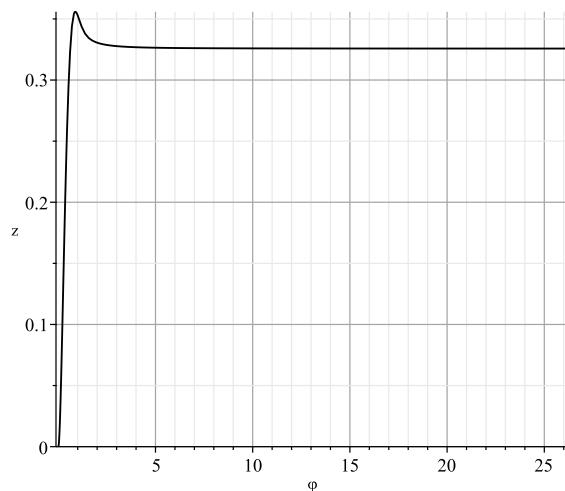
**Рис. 2.** Фазовая траектория динамической системы без самодействия при отсутствии классического поля ( $\Phi(\tau_0) = 0; Z(\tau_0) = 0$ ) в плоскости  $\{\phi, z\}$ ;  $\phi(-10) = 0.01, z(-10) = 0; \lambda = 0, \epsilon_{11} = -1$ .



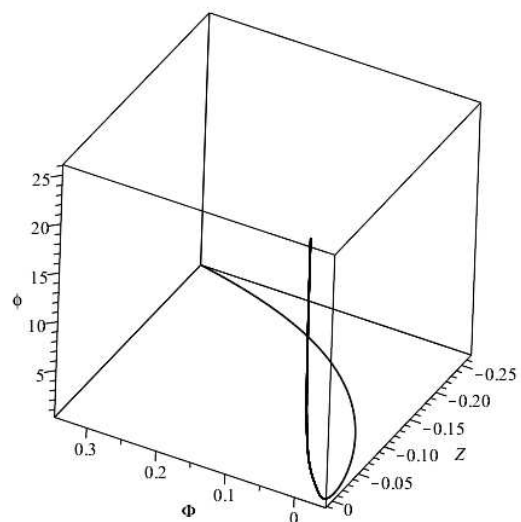
**Рис. 3.** Фазовая траектория динамической системы без самодействия при наличии слабого фантомного поля с притяжением ( $\phi(-10) = 0.01; z(-10) = 0$ ) в плоскости  $\{\Phi, Z\}$ ;  $\Phi(-10) = 10, Z(-10) = 0$  в крупном масштабе;  $\lambda = 0$ .



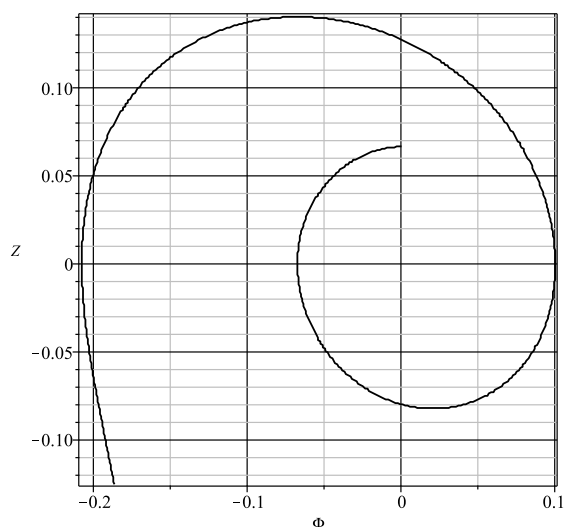
**Рис. 4.** Фазовая траектория динамической системы без самодействия при наличии слабого фантомного поля с притяжением ( $\Phi(\tau_0) = 10; Z(\tau_0) = 0$ ) в плоскости  $\{\Phi, Z\}$  на заключительном этапе;  $\phi(-10) = 0.01, z(-10) = 0; \lambda = 0, \epsilon_{11} = -1$ .



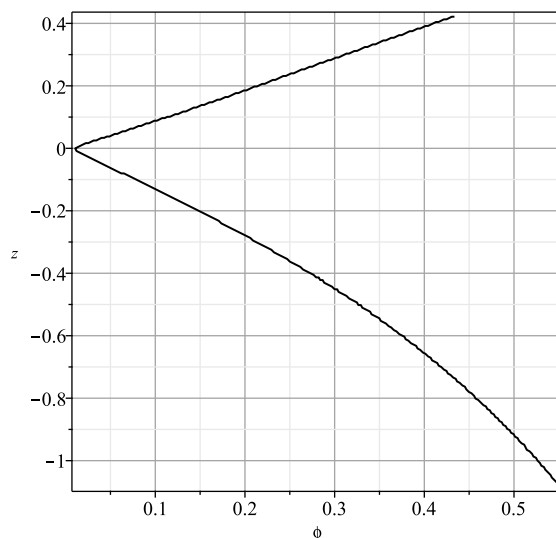
**Рис. 5.** Фазовая траектория динамической системы без самодействия при наличии слабого фантомного поля с притяжением ( $\phi(-10) = 0.01$ ;  $z(-10) = 0$ ) в плоскости  $\{\phi, z\}$ ;  $\Phi(-10) = 10$ ,  $Z(-10) = 0$  в крупном масштабе;  $\lambda = 0$ .



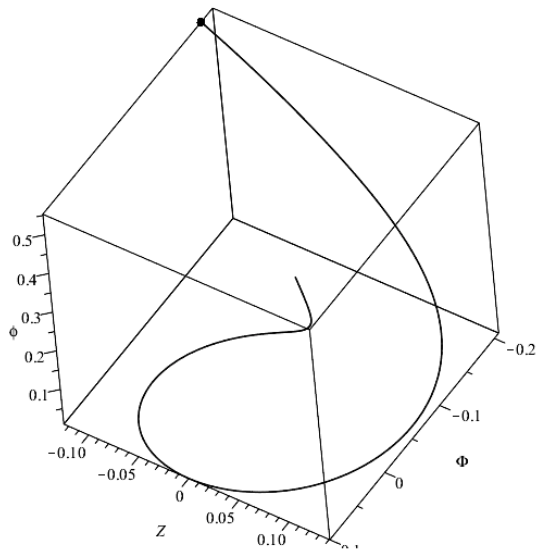
**Рис. 6.** Трехмерная проекция фазовой траектории динамической системы без самодействия классического поля ( $\Phi(-10) = 10$ ;  $Z(-10) = 0$ ;  $\phi(-10) = 0.01$ ;  $z(-10) = 0$ ) в подпространстве  $\{\Phi, Z, \phi\}$ ;  $\lambda = 0$ ,  $\epsilon_{11} = -1$ .



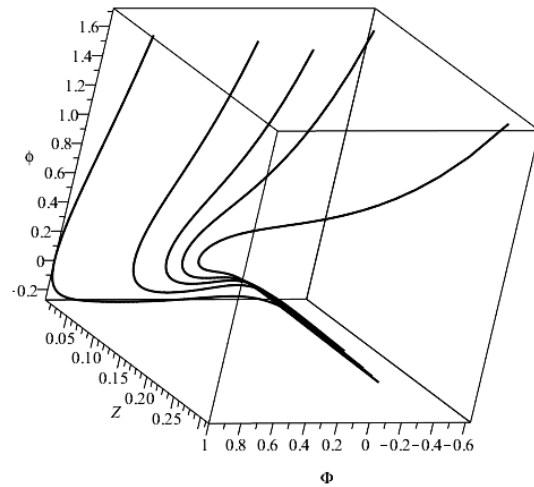
**Рис. 7.** Фазовая траектория динамической системы с самодействием ( $\alpha = 0.1$ ;  $\beta = -0.1$ ) при наличии слабого фантомного поля с отталкиванием ( $\phi(0) = 0.1$ ;  $z(0) = 0$ ) в плоскости  $\{\Phi, Z\}$ ;  $\Phi(0) = 0.1$ ,  $Z(0) = 0$ ;  $\lambda = 0$ ,  $\epsilon_{11} = 1$ .



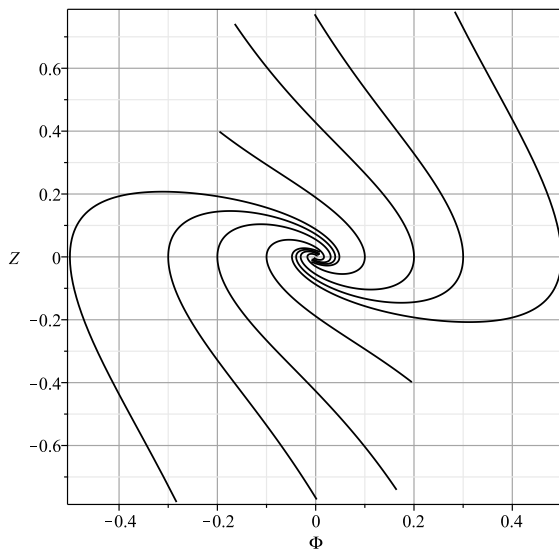
**Рис. 8.** Фазовая траектория динамической системы без самодействия при наличии слабого фантомного поля с отталкиванием ( $\Phi(\tau_0) = 10$ ;  $Z(\tau_0) = 0$ ) в плоскости  $\{\Phi, Z\}$  на заключительном этапе;  $\phi(-10) = 0.01$ ,  $z(-10) = 0$ ;  $\lambda = 0$ ,  $\epsilon_{11} = 1$ .



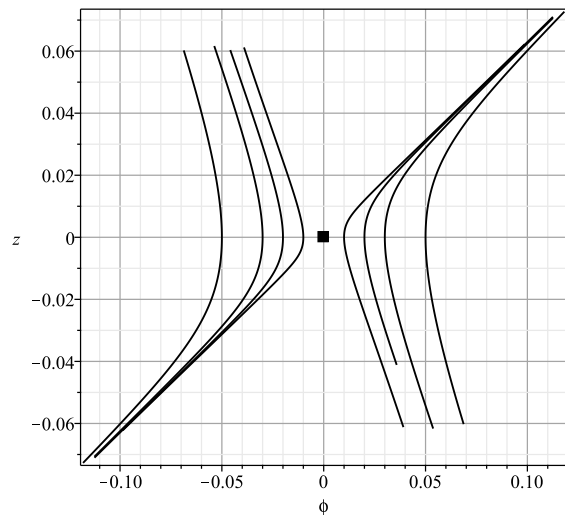
**Рис. 9.** Трехмерная проекция фазовой траектории динамической системы при наличии слабого фантомного поля с отталкиванием ( $\phi(0) = 0.01$ ;  $z(0) = 0$ ) в подпространстве  $\{\Phi, Z, \phi\}$ ;  $\Phi(0) = 0.1$ ,  $Z(0) = 0$ ;  $\alpha = 0.1$ ;  $\beta = -0.1$ ;  $\lambda = 0$ .



**Рис. 10.** Трехмерная проекция фазовой траектории динамической системы при наличии слабого фантомного поля с отталкиванием ( $\phi(0) = 0.1$ ;  $z(0) = 0$ ) в подпространстве  $\{\Phi, Z, \phi\}$ ;  $\Phi(0) = 0.1; 0.2; 0.3; 0.5; 1$ ,  $Z(0) = 0$  в крупном масштабе;  $\lambda = 0$ ;  $\alpha = 0.1$ ;  $\beta = -0.1$ ;  $\epsilon'_1 = 1$ .



**Рис. 11.** Фазовые траектории динамической системы с самодействием при наличии слабого фантомного поля с отталкиванием в плоскости  $\{\Phi, Z\}$ ;  $\lambda = 0.1$ ;  $\alpha = 0.1$ ;  $\beta = -0.1$ ; ( $\Phi(0) = 0.1; 0.2; 0.3; 0.5$ ;  $\Phi(0) = -0.1; -0.2; -0.3; -0.5$ ;  $Z(0) = 0$ ).  $\phi(0) = 0.01$ ;  $z(0) = 0$ .



**Рис. 12.** Фазовые траектории динамической системы с самодействием при наличии слабого фантомного поля с отталкиванием в плоскости  $\{\Phi, Z\}$ ;  $\Phi(0) = 0.1$ ,  $Z(0) = 0$ ;  $\lambda = 0.1$ ;  $\alpha = 0.1$ ;  $\beta = -0.1$ ; ( $\phi(0) = 0.01; 0.02; 0.03; 0.05$ ;  $\phi(0) = -0.01; -0.02; -0.03; -0.05$ ;  $z(0) = 0$ ).

### 3.4. Характеристическое уравнение и качественный анализ вблизи особых точек $M_{01}, M_{02}$

Вычисляя производные функций (34) в точках (43) при  $\lambda_m \geq 0$ , найдем в этих точках матрицу системы:

$$A_{01} \equiv A(M_{01}) = A(M_{02}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2\mu^2 & -2\rho \end{vmatrix}, \quad (63)$$

где

$$\rho = \sqrt{\frac{3\pi}{4} \left( \frac{e'_1 \mu^4}{\beta} + 2\lambda_m \right)}, \quad (64)$$

— вследствие (44) ее определитель больше нуля:

$$\Delta(A_{01}) = 2\mu^2 \geq 0. \quad (65)$$

Таким образом, получаем корни  $k_i$  характеристического уравнения:

$$k_1(M_{01}) = -\rho + \sqrt{\nu}; \quad k_2(M_{01}) = -\rho - \sqrt{\nu}; \quad k_3(M_{01}) = -\rho + \delta; \quad k_4(M_{01}) = -\rho - \delta; \quad (66)$$

$$\delta^2 \equiv \rho^2 - 2\mu^2 < \rho^2; \quad \nu = \rho^2 - 1 < \rho^2. \quad (67)$$

$$\operatorname{Re}(k_1) < 0; \quad \operatorname{Re}(k_2) < 0; \quad k_3 > 0; \quad k_4 < 0. \quad (68)$$

Таким образом, действительные части всех собственных чисел отрицательны, то есть, *точки  $M_{01}, M_{02}$  являются притягивающими точками*. Вблизи этих особых точек асимптотические решения системы (30) в зависимости от знаков  $\nu, \delta$  могут плавно подходить к этим точкам, либо, наматываясь на эти точки.

### 3.5. Характеристическое уравнение и качественный анализ вблизи особых точек $M_{10}, M_{20}$

Вычисляя производные функций (34) в точках (43) при  $\lambda_m \geq 0$ , найдем в этих точках матрицу системы:

$$A_{01} \equiv A(M_{01}) = A(M_{02}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2\mu^2 & -2\chi \end{vmatrix}, \quad (69)$$

где

$$\chi = \sqrt{\frac{3\pi}{4} \sqrt{2\lambda_m - 1 + \frac{2}{\alpha}}}, \quad (70)$$

— вследствие (46) подкоренное выражение больше нуля, определитель матрицы также больше нуля:

$$\Delta(A_{01}) = 2\mu^2 \geq 0. \quad (71)$$

Таким образом, получаем корни  $k_i$  характеристического уравнения:

$$k_1(M_{10}) = -\chi + \sqrt{\omega}; \quad k_2(M_{10}) = -\chi - \sqrt{\omega}; \quad k_3(M_{10}) = -\chi + \sqrt{\eta}; \quad k_4(M_{10}) = -\chi - \sqrt{\eta}; \quad (72)$$

$$\omega \equiv \chi^2 + \mu^2 > \chi^2; \quad \eta = \chi^2 + 2 > \rho^2. \quad (73)$$

Таким образом

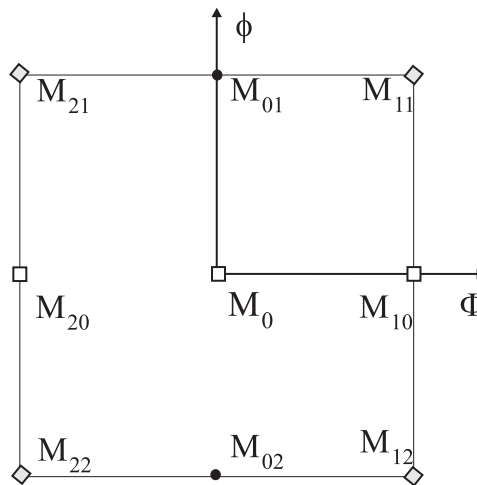
$$k_1 < 0; \quad k_2 < 0; \quad k_3 > 0; \quad k_4 < 0. \quad (74)$$

Таким образом, собственные числа попарно противоположны по знаку, то есть, *точки  $M_{10}, M_{20}$  являются седловыми точками*, причем все выходящие из этой точки траектории лежат в двумерном инвариантном многообразии  $W_u^2$ , а все входящие в эту точку траектории при  $\tau \rightarrow +\infty$  входят в эту точку по двумерному инвариантному многообразию  $W_s^2$ .

### 3.6. Характеристическое уравнение и качественный анализ вблизи особых точек $M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21}$

Аналогично можно показать, что точки  $M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21}$  также, как и точка  $M_0$ , являются *седловыми особыми точками*, причем все выходящие из этих точек траектории лежат в одномерных многообразиях  $W_u^1$ , а все входящие в эти точки траектории при  $\tau \rightarrow +\infty$  входят в эту точки по трехмерному инвариантному многообразию  $W_s^3$ .

На рисунке (Рис. 13) показана качественная картина расположения особых точек динамической системы на плоскости  $\{\Phi, Z\}$ .



**Рис. 13.** Особые точки динамической системы (30) в фазовой плоскости  $Z = z = 0$ . Квадратами отмечены седловые точки с инвариантными многообразиями типа  $W_s^2 \times W_u^2$ , ромбами — седловые точки с инвариантными многообразиями типа  $W_s^3 \times W^3 1_u$ , черными кружками — притягивающие точки.

## 4. Заключение

Таким образом, проведенный анализ показал, во-первых, большое разнообразие поведения космологической системы, основанной на асимметричном скалярном дублете, а, во-вторых, существенное влияние фантомного скалярного поля на динамику классического скалярного поля даже в минимальной модели взаимодействия. В то же время, классическое скалярное поле практически не влияет на динамику фантомного скалярного поля. Это свойство может быть использовано в космологических моделях для регулирования их поведения с помощью малых фантомных полей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Gorbunov D. S., Rubakov V. A. Introduction to the Theory of the Early Universe: Cosmological Perturbations and Inflationary Theory. Singapore: World Scientific, 2011. 504 p.
2. Белинский В.А., Грищук Л.П., Зельдович Я.Б., Халатников И.М. Инфляционные стадии в космологических моделях со скалярным полем // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 346–354;
3. Долгов А.Д., Зельдович Я.Б., Сажин М.В. Космология ранней Вселенной. Москва: МГУ, 1988. 189 с.
4. Журавлев В.М. Двухкомпонентные космологические модели с переменным уравнением состояния вещества и тепловым равновесием компонент // ЖЭТФ. 2001. Т. 120. Вып. 5. С. 1042–1061.
5. Urena-Lopez L.A., Reyes-Ibarra M.J. On the dynamics of a quadratic scalar field potential // arXiv:0709.3996v2 [astro-ph]. 2009. URL: <https://arxiv.org/pdf/0709.3996.pdf>
6. Бронников К.А., Рубин С.Г. Лекции по гравитации и космологии. М.: МИФИ, 2008. 460 с.
7. Zhuravlev V.M., Podymova T.V., Pereskovkov E.A. Cosmological Models with a Specified Trajectory on the Energy Phase Plane // Grav. and Cosmol. 2011. Vol. 17. № 2. P. 101–109.

8. Urena-Lopez L.A Unified description of the dynamics of quintessential scalar fields // arXiv:1108.4712v2 [astro-ph.CO]. 2012. URL: <https://arxiv.org/pdf/1108.4712.pdf>
9. Игнатьев Ю.Г. Стандартная космологическая модель: математический, качественный и численный анализ // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2016. № 3. С. 16–36. URL: <https://arxiv.org/pdf/1609.00745v1.pdf>
10. Игнатьев Ю.Г. Качественный и численный анализ стандартной космологической модели с  $\Lambda$ -членом // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2016. Вып. 3. С. 37–47.
11. Ignat'ev Yu.G. Macroscopic Einstein Equations for a Cosmological Model with  $\lambda$ -term // arXiv:1509.01235v1 [gr-qc]. 2015. URL: <https://arxiv.org/pdf/1509.01235.pdf>.
12. Игнатьев Ю.Г. Классическая космология и темная энергия. Казань: Казанский университет, изд-во АН РТ, 2016. 248 с.
13. Журавлев В.М. Качественный анализ космологических моделей со скалярным полем // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2016. Вып. 4. С. 39–51.
14. Ignat'ev Yu. G. Conservation laws and thermodynamic equilibrium in the general relativistic kinetic theory of inelastically interacting particles // Soviet Physics Journal. 1983. Vol. 26. № 8. P. 1068–1072.
15. Игнатьев Ю.Г., Кузеев Р.Р. Термодинамическое равновесие самогравитирующей плазмы со скалярным взаимодействием // Укр. физ. ж. 1984. Т. 29. № 7. С. 1021–1025.
16. Ignatyev Yu.G., Miftakhov R.F. Statistical systems of particles with scalar interaction in cosmology // Grav. and Cosmol. 2006. Vol. 12. № 2–3. P. 179–185.
17. Bronnikov K.A., Fabris J.C. Regular phantom black holes // Phys. Rev. Lett. 2006. № 96. P. 973–977.
18. Bolokhov S.V., Bronnikov K.A., Skvortsova M.V. Magnetic black universes and wormholes with a phantom scalar // Classical and Quantum Gravity. 2012. Vol. 29. № 24. P. 245006.
19. Игнатьев Ю.Г. Космологическая эволюция плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием. III. Модель с притяжением одноименно заряженных скалярных частиц // Известия Вузов, Физика. 2012. Т. 55. № 11. С. 94–97.
20. Игнатьев Ю.Г. Космологическая эволюция плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием. I. Каноническая формулировка классического скалярного взаимодействия // Известия Вузов, Физика. 2012. Т. 55. № 2. С. 36–40.
21. Игнатьев Ю.Г. Космологическая эволюция плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием. II. Формулировка математической модели // Известия Вузов, Физика. 2012. Т. 55. № 5. С. 71–78.
22. Игнатьев Ю.Г. Неравновесная Вселенная: кинетические модели космологической эволюции. Казань: Казанский университет, 2013. 316 с. URL: [http://www.stfi.ru/archive\\_rus/2013\\_2\\_Ignatiev.pdf](http://www.stfi.ru/archive_rus/2013_2_Ignatiev.pdf)
23. Игнатьев Ю.Г. Неминимальные макроскопические модели скалярного поля, основанные на микроскопической динамике // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2014. № 1. С. 47–69.
24. Ignatyev Yu.G., Ignatyev D.Yu. Statistical system with a fantom scalar interaction in the Gravitation Theory. I. The Microscopic Dynamic // Grav. and Cosmol. 2014. Vol. 20. № 4. P. 299–303.
25. Ignatyev Yu.G., Agathonov A.A., Ignatyev D.Yu. Statistical systems with fantom scalar interaction in Gravitation Theory. II. Macroscopic Equations and Cosmological Models // Grav. and Cosmol. 2014. Vol. 20. № 4. P. 304–308. URL: <https://arxiv.org/pdf/1608.05020v1.pdf>
26. Ignatyev Yu.G. Nonminimal Macroscopic Models of a Scalar Field Based on Microscopic Dynamics: Extension of the Theory to Negative Masses // Grav. and Cosmol. 2015. Vol. 21. № 4. P. 296–308.
27. Ignatyev Yu.G., Agathonov A.A. Numerical Models of Cosmological Evolution of a Degenerate Fermi-System of Scalar Charged Particles // Grav. and Cosmol. 2015. Vol. 21. № 2. P. 105–112.
28. Ignat'ev Yu.G., Mikhailov M.L. Cosmological Evolution of a Boltzmann Plasma with Interparticle Phantom Scalar Interaction. I. Symmetric Cases // Russ. Phys. J. 2015. Vol. 57. P. 1743–1752.
29. Ignat'ev Yu., Agathonov A., Mikhailov M., Ignatyev D. Cosmological evolution of statistical system of scalar charged particles // Astroph. Space Sci. 2015. Vol. 357:61.
30. Игнатьев Ю.Г., Агафонов А.А. Статистические космологические системы почти вырожденных скалярно заряженных фермионов // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2016. Вып. 3. С. 48–90.
31. Ignat'ev Yu., Agathonov A., Ignatyev D. Statistical Cosmological Fermion Systems With Interparticle Fantom Scalar Interaction // arXiv:1608.05020 [gr-qc]. 2016. URL: <https://arxiv.org/pdf/1608.05020.pdf>
32. Ignat'ev Yu.G., Agathonov A.A., Ignatyev D.Yu. Statistical cosmological fermion systems with interparticle phantom scalar interaction // Grav. and Cosmol., 2017, Vol. 23. № 4.

33. Игнатьев Ю. Г. Неравновесные кинетические модели вселенной. I. Условия локального термодинамического равновесия // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2012. Вып. 1. С. 79–98.
34. Игнатьев Ю. Г., Михайлов М. Л. Космологическая эволюция несимметричной бозмановской плазмы с межчастичным классическим скалярным взаимодействием. I. Фазовые переходы: упрощенная модель // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. Вып. 4(13). С. 75–90.
35. Игнатьев Ю.Г. Качественный и численный анализ космологической модели с фантомным скалярным полем // *Известия Вузов, Физика*. 2016. Т. 59. № 12. С. 83–86.
36. Игнатьев Ю.Г., Агафонов А.А. Качественный и численный анализ космологической модели, основанной на фантомном скалярном поле с самодействием // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2016. Вып. 4. С. 52–61.
37. Ignat'ev Yu.G., Agathonov A.A. The Qualitative and Numerical Analysis of the Cosmological Model Based on Phantom Scalar Field with Self // arXiv:1610.04443 [gr-qc]. 2016. URL:<https://arxiv.org/pdf/1610.04443.pdf>
38. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980. 320 с.
39. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Серия “Справочная математическая библиотека”. Вып. 11. М.: Наука, 1989. 489 с.
40. Игнатьев Ю.Г. Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2013. 298 с.

Поступила в редакцию 01.07.2017

**Игнатьев Юрий Геннадьевич**, д. ф.-м. н., профессор, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35А.  
E-mail: [ignat'ev\\_yu@rambler.ru](mailto:ignat'ev_yu@rambler.ru)

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Игнатьев Ю. Г. Качественный и численный анализ космологических моделей основанных на асимметричном скалярном дублете: классическое + фантомное скалярное поле. I. случай минимально взаимодействующих скалярных полей: качественный анализ // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2017. № 2. С. 36–52.

***Yu. G. Ignat'ev***

**Qualitative and numerical analysis of cosmological models based on asymmetrical scalar doublet: classical + phantom scalar field. I. The case of minimally interacting scalar fields: a qualitative analysis**

*Keywords:* phantom scalar fields, scalar interaction of particles, asymmetric scalar doublet, cosmological models, qualitative analysis, numerical simulation.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

In the article, cosmological models based on asymmetric scalar doublets consisting of classical and phantom scalar fields are investigated on the basis of qualitative and numerical analysis. The presence of a phantom scalar field makes it possible to consider classical scalar fields with attraction of the same scalarly charged particles, which significantly expands the variety of behaviors of cosmological models. It is shown, that cosmological the model, based on asymmetric scalar doublet, in the case of low interaction has 9 singular points, of which 2 points are attracting, the rest points are unstable saddle. It is shown that the presence of even very weak phantom field significantly changes the dynamics of the cosmological model.

## REFERENCES

1. Gorbunov D.S., Rubakov V.A. *Introduction to the Theory of the Early Universe: Cosmological Perturbations and Inflationary Theory*, Singapore: World Scientific, 2011.
2. Belinskii V.A., Grishchuk L.P., Zel'dovich Ya.B., Khalatnikov I.M. Inflationary stages in cosmological models with a scalar field, *JETP*, 1985, vol. 62(2), pp. 195–203.
3. Dolgov A.D., Zeldovich Ya.B., Sazhin M.V. *Kosmologiya ranney Vselennoy* (The cosmology of the early Universe), Moscow: Izd. Moscow State University, 1988, 199 p.
4. Zhuravlev V.M. Two-component cosmological models with a variable equation of state of matter and with thermal equilibrium of components, *J. Exp. Theor. Phys.*, 2001, vol. 93, no. 5, pp. 903–919.
5. Urena-Lopez L.A., Reyes-Ibarra M.J. On the dynamics of a quadratic scalar field potential, *arXiv:0709.3996v2 [astro-ph]*, 2009. <https://arxiv.org/pdf/0709.3996.pdf>
6. Bronnikov K.A., Rubin S.G. *Lekcii po gravitacii i kosmologii* (Lectures on Gravitation and Cosmology), Moscow: Izd. MIFI, 2008, 460 p.
7. Zhuravlev V.M., Podymova T.V., Pereskokov E.A. Cosmological Models with a Specified Trajectory on the Energy Phase Plane, *Grav. and Cosmol.*, 2011, vol. 17, no. 2, pp. 101–109.
8. Urena-Lopez L.A. Unified description of the dynamics of quintessential scalar fields, *arXiv:1108.4712v2 [astro-ph.CO]*, 2012. <https://arxiv.org/pdf/1108.4712.pdf>
9. Ignat'ev Yu. The standard cosmological model: mathematical, qualitative and numerical analysis, *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2016, vol. 3, pp. 16–36.
10. Ignat'ev Yu.G. Qualitative and numerical analysis of the standard cosmological model with  $\Lambda$  - term, *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2016, vol. 3, pp. 37–47.
11. Ignat'ev Yu.G. Macroscopic Einstein Equations for a Cosmological Model with  $\lambda$ -term, *arXiv:1509.01235v1 [gr-qc]*, 2015. <https://arxiv.org/pdf/1509.01235.pdf>.
12. Ignat'ev Yu.G. *Klassicheskaya kosmologiya i tyemnaya energiya* (Classical Cosmology and Dark Energy), Kazan: Kazan University, 2016, 248 p.
13. Zhuravlev V.M. Qualitative analysis of cosmological models with scalar fields, *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2016, vol. 4, pp. 39–51.
14. Ignat'ev Yu. G. Conservation laws and thermodynamic equilibrium in the general relativistic kinetic theory of inelastically interacting particles, *Soviet Physics Journal*, 1983, vol. 26, no. 8, pp. 1068–1072.
15. Ignat'ev Yu.G., Kuzeev R.R. The thermodynamic equilibrium of self-gravitating plasma with scalar interaction, *Ukr. Fiz. Zh.*, 1984, vol. 29, pp. 1021–1025.
16. Ignatyev Yu.G., Miftakhov R.F. Statistical systems of particles with scalar interaction in cosmology, *Grav. and Cosmol.*, 2006, vol. 12, no. 2–3, pp. 179–185.
17. Bronnikov K.A., Fabris J.C. Regular phantom black holes, *Phys. Rev. Lett.*, 2006, no. 96, pp. 973–977.
18. Bolokhov S.V., Bronnikov K.A., Skvortsova M.V. Magnetic black universes and wormholes with a phantom scalar, *Classical and Quantum Gravity*, 2012, vol. 29, no. 24, pp. 245006.
19. Ignatyev Yu.G. Cosmological evolution of the plasma with interparticle scalar interaction. III. Model with attraction of like-charged scalar particles, *Russ. Phys. J.*, 2012, vol. 55, no. 11, pp. 1345–1350.
20. Ignat'ev Yu.G. Cosmological evolution of plasma with scalar interparticle interaction. I. Canonical formulation of classical scalar interaction, *Russ. Phys. J.*, 2012, vol. 55, no. 2, pp. 166–172.
21. Ignatiev Yu.G. Cosmological evolution of the degenerated plasma with interparticle scalar interaction. II. Formulation of mathematical model, *Russ. Phys. J.*, 2012, vol. 55, no. 5, pp. 550–560.
22. Ignat'ev Yu.G. *Neravnovesnaya Vselennaya: kineticheskie modeli kosmologicheskoi evolucii* (Nonequilibrium universe: kinetic models of cosmological evolution), Kazan: Kazan University, 2013, 316 p.
23. Ignat'ev Yu.G. Nonminimal macroscopic models of a scalar field based on microscopic dynamics, *Space, Time and Found. Interact.*, 2014, no. 1, pp. 47–69.
24. Ignatyev Yu.G., Ignatyev D.Yu. Statistical system with a phantom scalar interaction in the Gravitation Theory. I. The Microscopic Dynamic, *Grav. and Cosmol.*, 2014, vol. 20, no. 4, pp. 299–303.
25. Ignatyev Yu.G., Agathonov A.A., Ignatyev D.Yu. Statistical systems with phantom scalar interaction in Gravitation Theory. II. Macroscopic Equations and Cosmological Models, *Grav. and Cosmol.*, 2014, vol. 20, no. 4, pp. 304–308. <https://arxiv.org/pdf/1608.05020v1.pdf>



26. Ignatyev Yu.G. Nonminimal Macroscopic Models of a Scalar Field Based on Microscopic Dynamics: Extension of the Theory to Negative Masses, *Grav. and Cosmol.*, 2015, vol. 21, no. 4, pp. 296–308.
27. Ignatyev Yu.G., Agathonov A.A. Numerical Models of Cosmological Evolution of a Degenerate Fermi-System of Scalar Charged Particles, *Grav. and Cosmol.*, 2015, vol. 21, no. 2, pp. 105–112.
28. Ignat'ev Yu.G., Mikhailov M.L. Cosmological Evolution of a Boltzmann Plasma with Interparticle Phantom Scalar Interaction. I. Symmetric Cases, *Russ. Phys. J.*, 2015, vol. 57, pp. 1743–1752.
29. Ignat'ev Yu., Agathonov A., Mikhailov M., Ignatyev D. Cosmological evolution of statistical system of scalar charged particles, *Astroph. Space Sci.*, 2015, vol. 357:61.
30. Ignat'ev Yu.G., Agathonov A.A. Statistical Cosmological Fermion Systems With Interparticle Fantom Scalar Interaction, *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2016, vol. 3, pp. 48–90.
31. Ignat'ev Yu., Agathonov A., Ignatyev D. Statistical Cosmological Fermion Systems With Interparticle Fantom Scalar Interaction, *arXiv:1608.05020 [gr-qc]*. 2016. <https://arxiv.org/pdf/1608.05020.pdf>
32. Ignat'ev Yu.G., Agathonov A.A., Ignatyev D.Yu. Statistical cosmological fermion systems with interparticle phantom scalar interaction, *Grav. and Cosmol.*, 2017, vol. 23, no. 4.
33. Ignat'ev Yu. G. Nonequilibrium Kinetics Universe Models. I. Local Thermodynamics Conditions, *Space, Time and Fund. Interact.*, 2012, issue 1, pp. 79–98.
34. Ignat'ev Yu.G., Mikhailov M.L. The cosmological evolution of asymmetric Boltzmann plasma interparticle classical scalar interaction. I. Phase transitions: a simplified model, *Space, Time and Fund. Interact.*, 2015, issue 4(13), pp. 75–90.
35. Ignat'ev Yu.G. Qualitative and numerical analysis of the cosmological models based on the phantom scalar interaction, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Fizika*, 2016, vol. 59, no. 12, pp. 83–86.
36. Ignat'ev Yu.G., Agathonov A.A. The qualitative and numerical analysis of the cosmological model based on phantom scalar field with self interaction, *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2016, vol. 4, pp. 52–61.
37. Ignat'ev Yu.G., Agathonov A.A. The Qualitative and Numerical Analysis of the Cosmological Model Based on Phantom Scalar Field with Self, *arXiv:1610.04443 [gr-qc]*, 2016. <https://arxiv.org/pdf/1610.04443.pdf>
38. Bogoyavlensky O.I. *Metody kachestvennoi teorii dinamicheskikh sistem v astrofizike i gazovoi dinamike* (Methods of the qualitative theory of dynamical systems in astrophysics and gas dynamics), Moscow: Nauka, 1980, 320 p.
39. Bautin N.N., Leontovich E.A. *Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti. Vyp. 11* (Methods and techniques of the qualitative study of dynamical systems on the plane. Vol. 11), Moscow: Nauka, 1989, 489 p.
40. Ignatyev Yu.G. *Matematicheskoe modelirovanie fundamental'nykh objektov i yavlenij v sisteme komp'yuternoj matematiki Maple. Lekcii dlya shkoly po matematicheskomu modelirovaniyu* (Mathematical modeling of fundamental objects and phenomena in system of computer mathematics Maple. Lectures for school on mathematical modeling), Kazan: Kazan University, 2013, 298 p.

Received 01.07.2017

**Ignat'ev Yuri Gennadievich**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 35A, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: [ignat'ev\\_yu@rambler.ru](mailto:ignat'ev_yu@rambler.ru)

**Please cite this article in English as:**

Ignat'ev Yu. G. Qualitative and numerical analysis of cosmological models based on asymmetrical scalar doublet: classical + phantom scalar field. I. The case of minimally interacting scalar fields: a qualitative analysis, *Space, Time and Fund. Interact.*, 2017, no. 2, pp. 36–52.