УДК 517.9, 519.6

Э. В. Чеботарева[1]

АВТОМАТИЗИРОВАННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СВЕРТОК В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ С НОСИТЕЛЯМИ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ПОЛУОСИ

Пусть $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$ — пространство обобщенных функций с носителями из $[0,\infty]$. В сверточной алгебре $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$ рассматривается класс уравнений сверток вида

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D^k \left[f(t)\delta^{(r)}(t) \right] * U = W,$$

где $a_k \in \mathbb{C} | a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{C}, \forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $D = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования в смысле обобщенных функций, $\delta(t)$ — мера Дирака, W — заданная обобщенная функция из пространства $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$, U — неизвестная обобщенная функция из $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$. Доказывается существование и единственность решения данного класса уравнений сверток. Предлагается метод автоматизации решения с помощью системы компьютерной математики Maple.

Ключевые слова: уравнение сверток, сверточная алгебра, элементарное решение обыкновенного дифференциального оператора, обобщенные функции, система компьютерной математики Maple.

PACS: 02.30.Hq

Введение

Уравнения сверток находят широкое применение при решении дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений [1-4]. Также уравнения сверток встречаются при решении проблем идентификации систем.

При решении уравнений сверток, как правило, применяются интегральные преобразования, такие как преобразование Фурье, преобразование Карлемана-Фурье, преобразование Фурье-Лапласа [5-8]. Так, например, при решении уравнений сверток в пространстве обобщенных функций медленного роста используется метод преобразования Фурье. Однако метод преобразования Фурье не работает в пространстве $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$ — пространстве обобщенных функций с носителями из $[0,\infty]$, которое является сверточной алгеброй [1, 2].

Данная работа посвящена исследованию класса уравнений сверток в сверточной алгебре $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$.

1. Уравнение сверток в сверточной алгебре $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$

Рассмотрим уравнение вида

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D^k \left[e^{pt}\delta^{(r)}(t) \right] * U = W, \tag{1.1}$$

где $a_k \in \mathbb{C} | a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{C}, \forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $D = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования в смысле обобщенных функций, $\delta(t)$ — мера Дирака, W — заданная обобщенная функция из пространства $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$, U — искомая обобщенная функция из $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$.

Сформулируем и докажем следующее вспомогательное утверждение, которое понадобится нам для решения уравнения (1.1).

Утверждение 1. Для любых $p \in \mathbb{C}$ и $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ справедлива формула

$$e^{pt}\delta^{(r)} = \left(D - p\right)^{(r)} \delta(t), \tag{1.2}$$

где $\delta(t)$ — мера Дирака.

[1]E-mail: chebotareva.elv@gmail.com

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства применим метод математической индукции.

Покажем сначала, что формула (1.2) справедлива при $r = 1$. Действительно,

$$\left(e^{pt}\delta(t)\right)' = pe^{pt}\delta(t) + e^{pt}\delta'(t).$$

Отсюда

$$e^{pt}\delta'(t) = \left(e^{pt}\delta(t)\right)' - pe^{pt}\delta(t) = \delta'(t) - p\delta(t)$$

или

$$e^{pt}\delta'(t) = \left(D-p\right)\delta(t).$$

Допустим, что

$$e^{pt}\delta^{(r-1)} = \left(D-p\right)^{(r-1)}\delta(t). \tag{1.3}$$

Тогда

$$\left(e^{pt}\delta^{(r-1)}(t)\right)' = pe^{pt}\delta^{(r-1)}(t) + e^{pt}\delta^{(r)}(t)$$

и

$$e^{pt}\delta^{(r)}(t) = \left(e^{pt}\delta^{(r-1)}(t)\right)' - pe^{pt}\delta^{(r-1)}(t). \tag{1.4}$$

С учетом предположения (1.3) получим

$$e^{pt}\delta^{(r)}(t) = D\left(D-p\right)^{(r-1)}\delta(t) - p\left(D-p\right)^{(r-1)}\delta(t) = \left(D-p\right)^{(r)}\delta(t),$$

что и требовалось доказать. □

Применяя формулу (1.2), уравнение (1.1) можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D^k \left(D-p\right)^{(r)}\delta(t) * U = W. \tag{1.5}$$

В силу свойств свертки [1] уравнение (1.5) эквивалентно уравнению

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D^k V = W, \tag{1.6}$$

где

$$V = \left(D-p\right)^{(r)} U, \tag{1.7}$$

отметим, что $V \in \mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$.

Поскольку оператор $P(D) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k D^k$ — обыкновенный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то в $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$ он обладает единственным элементарным решением.

Пусть E —элементарное решение оператора $P(D) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k D^k$, тогда у уравнения (1.6) существует единственное решение V, которое выражается формулой

$$V = E * W.$$

Тогда из (1.7) следует, что в $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$ существует единственное решение уравнения (1.1), и его можно представить в виде

$$U = \mathscr{E}_r * V, \tag{1.8}$$

где $\mathscr{E}_r$ — элементарное решение оператора $(D-p)^r$, $\mathscr{E}_r \in \mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$.

Поскольку элементарное решение оператора $(D-p)^r$ имеет вид

$$\mathscr{E}_r = Y(t)\frac{e^{pt}t^{r-1}}{(r-1)!},$$

здесь $Y(t)$ — функция Хевисайда, то окончательно имеем

$$U = Y(t)\frac{e^{pt}t^{r-1}}{(r-1)!} * E * W, \tag{1.9}$$

где E — элементарное решение оператора $P(D)$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. У уравнения сверток (1.1) в $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$ существует единственное решение, которое имеет вид (1.9).

Используя приведенный выше метод, можно получить решение уравнения сверток и более общего вида:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D^k \left[\circledast_{j=1}^{q} e^{p_j t} \delta^{(r_j)}(t) \right] * U = W, \tag{1.10}$$

здесь $\circledast_{j=1}^{q} e^{p_j t} \delta^{(r_j)}(t)$ означает сверточное произведение сомножителей $e^{p_j t}\delta^{(r_j)}(t)$, $a_k \in \mathbb{C}$, $\forall p_j \in \mathbb{C}$, $\forall r_j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $j = \overline{1,n}$, W — заданная обобщенная функция из пространства $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$, U — искомая обобщенная функция из $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$.

Учитывая свойства свертки обобщенных функций, а также формулу (1.2) можно записать

$$e^{pt}\delta^{(r)}(t) * e^{qt}\delta^{(m)}(t) = (D-p)^{(r)}(D-q)^{(m)}\delta(t). \tag{1.11}$$

Следовательно,

$$\circledast_{j=1}^{q} e^{p_j t} \delta^{(r_j)}(t) = \left\{ \prod_{j=1}^{q} (D-p_j)^{(r_j)} \right\} \delta(t). \tag{1.12}$$

Тогда уравнение (1.10) сводится к уравнению

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D^k \left\{ \prod_{j=1}^{q} (D-p_j)^{(r_j)} \right\} \delta(t) * U = W, \tag{1.13}$$

которое решается аналогично уравнению (1.1).

2. Обобщение уравнения (1.1) на случай произвольной функции класса $C^\infty(\mathbb{R})$

Перейдем к рассмотрению в $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$ уравнение вида

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D^k \left[f(t)\delta^{(r)}(t) \right] * U = W, \tag{2.1}$$

где как и раньше $a_k \in \mathbb{C} | a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{C}, \forall r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $D = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования в смысле обобщенных функций, $\delta(t)$ — мера Дирака, W — заданная обобщенная функция из пространства $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$, U — искомая обобщенная функция из $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$. В отличие от уравнения (1.1), вместо функции e^{pt} здесь фигурирует произвольная функция $f(t)$ из класса $C^\infty(\mathbb{R})$.

Прежде всего преобразуем выражение $f(t)\delta^{(r)}(t)$:

$$\left\langle f(t)\delta^{(r)}(t), \varphi(t) \right\rangle = \left\langle \delta^{(r)}(t), f(t)\varphi(t) \right\rangle = (-1)^r \left\langle \delta(t), \left[f(t)\varphi(t)\right]^{(r)} \right\rangle =$$

$$= (-1)^r \left\langle \delta(t), \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} f^{(r-j)}(t)\varphi^{(j)}(t) \right\rangle =$$

$$= (-1)^r \sum_{j=0}^{r} \left\langle \delta(t), \binom{r}{j} f^{(r-j)}(t)\varphi^{(j)}(t) \right\rangle =$$

$$= \sum_{j=0}^{r} (-1)^r \left\langle \binom{r}{j} f^{(r-j)}(t)\delta(t), \varphi^{(j)}(t) \right\rangle =$$

$$= \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r+j} \left\langle \left[\binom{r}{j} f^{(r-j)}(t)\delta(t) \right]^{(j)}, \varphi(t) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r+j} \left[\binom{r}{j} f^{(r-j)}(0)\delta(t) \right]^{(j)}, \varphi(t) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r+j} \binom{r}{j} f^{(r-j)}(0)\delta(t)^{(j)}, \varphi(t) \right\rangle$$

$f(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $\forall \varphi \in \mathscr{D}_{+}(\mathbb{R})$.

Таким образом, выражение $f(t)\delta^{(r)}(t)$ можно представить в виде дифференциального полинома степени не выше r с постоянными коэффициентами:

$$f(t)\delta^{(r)}(t) = \sum_{j=0}^{r} b_j \delta^{(j)}(t), \tag{2.2}$$

где

$$b_j = (-1)^{r+j} \binom{r}{j} f^{(r-j)}(0), \; j = \overline{0, r}.$$

В этом случае уравнение (2.1) примет вид

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D^k \left[\sum_{j=0}^{r} b_j D^j \delta(t) \right] * U = W \tag{2.3}$$

или

$$P(D)\left[L(D)\delta(t)\right] * U = W, \tag{2.4}$$

где $L(D) = \sum\limits_{j=0}^{m} b_j D^j$ — обыкновенный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами порядка не выше r.

Поскольку $P(D)$ и $L(D)$ обыкновенные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, то в $\mathscr{D}'_{+}(\mathbb{R})$ эти операторы обладают единственными фундаментальными решениями. Обозначим через E элементарное решение оператора $P(D)$, а через $\mathscr{E}$ — элементарное решение оператора $L(D)$.

В силу свойств свертки уравнение (2.4) эквивалентно уравнению

$$P(D)V = W, \tag{2.5}$$

где $V = L(D)U$, $V \in \mathscr{D}'_{+}(\mathbb{R})$. Тогда

$$V = E * W,$$

а значит

$$L(D)U = E * W.$$

Следовательно, решение уравнения (2.1) имеет вид

$$U = \mathscr{E} * E * W. \tag{2.6}$$

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. У уравнения сверток (2.1) в $\mathscr{D}'_{+}(\mathbb{R})$ существует единственное решение, которое имеет вид (2.6).

3. Применение систем компьютерной алгебры при решении уравнений сверток

В ходе решения уравнений вида (1.1) и (2.1) на практике требуется проведение довольно громоздких вычислений, особенно при больших значениях p и r. Предложенный выше метод решения уравнений сверток (1.1) и (2.1) отличается тем, что его достаточно просто можно автоматизировать, применяя одну из систем компьютерной алгебры. Особенным преимуществом при этом обладает система компьютерной математики Maple, поскольку в инструментарии Maple присутствуют функции Dirac и Heaviside, которые можно адаптировать для работы с обобщенными функциями — мерой Дирака и функцией Хевисайда.

Например, проверим выполнение при $r = 10$ формулы

$$\left\langle f(t)\delta^{(r)}(t), \varphi(t)\right\rangle = \left\langle \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r+j} \binom{r}{j} f^{(r-j)}(0)\delta(t)^{(j)}, \varphi(t) \right\rangle, \tag{3.1}$$

которая использовалась выше для получения решения уравнения (2.1). Записанная в Maple, эта формула будет выглядеть следующим образом

```
r:=10:
sum((-1)^(r+j)*binomial(r,j)*((D@@(r-j))(f))(0)*diff(Dirac(t),t$j),j=0..r);
```

Результат выполнения приведен ниже.

$$f(0)\,Dirac(10,t) - 10\,\mathrm{D}\left(f\right)(0)\,Dirac(9,t) + 45\,\left(D^{(2)}\right)\left(f\right)(0)\,Dirac(8,t)$$
$$-120\,\left(D^{(3)}\right)\left(f\right)(0)\,Dirac(7,t) + 210\,\left(D^{(4)}\right)\left(f\right)(0)\,Dirac(6,t)$$
$$-252\,\left(D^{(5)}\right)\left(f\right)(0)\,Dirac(5,t) + 210\,\left(D^{(6)}\right)\left(f\right)(0)\,Dirac(4,t)$$
$$-120\,\left(D^{(7)}\right)\left(f\right)(0)\,Dirac(3,t) + 45\,\left(D^{(8)}\right)\left(f\right)(0)\,Dirac(2,t)$$
$$-10\,\left(D^{(9)}\right)\left(f\right)(0)\,Dirac(1,t) + \left(D^{(10)}\right)\left(f\right)(0)\,Dirac(t)$$

Идентичный результат возвращает следующая команда

```
simplify(f(t)*diff(Dirac(t),t$r));
```

Частным случаем формулы (3.1) является формула (1.2), в которой дифференциальный оператор записан в факторизованной форме, что удобно для поиска элементарного решения. Однако, в случае $f(t) = e^{pt}$ результат выполнения команды

```
simplify(f(t)*diff(Dirac(t),t$r));
```

не вполне очевидно совпадает с тем результатом, который дала бы нам формула (1.2). Эту проблему легко решить используя следующий код.

```
F:=simplify(exp(p*t)*diff(Dirac(t),t$r)):
F:=subs(Dirac(t)=1,F):
for k from 1 to r do
   F:=subs(Dirac(k,t)=D^k,F):
end do:
factor(F);
```

В результате получаем факторизованный дифференциальный оператор как и в формуле (1.2):

$$\left(D - p\right)^{10}.$$

Для построения решения уравнений сверток, рассмотренных выше, требуется вычисление элементарных решений дифференциальных операторов.

Как известно [1], элементарное решение E в $\mathscr{D}'_{+}(\mathbb{R})$ обыкновенного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами

$$P(D) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k, a_n = 1$$

равно произведению функции Хевисайда на решение однородного уравнения

$$P(D)(E) = 0,$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$E(0) = E'(0) = \cdots = E^{(n-2)} = 0, E^{(n-1)} = 1.$$

Аналогично, элементарное решение $\mathscr{E}$ в $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$ обыкновенного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами

$$L(D) = \sum_{j=0}^{m} b_j D^j$$

равно произведению функции Хевисайда на решение однородного уравнения

$$L(D)(\mathscr{E}) = 0,$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$\mathscr{E}(0) = \mathscr{E}'(0) = \dots = \mathscr{E}^{(m-2)} = 0, \mathscr{E}^{(m-1)} = \frac{1}{b_m}.$$

Приведем пример кода, с помощью которого можно получить элементарное решение оператора $P(D)$:

```
P:=D->sum(a[k]*D^k,k=0..n):
eq:=sum(a[k]*diff(Es(t),t$k),k=0..n)=0:
cond:=seq((D@@k)(Es)(0)=piecewise(k<>n-1,0,1),k=0..n-1):
solution:=dsolve({eq,cond}):
E:=Heaviside(t)*rhs(solution);
```

Приведем также пример процедуры для вычисления свертки двух функций $f(t) * g(t)$:

```
conv:=proc(f,g)
   return simplify(int(subs(t=tau,f)*subs(t=t-tau,g),tau=-infinity..infinity));
end proc:
```

Так, свертку $Y(t) * Y(t)$ можно вычислить с помощью команды

```
conv(Heaviside(t),Heaviside(t));
```

которая возвращает следующий результат

$$tHeaviside(t)$$

4. Пример приложения уравнения сверток класса (2.1)

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(D-s)(D-p)^2 u(t) = f(t), \tag{4.1}$$

где $u(t)$ - неизвестная функция, определенная на $\mathbb{R}$, $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+)$ и удовлетворяющая условиям

$$u(0) = c_0, u'(0) = c_1, u''(0) = c_2, \tag{4.2}$$

c_0, c_1, c_2 — заданные числа, $f(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ — известная функция.

Построим обобщенную функцию U следующим образом

$$U = Y(t)u, U \in \mathscr{D}'_+(\mathbb{R}).$$

Тогда

$$(D-s)(D-p)^2 U(t) = Y(t)f + \sum_{k=0}^{2} C_k \delta^{(k)},$$

где числа C_k выражаются через c_k.

Обозначая

$$W = Y(t)f + \sum_{k=0}^{2} C_k \delta^{(k)}, W \in \mathscr{D}'_+(\mathbb{R}),$$

получим уравнение

$$(D-s)\left[e^{pt}\delta^{(2)}(t)\right]*U=W. \tag{4.3}$$

Таким образом, решение задачи Коши (4.1),(4.2) свелось к решению уравнения сверток класса (1.1).

Согласно формуле (1.9) имеем

$$U=Y(t)te^{pt}*E*W, \tag{4.4}$$

где E — элементарное решение оператора $D-s$.

Учитывая, что $E=Y(t)e^{st}$, получим

$$U=Y(t)te^{pt}*Y(t)e^{st}*W. \tag{4.5}$$

Обозначим

$$\mathscr{E}=Y(t)te^{pt}*Y(t)e^{st}.$$

Вычисления свертки $Y(t)te^{pt}*Y(t)e^{st}$ дают

$$\mathscr{E}=Y(t)\frac{((p-s)t-1)e^{pt}+e^{st}}{p^2-2ps+s^2}.$$

С учетом (4.5) получим

$$U=\mathscr{E}*\left(Y(t)f+\sum_{k=0}^{2}C_k\delta^{(k)}\right)=\mathscr{E}*Y(t)f+\sum_{k=0}^{2}C_kD^k\mathscr{E}. \tag{4.6}$$

Следовательно, решение задачи (4.1),(4.2) представляется формулой

$$u=\int_0^t f(\tau)\frac{((p-s)(t-\tau)-1)e^{p(t-\tau)}+e^{s(t-\tau)}}{p^2-2ps+s^2}d\tau+\sum_{k=0}^{2}C_k\left(\frac{((p-s)t-1)e^{pt}+e^{st}}{p^2-2ps+s^2}\right)^{(k)},\ t\geq 0. \tag{4.7}$$

Процесс поиска обобщенной функции U можно автоматизировать с помощью Maple.

Зададим операторы $P(D)=D-s$ и $L(D)=(D-s)^r$.

```
P:=D-s:
r:=2:
L:=(D-p)^r:
```

Вычислим коэффициенты C_k.

```
PL:=expand(P*L):
l:=degree(PL,D):
PLU:=coeff(PL,D,0)*Heaviside(t)*u(t):
for i from 1 to l do
   PLU:=PLU+coeff(PL,D,i)*(D@@i)(Heaviside*u)(t):
end:
PLU:=simplify(expand(PLU)):
F:=Heaviside(t)*coeff(PLU,Heaviside(t)):
S:=PLU-expand(F):
S:=subs(u(0)=c[0],S):
for i from 1 to l-1 do
   S:=subs((D@@i)(u)(0)=c[i],S);
end:
C[0]:=coeff(S,Dirac(t));
for i from 1 to l-1 do
   C[i]:=coeff(S,Dirac(i,t));
end;
```

Найдем элементарное решение оператора $P(D)=D-s$.

```
eq:=sum(coeff(P,D,k)*diff(U(t),t$k),k=0..degree(P)):
init:=seq((D@@k)(U)(0)=piecewise(k<>degree(P)-1,0,
      1/coeff(P,D,degree(P))),k=0..degree(P)-1):
E:=Heaviside(t)*rhs(dsolve({eq,init}));
```

Найдем элементарное решение оператора $L(D) = (D - p)^r$.

```
eq:=sum(coeff(L,D,k)*diff(U(t),t$k),k=0..degree(L)):
init:=seq((D@@k)(U)(0)=piecewise(k<>degree(L)-1,0,
      1/coeff(L,D,degree(L))),k=0..degree(L)-1):
EL:=Heaviside(t)*rhs(dsolve({eq,init}));
```

Запишем процедуру вычисления свертки.

```
conv:=proc(f,g)
   return simplify(int(subs(t=tau,f)*subs(t=t-tau,g),tau=-infinity..infinity));
end proc:
```

Вычислим свертку элементарных решений операторов $P(D)$ и $L(D)$.

```
Epsilon:=conv(E,EL);
```

И, наконец, найдем обобщенную функцию U

```
U:=conv(Epsilon,Heaviside(t)*f(t))+C[0]*Epsilon
   +sum(C[k]*diff(Epsilon,t$k),k=1..degree(L)-1);
```

Отметим, что данная программа применима для решения в $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$ любого уравнения не только вида (1.1) , но и вида (2.1).

Заключение

В данной работе было проведено исследование уравнений сверток класса (1.1) в сверточной алгебре $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$, а также его обобщения на уравнения класса (2.1) в этой же сверточной алгебре. Для данных классов уравнений доказаны теоремы существования и единственности, а также получены явные представления решений. Кроме того, описан метод автоматизации решения указанных классов уравнений с помощью системы компьютерной математики Maple.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004. 400 с.
2. Kythe P.K. Fundamental solutions for differential operators and applications. Basel: Birkhäuser, 1996. 414 p.
3. Volchkov V. V. Integral geometry and convolution equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. 454 p.
4. Gindikin S.G., Volevich L.R. Distributions and convolution equations. Philadelphia: Gordon and Breach Sci. Publ., 1992. 465 p.
5. Salekhova L., Chebotareva E. On a class of multiplicative-convolution equations // Int. Journal of Math. Analysis. 2014. Vol. 8. № 10. P. 495-501.
6. Salekhova L., Chebotareva E. Regular solutions of multiplicative-convolution equation in the Vladimirov algebra // Int. Journal of Math. Analysis. 2015. Vol. 9. № 54. P. 2681-2688.
7. Salekhov L.G., Salekhova L.L. The unique solvability of certain multiplicative-convolution equations // Russian Mathematics. 2012. Vol. 56. № 54. P. 57-60.
8. Salekhov L., Chebotareva E. On a class of convolution equations in D'+(R) // Int. Journal of Math. Analysis. 2014. Vol. 8. № 51. P. 2507-2512.

Поступила в редакцию 24.03.2017

Чеботарева Эльвира Валерьевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35.
E-mail: chebotareva.elv@gmail.com

E. V. Chebotareva

Automated solution to one class of convolution equations in the space of distributions with one-sided bounded support

Keywords: convolution equation, convolution algebra, elementary solution of differnetial operator, distributions, Maple (computer algebra system).

PACS: 02.30.Hq

Let $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$ be the space of distributions with support in $[0,\infty]$. In this paper we consider a class of convolution equations

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D^k \left[f(t)\delta^{(r)}(t) \right] * U = W,$$

where $a_k \in \mathbb{C} | a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{C}, \forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $D = \frac{d}{dt}$ is the differnetiation operator in distributional sense, $\delta(t)$ is the Dirac measure, W is a known distribution from $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$, U is an unknown distribution from $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$. We prove existence and uniqueness of solution to this convolution equation in convolution algebra $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$. We also describe a method of solving this convolution equation using the computer mathematics system Maple.

REFERENCES

1. Vladimirov V.S., Zharinov V.V. *Uravnenia matematicheskoi phisiki* (Equations of mathematical physics), Moscow: Fizmatlit, 2004, 400 p.

2. Kythe P.K. *Fundamental solutions for differential operators and applications*, Basel: Birkhäuser, 1996, 414 p.

3. Volchkov V. V. *Integral geometry and convolution equations*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003, 454 p.

4. Gindikin S.G., Volevich L.R. *Distributions and convolution equations*, Philadelphia: Gordon and Breach Sci. Publ., 1992, 465 p.

5. Salekhova L., Chebotareva E. On a class of multiplicative-convolution equations, *Int. Journal of Math. Analysis*, 2014, vol. 8, no. 10, pp. 495-501.

6. Salekhova L., Chebotareva E. Regular solutions of multiplicative-convolution equation in the Vladimirov algebra, *Int. Journal of Math. Analysis*, 2015, vol. 9, no. 54, pp. 2681-2688.

7. Salekhov L.G., Salekhova L.L. The unique solvability of certain multiplicative-convolution equations, *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, no. 54, pp. 57-60.

8. Salekhov L., Chebotareva E. On a class of convolution equations in D'+(R), *Int. Journal of Math. Analysis*, 2014, vol. 8, no. 51, pp. 2507-2512.

Received 24.03.2017

Chebotareva Elvira Valerevna, Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: chebotareva.elv@gmail.com