ОТ РЕДАКЦИИ

Тематика нашего журнала посвящена, в первую очередь, проблемам фундаментальной науки. Исторически к «фундаменту» относят физику и математику. Кто-то убежден, что физические явления первичны, а математические методы вторичны; кто-то утверждает обратное. Но никто не станет отрицать, что методы и методология фундаментальных дисциплин всё глубже проникают в самые различные прикладные исследования. Мы изначально заявляли, что с радостью будем публиковать не только сугубо теоретические работы, но также и методические разработки, и исследования, в которых практические проблемы анализируются при помощи фундаментальных принципов и подходов.

И в этом номер мы представляем работу из этой серии, посвященную, казалось бы, совсем далекой от фундаментальной науки (в стандартном ее понимании) теме - теме образования отходов. Но вдумчивый читатель, даже бегло пробежав статью, надеемся, согласится с нами.

УДК 504.064.2.001.18:519.257:628.4.03/08

С. М. Найман[1], *Е. К. Вачагина*[2]

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ЗАКОНЫ И ОБРАЗОВАНИЕ ОТХОДОВ

В работе рассматривается жизненный цикл объектов и выход изделий из эксплуатации. Показано, что время перехода объектов в отходы может быть описано вероятностными моделями. Проведен сравнительный анализ различных видов распределений непрерывных случайных величин для выбора наилучшей аппроксимации реального распределения срока службы изделий: нормального, логарифмически нормального, экспоненциального, Вейбулла, гамма-распределения, демографических таблиц, закона смертности Гомпертца-Мейкхама, кривых Айова. Исследование вида и параметров функций данных распределений показало, что для вероятностной оценки скорости отходообразования более всего подходит закон Вейбулла.

Ключевые слова: вероятностные законы, жизненный цикл продукции, отходы, модели образования отходов, распределение Вейбулла.

Введение

При установлении количества отходов за определенный промежуток времени важное значение имеет срок их возникновения, ведь одни отходы появляются сразу же в ходе различных производственных процессов (шлаки, шлам и тому подобное), либо потребления готовой продукции (одноразовые изделия, пищевые отходы, упаковка, макулатура и так далее), а другие образуются постепенно, так как период эксплуатации конечных изделий более длинный, вплоть до 50-100 лет, как например, у зданий, мостов и тому подобных. То есть, образование отходов потребления, которые как раз и создают основную угрозу здоровью населения и окружающей среде ввиду их концентрации в местах проживания людей, растянуто во времени. Эта конечная продукция, по образному выражению В.И. Данилова-Данильяна [1], представляет собой «отложенный отход». Для надлежащего управления данными отходами требуется знать, как быстро изделия становятся отходами [2].

В ходе жизненного цикла продукции ее состояние последовательно изменяется в результате производимых на нее воздействий. Вариабельность срока службы в совокупности объектов одной номенклатурной принадлежности обусловлена многостадийностью процессов разрушения, из-за чего с течением времени появляются объекты, находящиеся на разных стадиях износа и, следовательно, имеющие разный риск достижения предельного состояния. Срок службы

[1]E-mail: nsofa@rambler.ru
[2]E-mail: vachaginae@mail.ru

конкретного индивидуального объекта зависит от большого числа факторов (качества сырья, материалов, заготовок и полуфабрикатов, от достигнутого уровня технологии и степени стабильности технологического процесса, от уровня технологической дисциплины, интенсивности использования объекта, от выполнения всех требований по хранению, транспортированию и применению объекта по назначению и тому подобному), часть которых не может быть проконтролирована, а остальные заданы с той или иной степенью неопределенности. Обобщая и группируя эти факторы, можно сказать, что высокая вариабельность срока службы обусловлена тремя причинами:

- исходной гетерогенностью совокупности объектов из-за разных производителей этих объектов и различных технологий, применяемых при их производстве. Примером могут служить отечественные и импортные автомобили, отличающиеся уровнем надежности и, соответственно, сроком службы;
- вариацией условий среды, в которых эксплуатируются эти объекты - например, агрессивные или щадящие, высоко- или низкотемпературные или оптимальные и тому подобные;
- случайной (стохастической) природой реализации выхода объектов из эксплуатации.

Наблюдаемая высокая вариабельность срока службы свидетельствует о том, что срок службы объекта может считаться случайной величиной, что приводит к значительному статистическому разбросу и поэтому к совокупности однородных объектов и их эксплуатации применимо статистическое истолкование вероятности. Мы воспользуемся данным подходом для оценки образования отходов, исходя из статистической теории надежности и определив как вероятностные характеристики возраст изделия, срок службы (время жизни), устаревание, скорость выбытия из эксплуатации (скорость образования отходов) и так далее. Это также даст возможность прогнозирования значения данных показателей на любой определенный момент времени.

Переход изделий (объектов) в отходы, то есть их выбытие из эксплуатации зависит от сроков службы (времени до перехода в отходы), точное значение которых остается неизвестным до момента наступления данного события (выбытия).

Так как мы определили, что срок службы объектов (изделий) является случайной величиной, то он имеет среднее значение, отсчитываемое от производства продукции до достижения ею предельного состояния (снятия с эксплуатации). Этот показатель определяется на основе эмпирических данных путем деления суммы сроков службы всех объектов на число единиц (отдельных объектов) и может быть отличным от нормативного срока службы, который, исходя из теории вероятностей, является математическим ожиданием и может использоваться в качестве исходной информации для определения среднего срока службы и других статистических параметров, характеризующих долговечность объекта [3]. Средние величины показывают не точный период времени (ресурс), в течение которого будет эксплуатироваться объект, а характеризуют некоторый центр рассеивания моментов времени, вокруг которого (часть раньше, часть позже) будут сниматься с эксплуатации объекты данного класса, достигшие предельного состояния.

При расчете количества ежегодно образующихся отходов необходимо знать, сколько изделий переходит (перейдет) в отходы в определенном году. Это будет зависеть от продолжительности жизни (срока службы) изделия, возрастной структуры парка изделий, их надежности (безотказности), то есть количества отказов за год. При наличии такой количественной фактической информации можно было бы построить, как в актуарной (страховой) практике, таблицы жизни (смертности) с последующей математической обработкой результатов наблюдений, выявить общие закономерности с формулированием рабочих гипотез и построить математическую модель, количественно объясняющую полученные закономерности. Но так как для получения эмпирических зависимостей при образовании отходов у нас не хватает данных - неизвестно точное количество выбывающих каждый год изделий (объектов) хотя бы одного вида, тем более определенного года выпуска (то есть выборка цензурированная с усеченным массивом данных), то мы в ходе дальнейшей работы воспользуемся подгонкой статистической информации под известные законы распределения для создания математической теории отходообразования на основе теории надежности.

Таким образом, в процедуре оценки общего количества отходов в стране, регионе, муниципальном образовании важным элементом является определение срока эксплуатации, остаточного срока службы продукции и ежегодного образования отходов.

1. Статистический подход к оценке образования отходов

Основными показателями, характеризующими фактический уровень образования отходов из эксплуатирующихся объектов, являются количество объектов, работающих в течение года, их возраст, средний срок службы *to*, с коэффициентом вариации V. Для оценки количества отходов по конкретному виду объектов используется вероятность безотказной работы $P(t)$.

Статистический подход к задаче прогнозирования отходообразования, зависящего от срока службы изделия (времени до перехода в отходы), в свою очередь, зависящего от физической деградации (износа) или морального устаревания продукции в реальных ситуациях, развивается на основе вероятностных моделей. Для целей проводимого анализа, в процессе генерализации данных, различные силы, вызывающие выбытие, отделяются от конкретного вида изделия, подлежащего анализу, что позволяет применить их к различным видам изделий, не идентифицируя последние. Так как в случае укрупненных оценок (оценок «потоком») требуется рассматривать большие массивы изделий (оборудования, машин и тому подобного), то необходимо создание упрощенных технологий, менее трудоемких и использующих минимум исходной информации об объекте исследования. Этим требованиям отвечают также технологии определения срока службы, опирающиеся на модели линейного или экспоненциального износа.

При оценке процесса выбытия можно выделить следующие основные особенности:

- огромный ассортимент изделий, имеющих большой перечень отличительных особенностей и индивидуальных свойств - инструменты, машины, вычислительная техника, средства гигиены и тому подобное;
- многообразие и значительное различие аналогичных изделий и их модификаций (исчисляются сотнями тысяч) и большое число производителей продукции - аккумуляторы, компьютеры и тому подобное;
- изменение технических характеристик, количества и качества применяемых материалов и функционального назначения изделий в результате технического прогресса - ламповые и жидкокристаллические телевизоры, бумажные и виниловые обои, деревянные и пластиковые окна и тому подобное;
- изменение потребительских приоритетов в сторону более современных, комфортных, безопасных моделей: дисковые телефонные аппараты кнопочные аппараты сенсорные мобильные устройства;
- укорочение жизненного цикла изделий - срок службы сейчас исчисляется не десятилетиями, а несколькими годами - бытовая техника, оргтехника и тому подобное;
- необходимость учета требований охраны окружающей среды и безопасности эксплуатации - оборудование должно заменяться на более экологичное, производительное, надежное, энергосберегающее.

Практическое значение таких исследований состоит в том, что они открывают возможности для прогнозирования и управления отходами и - что особенно важно - для поиска путей сокращения их количества. Нас будет интересовать и пространственное и временное распределение отходов.

При выборе закона распределения срока службы объектов (скорости отходообразования) следует руководствоваться следующими методологическими принципами:

1. Принцип теоретической обоснованности, когда используются не эмпирические формулы, а зависимости, установленные на основе определенных теоретических представлений.

2. Принцип универсальности - выявленные закономерности должны быть справедливы для самых разных объектов (изделий).

3. Принцип достаточной подгонки при минимальном числе параметров - следует применять наиболее общие модели, не использующие многопараметрические формулы, то есть не акцентирующие внимания на частностях, свойственных отдельным объектам.

4. Принцип локального описания (на ограниченном возрастном интервале) в рамках более общего закона (на всем диапазоне).

Разработка математической модели должна начинаться с отбора небольшого количества отходоообразующих факторов.

Для того чтобы определить скорость отходообразования, нужно оценить срок службы продукции. Нормативный срок можно взять из технической документации для каждого изделия. При этом необходимо учесть, что время службы многих изделий, с одной стороны, превышает средний срок эксплуатации, а с другой стороны, они морально устаревают и списываются (выбрасываются) до достижения полного физического износа. Кроме того, сегодня производители не стремятся выпускать долгоживущую продукцию - весь рынок потребительских товаров нацелен на то, чтобы поощрять покупательский спрос на новые товары, а это будет возможно не только из-за агрессивной рекламы, но и из-за того, что изделия будут служить ровно столько, сколько оговорено в сопроводительной технической документации. Сейчас понятие «качественная вещь» означает хорошее выполнение изделием его функций, а не ее долголетие и что «она еще моим внукам послужит». При интенсивной эксплуатации фирменный айфон служит не дольше китайских гаджетов, но им очень легко и удобно управлять, без дополнительных усилий, прикосновений и тому подобного.

В качестве примеров превышения сроков эксплуатации можно привести оборудование в энергетике с истекшим сроком службы, доля которого соответствует 1 % от общей установленной мощности генерирующих объектов РФ [4], строительную технику, где минимальный удельный вес машин с истекшим сроком службы составлял в 2013 году 31,2 % (у экскаваторов), а максимальный - 66,3 % (у кранов на гусеничном ходу) [5], или станки еще довоенного германского производства, которые работают и сейчас, и тому подобное. На сегодняшний день, согласно бухгалтерской отчетности, средний возраст оборудования составляет более 20 лет (Рис. 1), причем действительное его физическое состояние неизвестно [6]. Машины и оборудование могут сохранять 15-40 % своего ресурса и по истечении нормативного срока эксплуатации [3]. Продлен срок эксплуатации может быть при периодически проводимых капитальных ремонтах, при этом кривая коэффициента физического износа приобретает пилообразный вид. Накануне очередного капитального ремонта физический износ машины достигает высокого уровня, а сразу после капитального ремонта уровень износа резко снижается. Укорачивается срок эксплуатации в результате морального устаревания, процесс которого сейчас все ускоряется ввиду научно-технического прогресса и связанного с этим производства все более усовершенствованных моделей, так как в условиях жесткого конкурентного рынка производители могут выжить лишь за счет скорейшего внедрения быстро сменяющих друг друга новых продуктов и технологий. Иллюстрацией такого подхода может служить фраза: «Покупая сегодня компьютер, мы покупаем вчерашний день». Моральному устареванию бытовых изделий способствует и улучшение условий жизни людей (старая одежда не перелицовывается, а выбрасывается, мебель не ремонтируется и тому подобное), и изменение менталитета - престижнее иметь новую модель телефона, несмотря на то, что старый еще функционирует.

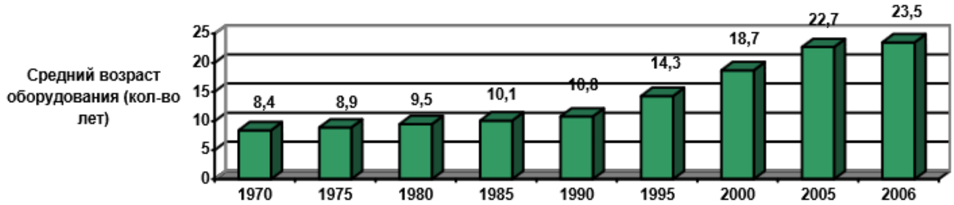


Рис. 1. Возрастная структура производственного оборудования

Следовательно, в одном случае мы имеем уменьшение скорости отходообразования (интенсивности отказов в теории надежности), а в другом - увеличение. То есть на повышение скорости отходообразования, обусловленной возрастом (устареванием) изделий и прогрессом техники, может накладываться снижение количества отходов, связанное с рачительным использованием изделий и меньшей материалоемкостью новой продукции. Здесь наглядно видна парадоксальная ситуация - научно-технический прогресс оказывает двоякое влияние на количество образующихся отходов. Он способствует, с одной стороны, увеличению отходов за счет замены старых изделий на новые, а с другой стороны, уменьшению отходов в результате уменьшения размеров и массы вновь выпускаемых изделий, выполняющих аналогичные функции (если раньше вес цветных телевизоров доходил до 50-70 кг, то сейчас он составляет 5-6 кг при той же диагонали экрана).

Если предположить, что срок службы (ресурс) изделия является случайной величиной, описываемой вероятностными моделями, то это будет наиболее соответствовать физическим процессам изнашивания. В этом случае можно будет при расчетах ежегодного накопления отходов учесть, что фактический срок службы может существенно превышать нормативный, а установленный в документации срок эксплуатации имеет смысл наиболее вероятного минимального срока службы, гарантированного изготовителем.

2. Вероятностные законы распределения

Очевидно, что относительно момента выхода из строя конкретного объекта практически невозможно сказать что-то определенное. Однако при рассмотрении достаточно большой однородной группы объектов должны быть справедливы закономерности, присущие массовым случайным явлениям.

Поскольку срок эксплуатации изделия (объекта) t является математическим ожиданием переменной величины X, принимающей возможные значения x случайным образом, мы описывали его с помощью вероятностных моделей.

В теории надежности, где случайной величиной обычно является время работы объекта t (время до возникновения отказа), то есть $x = t$, рассматриваются в основном три вида функции распределения вероятностей [7]: интегральная $F(t)$, дифференциальная $f(t)$ и функция интенсивности отказов $\lambda(t)$.

Функция $F(t)$ дает интегральную оценку накопленной вероятности свершившихся событий (отказов, выхода из эксплуатации). Тогда $P(t) = 1 - F(t)$ - вероятность безотказной работы при исследовании показателей безотказности, а при оценке долговечности $F(t) = \gamma\{T \leq t\}$ - вероятность недостижения предельного состояния. Функция плотности распределения $f(t)$ служит полной характеристикой рассеивания сроков службы объектов. Вид этой функции зависит от закономерностей процесса потери элементом работоспособности.

Физическим смыслом параметра λ является среднее число отказов в единицу времени. По графику функции интенсивности отказов можно судить о физической деградации объекта. При исследовании внезапных отказов, когда $\lambda(t) = \lambda = \mathrm{const}$, этот показатель становится основным. С другими функциями интенсивность отказов связана следующим образом:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \quad \text{или} \quad f(t) = \lambda(t) \cdot P.$$

Для нахождения вероятностно-временных характеристик распределения требуется знание теоретического закона распределения как наиболее полной характеристики соответствующей случайной величины. С помощью различных количественных методов исследования и анализа фактических данных об изучаемых объектах можно получить математические функции и построить кривые аналитического типа.

В нашем случае, в отличие от классической математической статистики, вид закона распределения неизвестен, и при первом приближении его невозможно однозначно установить, так же как и построить график либо описать эмпирически выведенными аналитическими выражениями. Поэтому мы должны сначала подобрать известный теоретический закон распределения (вид и параметры), наиболее аппроксимирующий реальную закономерность, то есть закон, который бы в статистическом смысле соответствовал имеющимся наблюдениям и ставил бы в соответствие возможным значениям случайных величин их вероятности.

Предварительный выбор вида закона распределения можно осуществлять на основе литературных данных о применимости этого вида распределения к описанию рассматриваемого процесса. В результате необходимо оценить числовые характеристики случайных величин - моменты, такие как, например, момент первого порядка математическое ожидание M (или μ) и дисперсия D (момент второго порядка). Определения, формулы и графики из теории вероятностей приводятся в соответствующих публикациях и изданиях.

Обычно исходными данными для определения параметров теоретического распределения являются элементы эмпирического распределения. В теории вероятностей можно найти несколько методов решения этой задачи, некоторые из которых приведены в государственных стандартах. Сюда относятся метод моментов (заключается в приравнивании теоретических моментов распределения к эмпирическим моментам соответствующего порядка), метод максимального правдоподобия (приравниваются нулю частные производные от логарифма функции максимального правдоподобия), метод квантилей или разделяющих разбиений (эмпирические квантили приравнивают к квантилям теоретического распределения и составляют столько уравнений, сколько параметров выбранного распределения необходимо определить), графоаналитический метод с использованием вероятностной бумаги и так далее.

Но у нас нет эмпирического распределения. Поэтому рассмотрим типичные вероятностные законы и наши рассуждения о возможности их использования для определения срока образования отходов из продукции. Как мы уже упоминали, срок службы объектов, остаточный срок службы и другие интересующие нас характеристики являются непрерывными величинами. Поэтому из дальнейшего рассмотрения мы исключили функции распределения дискретных случайных величин, такие как распределение Пуассона, биномиальное распределение, геометрическое и так далее. В таблице 2.3 приведены функции распределения и плотности вероятности и их графики, и теоретические параметры некоторых двухпараметрических распределений непрерывных случайных величин. Двухпараметрические распределения зависят от двух параметров — масштаба a и формы b, которые связаны с моментами 1-го и 2-го порядка выборки или, что то же самое, со средним значением и дисперсией [7].

1. **Равномерное** распределение используется при описании переменных, у которых каждое значение равновероятно, иными словами, значения переменной равномерно распределены в некоторой области $[a, b]$ (Табл. 1).

2. Наиболее часто в статистике используется **нормальное** распределение вероятностей (закон Гаусса). Его используют для описания постепенных событий, которые при распределении по времени сначала имеют низкую плотность, затем максимальную и далее плотность снижается. То есть данные группируются вокруг центра, отклонения от центра в положительную и отрицательную стороны равновероятны, частота отклонений быстро падает, когда отклонения от центра становятся большими. В теории надежности нормальное распределение чаще всего используется для описания отказов, вызванных постепенным изменением параметров приборов, а также при оценке надежности элементов на стадии старения.

3. **Логарифмически нормальное** (логнормальное) распределение применяют в самых разных случаях: при оценке концентрации пыли в атмосфере, распределения размеров частиц в естественно возникающих смесях, длительности отсутствия по болезни, распределения доходов, распределения времени жизни при расчетах надежности, для описания наработки до отказа подшипников, электронных ламп и других изделий.

   Неотрицательная случайная величина X распределена логарифмически нормально с параметрами μ, σ, то есть $X = \mathrm{e}^{\mathrm{Y}}$, если её логарифм Y распределён нормально с параметрами μ, σ. На рисунке в таблице 1 приведено логнормальное распределение с $\mu = 0$, $\sigma = 0,7$.

4. **Экспоненциальный (показательный)** закон распределения используется в различных вероятностно-статистических методах принятия решений и других прикладных исследованиях для описания внезапных, редких событий, имеющих постоянную интенсивность (постоянную вероятность). В теории надежности это означает, что интенсивность отказов (то есть интенсивность выхода изделий из строя) постоянна (здесь λ - среднее число отказов в единицу времени), другими словами, не зависит от того, сколько времени изделие уже проработало. Обычно интенсивность отказов постоянна на основном этапе эксплуатации, после того, как на начальном этапе выявлены скрытые дефекты, и до того, как из-за естественного старения материалов начинает происходить ускоренный износ с резким возрастанием интенсивности выхода изделия из строя.

   На рисунке в таблице 1 приведено экспоненциальное распределение с $\lambda = 1$.

5. Распределение **Вейбулла** (Вейбулла - Гнеденко) применяется тогда, когда вероятность (интенсивность) событий меняется с течением времени (в отличие от экспоненциального распределения, при котором интенсивность потока постоянна). С помощью этой модели оценивают время функционирования (безотказной работы) многих технических систем, если вероятность отказа меняется с течением времени.

   Здесь λ (интенсивность отказа, или риск) выступает параметром масштаба (при его изменении кривая распределения сжимается или растягивается; имеет те же единицы измерения, что и x), а показатель степени m при x - параметром формы (Табл. 1). Интенсивность отказа - вероятность отказа после момента времени t на единицу времени Δt при условии, что до момента t отказа объекта не было, определяется по формуле

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}. \tag{2.1}$$

Следовательно, интенсивность отказов - это отношение числа отказавших (погибших) объектов к объектам, которые еще не отказали (остались «живыми») в заданном интервале времени. Эта функция интенсивности отказов имеет U-образную форму, физический смысл которой в теории надежности заключается в следующем. На ранней стадии жизни объекта (в так называемый период приработки, или обкатки) риск его выхода из строя (отказ) достаточно велик (явление «детской смертности»), то есть функция $\lambda(x)$ имеет высокие значения. Далее интенсивность отказов уменьшается до определенного предела - у функции $\lambda(x)$ проявляется явная тенденция к убыванию (чаще всего она монотонно убывает). Это можно объяснить наличием объектов с явными и скрытыми дефектами, которые приводят к относительно быстрому выходу из строя этих изделий. Затем наступает более продолжительный период нормальной эксплуатации, характеризующийся приблизительно постоянной (не зависящей от времени) и сравнительно низкой интенсивностью отказов. Природа отказов в этот период носит внезапный характер (аварии, ошибки эксплуатационных работников и тому подобное) и не зависит от длительности эксплуатации единицы продукции. Далее интенсивность отказов вновь увеличивается из-за старения (износа) изделий. Природа отказов в этот период - в необратимых физико-механических и химических изменениях материалов, приводящих к прогрессирующему ухудшению качества продукции и окончательному полному выходу ее из строя.

Каждому периоду соответствует свой вид функции $\lambda(x)$. Рассмотрим класс степенных зависимостей

$$\lambda(x) = \lambda_0 m x^{m-1}, \tag{2.2}$$

где $\lambda_0 > 0$ и $m > 0$ - некоторые числовые параметры. Значения $m < 1$, $m = 0$ и $m > 1$ отвечают виду интенсивности отказов в периоды приработки, нормальной эксплуатации и старения соответственно. Следовательно, для $m < 1$ интенсивность отказов λ будет монотонно убывающей функцией, а при $m > 1$ - монотонно возрастающей (Рис. 2).

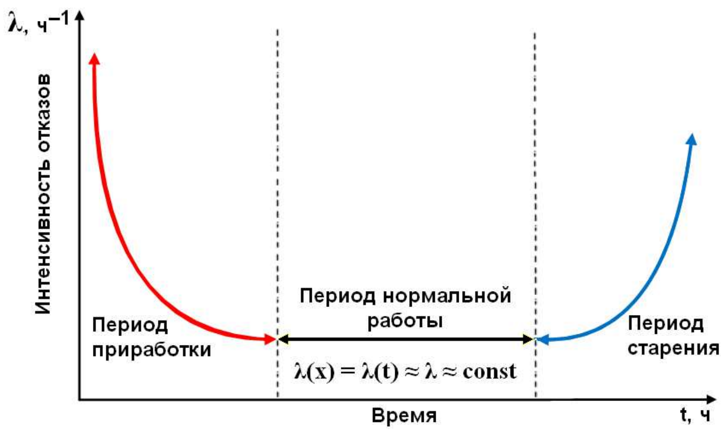


Рис. 2. Зависимость интенсивности отказов от времени

Соотношение (2.1) при заданной интенсивности отказа $\lambda(x)$ - дифференциальное уравнение относительно функции $F(x)$.

В первом приближении параметр формы m соответствует обратной величине коэффициента вариации выборки V [7] и определяется с помощью гамма-функции.

Особенностью распределения Вейбулла является то, что с изменением параметра формы m изменяется и характер зависимости показателей надежности от времени (рисунок в таблице 1). Благодаря этому, все периоды эксплуатации можно описать одним и тем же семейством распределения $f(x)$. Данное свойство распределения позволяет соответствующим подбором параметров λ и m обеспечить хорошее совпадение результатов опытных данных с аналитическими выражениями показателей распределения $f(x)$.

Экспоненциальное распределение - частный случай распределения Вейбулла-Гнеденко, соответствующий значению параметра формы $m = 1$.

6. **Гамма**-распределение применяется, если мода рассматриваемой случайной переменной не равна 0.

   Оно хорошо описывает многие ситуации в экономике и менеджменте, теории и практике надежности и испытаний, в различных областях техники, метеорологии и так далее. В частности, гамма-распределению подчинены такие величины, как общий срок службы изделия, длина цепочки токопроводящих пылинок, время достижения изделием предельного состояния при коррозии, время наработки до k-го отказа, $k = 1, 2, \ldots$, и так далее. Продолжительность жизни больных хроническими заболеваниями, время достижения определенного эффекта при лечении в ряде случаев имеют гамма-распределение. Это распределение наиболее адекватно для описания спроса в экономико-математических моделях управления запасами (логистики). На рисунке в таблице 1 приведено гамма-распределение с $\alpha = 2$, $\beta = 2$.

7. Так как при изучении отходообразования нас интересуют время выбытии изделий из эксплуатации и остаточный срок службы, здесь применимы еще два подхода, используемые в медицине, биологии, актуарной практике и в экономических науках при оценке материальных и нематериальных активов.

   При исследовании продолжительности жизни организмов составляются **таблицы времен жизни (смертности)**, содержащие данные о смертности за выбранные интервалы времени, и строятся кривые выживания или смерти (Рис. 3). Эти таблицы используются для расчета средней продолжительности жизни организма и вероятной продолжительности его жизни в любом возрасте. Более часто, чем обычная функция распределения, в этих методах используется так называемая функция выживания $s(t)$, представляющая собой вероятность того, что объект проживет время больше t:

$$s(t) = P(T > t) = 1 - F(t).$$

   Построение таблиц времен жизни, подгонка распределения выживаемости, оценивание функции выживания с помощью процедуры Каплана-Мейера являются описательными методами исследования цензурированных (неполных) данных.

   точки зрения статистики в анализе выживаемости участвуют три вида данных:

   - собственно время до наступления события - количественная переменная, выраженная в годах, месяцах, днях, часах и тому подобном;

   - индикатор события (цензор) - качественная переменная, указывающая, произошло ли основное событие;

   - факторы, влияющие на выживаемость, то есть, частоту и временное распределение событий.

   Таблица времен жизни (таблиц выживания, или демографических таблиц) представляет собой «расширенную» таблицу частот. Область возможных времен наступления критических событий (смертей, отказов и другого) разбивается на некоторое число интервалов. Для каждого интервала вычисляется число и доля объектов, которые в начале рассматриваемого интервала были «живы», число и доля объектов, которые «умерли» в данном интервале, а также число и доля объектов, которые были изъяты, или цензурированы в каждом интервале.

8. **Кривые Айова** (Survivor Iowa) - один из инструментов определения оставшегося срока службы. В инженерной практике и экономике используется сходный с предыдущим подход

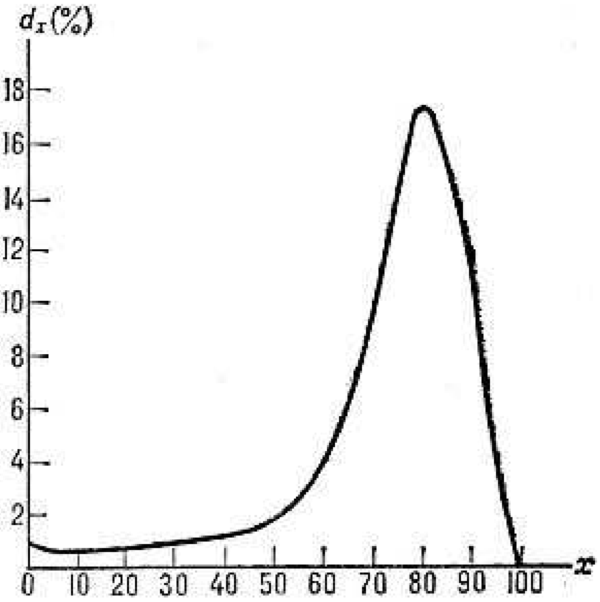


Рис. 3. Числа умирающих d_x (распределение населения по продолжительности жизни)

при наличии возрастных данных о выбывших из эксплуатации машинах и оборудовании для оценки выбытия и прогнозирования вероятных сроков службы аналогичных изделий, остающихся в эксплуатации.

По имеющимся данным строятся кривые выживаемости - нисходящие графики (или графики в форме перевернутой буквы S), отображающие количество единиц объектов определенного возраста, которые все еще действуют (активны) по сравнению с предыдущим возрастным интервалом [8]. Ординаты или значения по оси y кривой в любом конкретном возрасте, измеряемом по оси x, представляют процент или фактическое количество единиц в исходной группе объектов, которые все еще действуют (то есть находятся в эксплуатации) в этом возрасте. Построенная кривая выживаемости начинается со 100 процентов действующих объектов в нулевом возрасте и доходит до y процентов действующих объектов в возрасте x. Кривые выживаемости аналитического типа (теоретические кривые) получаются с помощью различных количественных методов изучения и анализа фактических данных о выбытии объектов. На рисунке 4 показано, какие характеристики и как можно определить по кривой выживаемости.

В результате исследований эмпирических данных, относящихся к характеристикам сохранивших работоспособность объектов промышленных и коммунальных предприятий многих различных видов, были построены оригинальные кривые выживаемости типа Айова. Эти данные включали эмпирические наблюдения в отношении: рельсовых шпал, крытых железнодорожных вагонов, телефонных столбов, станционного оборудования (например, телефонного оборудования), электрических трансформаторов и электропроводов, автомобилей, грузовых автомобилей коммерческого образца и так далее.

На основе 176 стандартных кривых выживаемости, построенных по эмпирическим данным, были выведены три оригинальных семейства или типа кривых Айова, в зависимости от того, где на кривой распределения вероятностей находится мода плотности распределения: слева от среднего срока службы - лево-модальные (L), симметрично - симметричные (S) или справа - право-модальные (R) (Рис. 5).

L-кривые характеризуются положительной асимметрией, длинным хвостом справа от моды и отрицательным старением объектов, то есть объекты выбывают из эксплуатации более интенсивно до достижения своего среднего срока службы. Чем дольше объект эксплуатируется, тем меньше вероятность того, что он выйдет из строя, то есть здесь функция риска уменьшается при больших значениях t. Это имеет смысл, когда отдельные компоненты объекта различаются по качеству: плохо сделанные компоненты обычно выбывают рано, поэтому все, что находится в эксплуатации в течение длительного времени, веро-

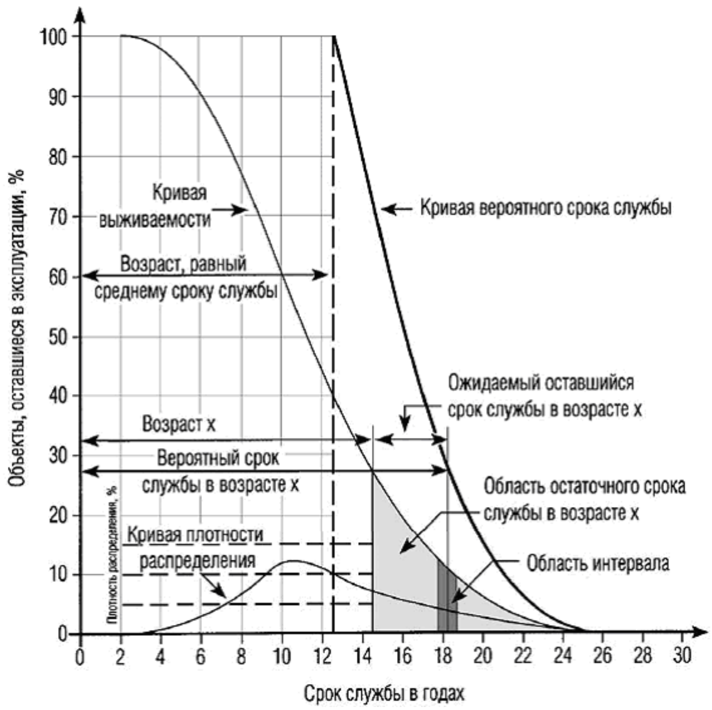


Рис. 4. Числа умирающих d_x (Кривая выживаемости объектов [8])

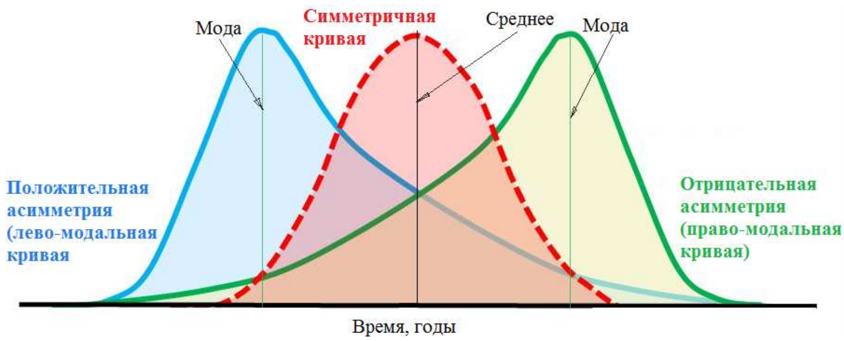


Рис. 5. Различные типы кривых выживаемости

ятно, является особенно прочным и, как правило, будет дольше жить. Такому распределению могут быть также подвержены объекты, различающиеся по условиям эксплуатации и защитным (ремонтным) мероприятиям (Рис. 6), например, обработанные деревянные покрытия служат гораздо дольше необработанных, свесы на крышах защищают стены от действия осадков и прямых солнечных лучей, коррозия быстрее разъедает незащищенный металл и тому подобное.

S-кривые симметричны относительно среднего значения кривой в форме колокола и предсказывают, что объекты будут выбывать с одинаковым темпом в любом заданном возрасте по обе стороны от среднего срока службы.

Для R-кривых характерны отрицательная асимметрия, длинный хвост слева от моды и положительное старение объектов, то есть объекты выбывают из эксплуатации в основном после достижения среднего срока службы, а функция риска возрастает при больших значениях t. Чем дольше объект находится в эксплуатации, тем больше вероятность выбытия, что имеет интуитивный смысл, потому что чем дольше материал используется, тем больше он изнашивается. Большинству объектов свойственна право-модальная тенденция, то есть минимальное выбытие в начале, но более высокий темп (более короткое время) выбытия после достижения среднего срока службы.

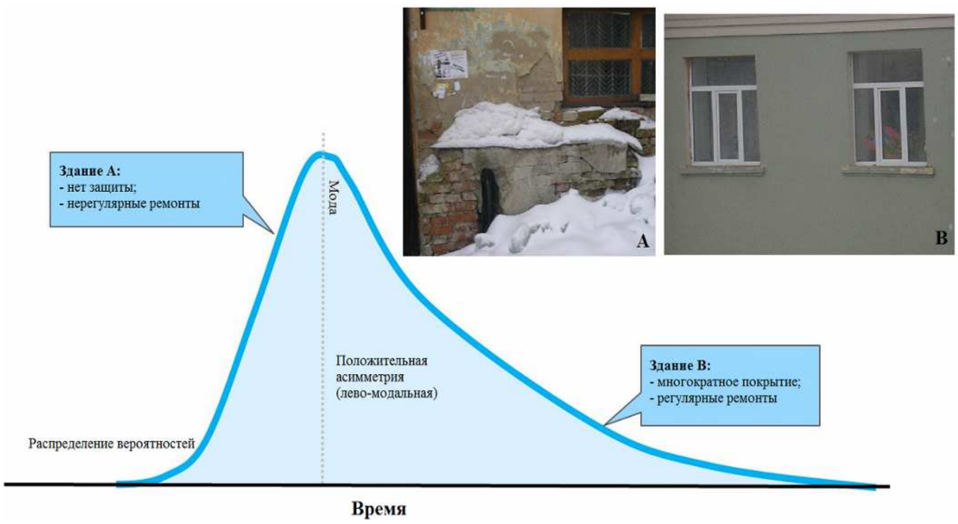


Рис. 6. Лево-модальная кривая

Чтобы из приведенных вероятностных законов подобрать распределение, достаточно точно описывающее процессы отходообразования, необходимо произвести подгонку, то есть, имея значения переменной X (время эксплуатации, остаточный срок службы и тому подобное), проверить гипотезу, согласно которой реальное распределение X описывается теоретическим вероятностным законом F. При строгом математическом анализе конкурирующих формул подгонка параметров может осуществляться двумя основными методами: методом максимального правдоподобия и методом моментов. Выбор того или иного распределения обусловлен характером воздействующих физических процессов, наличием исходной информации и используемыми численными методами.

Если заданный уровень согласованности достигнут, то задача считается решенной, а если нет, то шаги повторяются снова, начиная с первого шага, на котором выбирается другой вид закона, или начиная со второго - путем некоторого уточнения параметров распределения.

3. Скорость образования отходов и вероятностные модели

Как отмечалось выше, срок службы тесно связан с процессом выбытия из эксплуатации объектов по мере достижения ими предельного состояния. Выбытие объектов (изделий) вызывают различные силы, приводящие в итоге к общему процессу отходообразования. Следовательно, жизненный цикл изделия представляет функциональную зависимость между службой изделия (зависимой переменной) и временем (независимой переменной). Под службой будем понимать безотказную работу, или долю изделий, остающихся работоспособными в течение определенного времени.

Когда мы рассматриваем постепенное образование отходов из изделий, мы можем опираться только на статистические данные о ежегодном выпуске (+ экспорт - импорт) продукции определенной номенклатурной принадлежности, которая затем переходит в отходы. У нас нет, во-первых, реального распределения времени выбытия из эксплуатации, и, во-вторых, полной исходной информации об отходах. Поэтому приходится ориентироваться не на строгое математическое обоснование характера распределения, а только на известную из литературных источников применимость определенных вероятностных законов к процессам жизненного цикла объектов.

Обычно априорно считается, что эмпирическое распределение подчиняется нормальному закону, и решение задачи аппроксимации начинается с проверки гипотезы нормальности. Для этого оцениваются такие параметры, как симметричность распределения (нормальное распределение абсолютно симметрично, то есть асимметрия, показывающая отклонение распределения от симметричного, $As = 0$ (Табл. 1)), острота пика - эксцесс (для нормального распределения $Ex = 0$).

В нашем случае нормальное распределение будет хуже отражать описываемый процесс, так как, во-первых, исходя из здравого смысла, графики времени службы изделий и скорости отходообразования не будут симметричными. Во-вторых, аргумент (значение x) графика плотности вероятностей нормального распределения (также как и равномерного) может иметь как положительные, так и отрицательные значения (рисунок Нормального распределения в таблице 2.3). Однако срок службы изделий, от которого зависит скорость отходообразования, не может быть отрицательной величиной. В-третьих, нормальное распределение свидетельствует о равной вероятности для значений переменной отклониться вверх или вниз. В то же время на практике, например, имеет место устаревание объектов, которое оказывает давление на количество образующихся отходов в сторону их увеличения. Кроме того, у отходов есть временная сущность: сегодня отходов становится больше, чем было вчера, но их меньше, чем будет завтра.

Экспоненциальный закон распределения, называемый также основным законом надёжности, часто используют для прогнозирования надёжности в период нормальной эксплуатации изделий, когда постепенные отказы в результате ухудшения состояния (изнашивание, усталость поверхности и так далее) ещё не проявились, и надёжность характеризуется внезапными отказами. Эти отказы вызываются неблагоприятным стечением многих обстоятельств и поэтому имеют постоянную интенсивность. Экспоненциальное распределение находит довольно широкое применение в теории массового обслуживания, описывает распределение наработки на отказ сложных изделий, время безотказной работы элементов радиоэлектронной аппаратуры, которые могут выходить из строя не из-за старости, а, например, из-за повреждения контактов при внешней вибрации и тому подобного.

Для оценки отходообразования экспоненциальный закон не применим, несмотря на то, что он прост для практического применения. Помимо того, что экспоненциальное распределение описывает редкие события, оно также имеет моду - наиболее часто встречающееся значение случайной величины, равную 0 (рисунок Экспоненциального распределения в таблице 2.3). Но нам заранее известно, что у нас $Mo \neq 0$, так как скорость образования отходов в какой-то момент времени будет максимальной. Кроме того, при экспоненциальном распределении коэффициент вариации равен единице и вероятность событий постоянна, а у нас она меняется с течением времени. Также вероятность события в случае экспоненциального распределения зависит только от длительности интервала и не зависит от времени предшествующей работы, а у нас остаточный срок службы зависит от того, сколько объект уже прожил и от этого же зависит скорость образования отходов.

По той же самой причине не применим и часто используемый в биологии закон смертности Гомпертца-Мейкхама, также представляющий экспоненциальное распределение. Согласно закону Гомпертца-Мейкхама вероятность смерти за фиксированный короткий промежуток времени после достижения возраста x составляет:

$$p = a + bx,$$

где p - относительная вероятность смерти за определённый промежуток времени, x - возраст, a - коэффициент, не зависящий от возраста компонент смертности (фоновая смертность при экстремальных ситуациях, авариях и тому подобном), b - коэффициент, зависящий от возраста (старение, износ). Таким образом, размер популяции снижается с возрастом по удвоенной экспоненте:

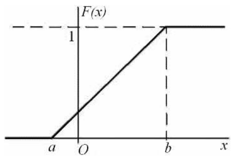
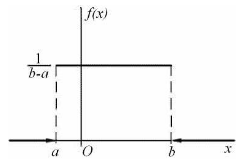
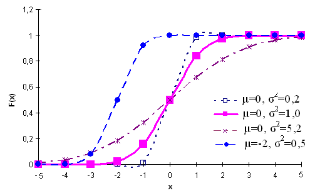
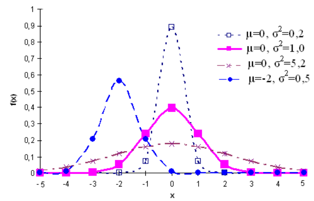
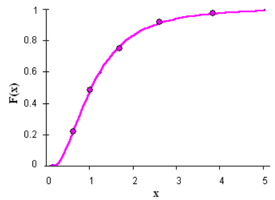
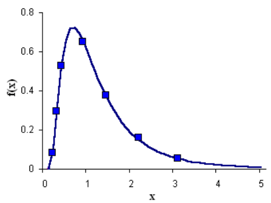
$$s(x) = \exp\left[-m(b^x + c)\right].$$

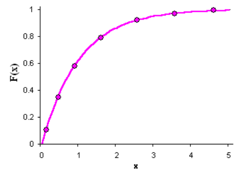
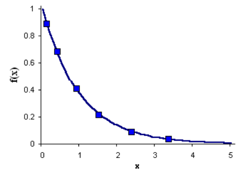
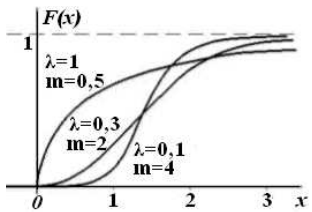
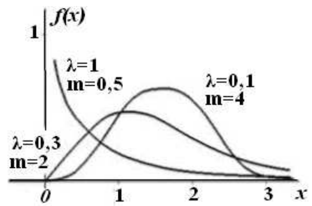
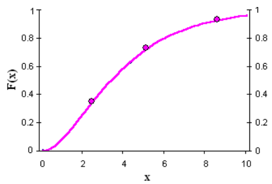
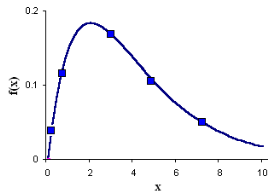
Закон смертности Гомпертца-Мейкхама наилучшим образом описывает динамику смертности человека в диапазоне возраста 30-80 лет. В области большего возраста смертность не возрастает так быстро, как предусматривается этим законом смертности.

Кривые выживаемости, используемые в демографии, и кривые Айова, применяемые для прогнозирования вероятных сроков службы объектов, строятся по имеющимся возрастным данным выбывающих (умирающих) объектов. В этом случае анализ должен проводиться следующим образом:

- событие = переход изделия в отходы (выбытие из эксплуатации);
- точка отсчета = дата производства;
- шкала времени = возраст (годы, месяцы, дни);
- T = возраст перехода в отходы;
- график = $P(T > t)$ в зависимости от t.

Таблица 1. Вероятностные распределения (m_i - начальные моменты порядка i)

Тип распределения	**Функция вероятности** $P(x)=F(x)$	**Функция плотности распределения** $f(x)$	**Математическое ожидание** $M(x)=m_1$, **дисперсия** $D(x)=m_2(x-M(x))$, **асимметрия** $As=b_1=m_3/m_2^{3/2}$, **эксцесс** $Ex(x)=b_2=m_4/m_2^2$.
Равномерное	 $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x<a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } a\le x\le b; \\ 1, & \text{если } x>b. \end{cases}$	 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } a\le x\le b; \\ 0, & \text{если } x<a \text{ или } x>b. \end{cases}$	$M(x)=(a+b)/2$; $D(x)=(b-a)^2/12$; $As(x)=0$; $Ex(x)=-1,2$; $Me(x)=(a+b)/2$; $V(x)=(d-c)/\sqrt{3}(d+c)$.
Нормальное (Гаусса)	 $F(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$	 $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty<x<\infty$	$M(x)=\mu;\ -\infty\le\mu\le\infty$; $D(x)=\sigma^2$; $As(x)=0$; $Ex(x)=0$; $Mo(x)=\mu$; $Me(x)=\mu$.
Логарифмически нормальное $X=e^Y$	 $F(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\ln x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx, \quad 0<x<+\infty$	 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x>0; \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$	$M(x)=e^{\frac{\sigma^2}{2}+\mu}$; $D(x)=(e^{\sigma^2}-1)e^{\sigma^2+2\mu}$; $As(E)=(e^{\sigma^2}+2)\sqrt{e^{\sigma^2}-1}$; $Ex(x)=e^{4\sigma^2}+2e^{3\sigma^2}+3e^{2\sigma^2}-6$; $Mo(x)=e^{\mu-\sigma^2}$; $Me(x)=e^{\mu}$.

Тип распределения	**Функция вероятности** $P(x) = F(x)$	**Функция плотности распределения** $f(x)$	**Математическое ожидание** $M(x) = m_1$, **дисперсия** $D(x) = m_2(x - M(x))$, **асимметрия** $As = b_1 = m_3 / m_2^{3/2}$, **эксцесс** $Ex(x) = b_2 = m_4 / m_2^2$.
Экспоненциальное (частный случай распределения Вейбулла)	 $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0,\ \lambda = 1/\mu. \end{cases}$	 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	$M(x) = 1/\lambda$; $D(x) = 1/\lambda^2$; $As(x) = 2$; $Ex(x) = 6$; $Me(x) = \ln 2/\lambda$; $Mo(x) = 0$.
Вейбулла $\lambda(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$, $\lambda(x) = \frac{b}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{b-1}$	 $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x^m}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0,\ \lambda > 0,\ m > 0. \end{cases}$	 $f(x) = \begin{cases} \lambda m x^{m-1} e^{-\lambda x^m}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	$M(x) = \lambda^{-1/m}\Gamma(1 + 1/m)$; $D(x) = \lambda^{-2/m}\Gamma(1 + 2/m) - M(x)^2$; $As(x) = \frac{\Gamma(1+\frac{3}{m})\lambda^3 - 3\mu\Gamma(1+\frac{2}{m})\lambda^2 - 2\mu^3}{\sigma^3}$; $Me(x) = \lambda \ln 2^{1/m}$; $Mo(x) = \frac{\lambda^{-1/m}(m-1)^{1/m}}{m^{1/m}}$, для $m > 1$.
Гамма $\Gamma(\alpha, \beta)$ $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$	 $F(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ x \geq 0$	 $f(x) = \begin{cases} x^{\alpha-1} \frac{e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$	$M(x) = \alpha\beta$; $D(x) = \alpha\beta^2$; $As(E) = 2/\sqrt{\alpha}$; $Ex(x) = 6/\alpha$; $Mo(x) = (\alpha - 1)\beta$, при $\alpha \geq 1$.

При применении данного подхода к оценке изделий, переходящих в отходы, то есть к оценке количества выбывающих изделий, мы должны строить не кривые выживания (распределение функции выживания), а кривые смертности, либо пользоваться уже имеющимися кривыми. Но для создания таких таблиц времен достижения предельного состояния для изделий и построения по ним кривых выбытия по подобранной функции распределения у нас нет исходной статистической информации по фактическому количеству выбывших («умерших»), либо продолжающих эксплуатироваться изделий в определенном году. Мы об этом можем судить лишь косвенно, по вновь выпускаемой и экспортируемой продукции данного класса. Но, опять-таки, эти данные не совсем точные, так как производство идет не только на восполнение продукции, вышедшей из строя, но либо на расширенное воспроизводство для удовлетворения все возрастающей потребности рынка в этой продукции, либо на спад, из-за вытеснения определенных изделий совершенно другими, более соответствующими новым достижениям науки и техники (мобильные телефоны заменили пейджеры).

Интенсивность отказов из-за скрытых дефектов в начальный период эксплуатации можно свести к минимуму за счет технологического прогона изделий и изъятия бракованных, что приводит к увеличению надежности оставшейся продукции [9]. С одной стороны, это не должно сказываться на количестве отходов, так как какая разница, в результате чего появился отход - при производстве или эксплуатации, главное, что он появился. С другой стороны, на предприятии-изготовителе бракованное изделие можно отремонтировать, либо превратить во вторичный материальный ресурс, следовательно, количество отходов из-за бракованных изделий на производстве не увеличится.

Далее мы остановимся более подробно на часто используемых в теории надежности вероятностных распределениях.

4. Выбор вида закона распределения для оценки образования отходов

Чтобы можно было воспользоваться вероятностными законами распределения и суметь в дальнейшем применить выбранную модель для расчета количества конкретного вида отходов, необходимо иметь значения каких-то определенных величин, входящих в выражение, описывающее ту или иную функцию. К таковым можно отнести средний срок службы объекта, представляющий собой математическое ожидание и обозначаемое $M(x)$, и коэффициент вариации $V = \dfrac{\sqrt{D(x)}}{M(x)}$, где D - дисперсия.

Средний срок службы объекта может устанавливаться, например, по нормативным документам, в частности, распределяющим все изделия по амортизационным группам. Коэффициент вариации взят нами из литературных источников: для машин и оборудования составляет 0,3-0,4 [10].

4.1. Логарифмически-нормальное распределение

Логнормальное распределение имеет вид (Табл. 1):

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^{\ln x} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

У этого распределения дисперсия $D(x) = (\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1)\mathrm{e}^{\sigma^2+2\mu}$ и математическое ожидание (средний срок службы) $M(x) = \mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}+\mu}$.

Тогда

$$D(x) = V^2 M^2(x), \qquad (\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1)\mathrm{e}^{\sigma^2+2\mu} = V^2 \mathrm{e}^{2\left(\frac{\sigma^2}{2}+\mu\right)},$$

$$(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1) = V^2, \qquad \mathrm{e}^{\sigma^2} = 1 + V^2.$$

В нашем случае, для $V = 0,3 - 0,4$:

$$\sigma^2 = \ln\left(1 + V^2\right) = 0,086 \div 0,148, \qquad \sigma = 0,294 \div 0,385.$$

Далее из определения математического ожидания получим:

$$M = \mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}}\mathrm{e}^{\mu}, \qquad \ln M = \frac{\sigma^2}{2} + \mu.$$

Таким образом, для параметра μ имеем следующее выражение через M и V:

$$\mu = \ln M - \frac{\sigma^2}{2}, \qquad \mu = \ln M - \frac{1}{2}\ln\left(1 + V^2\right) = \ln\frac{M}{\sqrt{1+V^2}}.$$

Для дисперсии имеем:

$$D(x) = (\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1)\mathrm{e}^{\sigma^2 + 2\mu} = \left(1 + V^2 - 1\right)\left(1 + V^2\right)\mathrm{e}^{2\ln\frac{M}{\sqrt{1+V^2}}} = V^2\left(1 + V^2\right)\frac{M^2}{\left(1 + V^2\right)} = M^2V^2.$$

Подставляя выражение для $\mu = \ln\dfrac{M}{\sqrt{1+V^2}}$ в выражение для функции плотности вероятности, получим:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\ln x - \ln\frac{M}{\sqrt{1+V^2}}\right)^2}{2\sigma^2}}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\ln\frac{x\sqrt{1+V^2}}{M}\right)^2}{2\sigma^2}}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

При использовании параметров M, V, имеем следующие выражения:
- для моды:

$$Mo(x) = \mathrm{e}^{\mu - \sigma^2} = \frac{\mathrm{e}^{\mu}}{\mathrm{e}^{\sigma^2}} = \frac{\mathrm{e}^{\ln\frac{M}{\sqrt{1+V^2}}}}{1 + V^2} = \frac{M}{\sqrt{\left(1 + V^2\right)^3}};$$

- для медианы:

$$Me(x) = \mathrm{e}^{\mu} = \mathrm{e}^{\ln\frac{M}{\sqrt{1+V^2}}} = \frac{M}{\sqrt{1+V^2}};$$

- для коэффициента асимметрии:

$$As(x) = (\mathrm{e}^{\sigma^2} + 2)\sqrt{\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1} = (1 + V^2 + 2)\sqrt{1 + V^2 - 1} = \left(3 + V^2\right)V;$$

- для коэффициента эксцесса:

$$Ex(x) = \mathrm{e}^{4\sigma^2} + 2\mathrm{e}^{3\sigma^2} + 3\mathrm{e}^{2\sigma^2} - 6 = \left(1 + V^2\right)^4 + 2\left(1 + V^2\right)^3 + 3\left(1 + V^2\right)^2 - 6.$$

Для конкретных значений $V_1 = 0,3$ и $V_2 = 0,4$ получим следующие характеристики распределения:

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{3,406}{x\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\ln\frac{1,044x}{M}\right)^2}{0,172}}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{2,596}{x\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\ln\frac{1,077x}{M}\right)^2}{0,297}}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$D_1(x) = 0,09M^2, D_2(x) = 0,16M^2.$$

$$Mo_1(x) = 0,879M, Mo_2(x) = 0,8M.$$

$$Me_1(x) = 0,958M, Me_2(x) = 0,928M^2.$$

$$As_1(x) = 0,927, As_2(x) = 1,264.$$

$$Ex_1(x) = 1,566, Ex_2(x) = 2,969.$$

Таким образом, кривая логнормального распределения принимает ненулевые значения только при положительном значении аргумента x и имеет правостороннюю скошенность (асимметрию). Короткий «хвост» слева и длинный «хвост» справа свидетельствуют о более высокой скорости отходообразования справа от моды, чем слева, в то время как для нормального распределения скорости отходообразования с обеих сторон моды равны. Но, как мы уже убедились при рассмотрении кривых Айова, асимметрия дифференциальной функции распределения скорости отходообразования может быть не только лево-, но и правомодальной. Следовательно, логнормальное распределение не отражает должным образом распределение рассматриваемой случайной переменной.

4.2. Гамма-распределение

Гамма-распределение имеет вид (Табл. 1):

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^x x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x/\beta} dx, & \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}, \qquad f(x) = \begin{cases} x^{\alpha-1} \dfrac{\mathrm{e}^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

У этого распределения дисперсия $D(x) = \alpha\beta^2$ и математическое ожидание $M(x) = \alpha\beta$. Тогда в нашем случае:

$$D(x) = V^2 M^2(x), \qquad \alpha\beta^2 = V^2 \alpha\beta,$$

$$\beta = V^2, \qquad \beta = 0,09 \div 0,16,$$

где D - дисперсия, M - математическое ожидание (средний срок службы).
Далее из определения математического ожидания получим:

$$M = \alpha\beta, \qquad M = \alpha V^2, \qquad \alpha = \frac{M}{V^2}.$$

Для дисперсии имеем:

$$D(x) = V^2 M^2.$$

Подставляя выражение для $\alpha = \dfrac{M}{V^2}$, $\beta = V^2$ в выражение для функции плотности вероятности, получим:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{V^{2\frac{M}{V^2}} \Gamma\left(\frac{M}{V^2}\right)} \displaystyle\int_0^x x^{\frac{M}{V^2}-1} \mathrm{e}^{-x/V^2} dx, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}, \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{V^{2\frac{M}{V^2}} \Gamma\left(\frac{M}{V^2}\right)} x^{\frac{M}{V^2}-1} \mathrm{e}^{-x/V^2}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Для моды имеем следующее выражение через параметры M, V:

$$Mo(x) = (\alpha - 1)\beta = \left(\frac{M}{V^2} - 1\right) V^2 = M - V^2 \quad \text{при} \quad \frac{M}{V^2} > 1.$$

Для коэффициента асимметрии имеем:

$$As(x) = 2/\sqrt{\alpha} = 2V/\sqrt{M}.$$

Для коэффициента эксцесса имеем:

$$Ex(x) = 6/\alpha = 6V^2/M.$$

Для конкретных значений $V_1 = 0,3$ и $V_2 = 0,4$ получим следующие характеристики распределения:

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{M}{0,09}-1}\,\mathrm{e}^{-x/0,09}}{0,3^{2\frac{M}{0,09}}\,\Gamma\left(\frac{M}{0,09}\right)}, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}, \qquad f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{M}{0,16}-1}\,\mathrm{e}^{-x/0,16}}{0,4^{2\frac{M}{0,16}}\,\Gamma\left(\frac{M}{0,16}\right)}, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$D_1(x) = 0,09M^2, D_2(x) = 0,16M^2.$$

$$Mo_1(x) = M - 0,09, Mo_2(x) = M - 0,16.$$

$$As_1(x) = 0,6/\sqrt{M}, As_2(x) = 0,8/\sqrt{M}.$$

$$Ex_1(x) = 0,54/M, Ex_2(x) = 0,96/M.$$

Таким образом, выражение для моды показывает, что кривая гамма-распределения является левомодальной, что, как и в случае с логнормальным распределением, не соответствует характеристикам отходообразования. Следовательно, гамма-распределение неадекватно отражает распределение рассматриваемой случайной переменной.

4.3. Распределение Вейбулла

Распределение Вейбулла имеет вид (Табл. 1):

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^m}, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}, \qquad f(x) = \begin{cases} \lambda m x^{m-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda x^m}, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Представим плотность распределения вероятностей как функцию среднего срока службы μ и коэффициента вариации V, где:

$$V = \frac{\sqrt{D(x)}}{M(x)} = \frac{\sigma}{\mu}; \quad \sigma = V\mu; \quad D = \sigma^2 = V^2\mu^2.$$

$$D = \lambda^{-\frac{2}{m}}\,\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) - \mu^2; \quad \mu = \lambda^{-\frac{1}{m}}\,\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

Тогда, приравнивая различные выражения для D, получаем:

$$\lambda^{-\frac{2}{m}}\,\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) = \left(1 + V^2\right)\mu^2.$$

Таким образом, имеем следующие уравнения для определения параметров распределения λ, m через μ:

$$\begin{cases} \lambda^{-\frac{2}{m}}\,\Gamma\left(1 + \dfrac{2}{m}\right) = \left(1 + V^2\right)\mu^2; \\ \lambda^{-\frac{1}{m}}\,\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \mu. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем:

$$\frac{\left(1 + V^2\right)\mu^2}{\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right)} = \left(\frac{\mu}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)}\right)^2 \quad \text{или} \quad \frac{\left(1 + V^2\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right)} = \frac{1}{\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right)^2}.$$

Таким образом, параметр m является функцией от коэффициента вариации V. Решая численно это уравнение, получим зависимость $m(V)$.

Тогда функция плотности распределения вероятностей как функция μ , V имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m(V)}\right)}{\mu}\right)^{m(V)} m(V)\,x^{m(V)-1}\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m(V)}\right)}{\mu}\right)x^{m(V)}}, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Выразим параметр λ через M и V:

$$\lambda^{-\frac{1}{m}} = \frac{M}{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)}, \qquad \lambda = \left(\frac{M}{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)}\right)^{-m},$$

тогда для моды имеем выражение:

$$Mo(x) = \frac{\lambda^{-1/m}(m-1)^{1/m}}{m^{1/m}} = \frac{M}{\Gamma\left(1+\frac{1}{m(V)}\right)} \frac{(m(V)-1)^{1/m(V)}}{m(V)^{1/m(V)}} = Mf\left(m(V)\right),$$

где

$$f\left(m\left(V\right)\right) = \frac{\left(m\left(V\right)-1\right)^{1/m(V)}}{m\left(V\right)^{1/m(V)}\Gamma\left(1+\frac{1}{m(V)}\right)},$$

а функция $m(V)$ определяется из решения нелинейного уравнения

$$\frac{\left(1+V^2\right)}{\Gamma\left(1+\frac{2}{m}\right)} = \frac{1}{\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)\right)^2}.$$

Если функция $f\left(m(V)\right) > 1$, то мода смещена вправо от математического ожидания, если эта функция меньше 1, то мода смещена влево. График этой функции представлен на рисунке 7. Как видно из графика, только в области $0 < V \lesssim 0,33$ мода находится правее, в остальных случаях она расположена левее. Из этого графика также видно, что правостороннее смещение не превосходит определенного значения $< 1,1$.

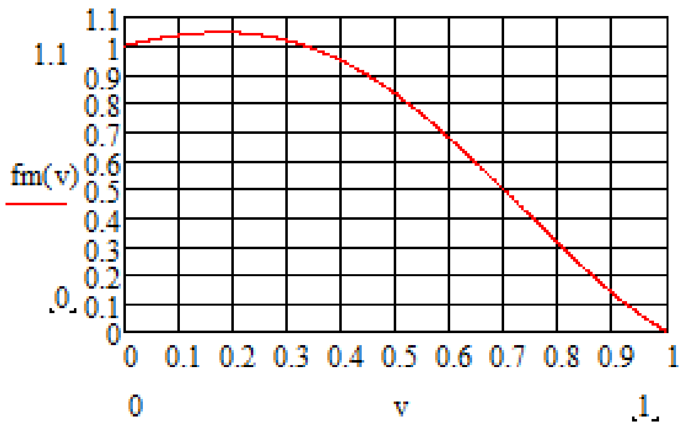


Рис. 7. График зависимости $f(m(V))$

Следовательно, кривые могут быть как левомодальными, так и правомодальными.

При использовании параметров M, V, имеем следующие выражения:

- для коэффициента асимметрии:

$$As = \frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{m}\right)\lambda^3 - 3\mu\Gamma\left(1+\frac{2}{m}\right)\lambda^2 - 2\mu^3}{\sigma^3}$$

или

$$As = \frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{m(V)}\right)\left(\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m(V)}\right)}{M}\right)^{3m(V)} - 3M\Gamma\left(1+\frac{2}{m(V)}\right)\left(\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m(V)}\right)}{M}\right)^{2m(V)} - 2M^3}{V^3M^3};$$

- для медианы:

$$Me = \lambda \ln 2^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m(V)}\right)}{M}\right)^{m(V)} \ln 2^{\frac{1}{m(V)}};$$

- для коэффициента эксцесса:

$$Ex = \left(\left(\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m(V)}\right)}{M} \right)^{4m(V)} \Gamma\left(1+\frac{4}{m(V)}\right) - 4 \left(\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m(V)}\right)}{M} \right)^{3m(V)} M\Gamma\left(1+\frac{3}{m(V)}\right) + \right.$$

$$\left. +6 \left(\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m(V)}\right)}{M} \right)^{2m(V)} M^2\Gamma\left(1+\frac{2}{m(V)}\right) - 3M^4 \right) / \left(V^4 M^4\right).$$

Для конкретных значений $V_1 = 0,3$ и $V_2 = 0,4$ получим следующие характеристики распределения:

- дисперсия:
$D_1(x) = 0,09M^2$, $D_2(x) = 0,16M^2$.

- мода:
$Mo_1(x) = 1,018M$, $Mo_2(x) = 0,947M$.

- медиана:
$Me_1(x) = 0,817819M$, $Me_2(x) = 0,776206M^2$.

- коэффициент асимметрии
$As_1(x) = -0,0260637$, $As_2(x) = 0,276674$.

- коэффициент эксцесса
$Ex_1(x) = -0,276598$, $Ex_2(x) = -0,212588$.

Заключение

Исходя из изложенных выше рассуждений, сфер применения различных законов распределения и графиков этих распределений (Табл. 1), для вероятностной оценки скорости отходообразования наиболее подходит распределение Вейбулла.

Можно видеть, что закон Вейбулла удовлетворяет также всем описанным ранее принципам выбора между конкурирующими законами распределения срока службы:

- он теоретически обоснован, так как выводится из математических моделей теории надежности машин и оборудования; его функция распределения всегда неотрицательна, что соответствует физическому смыслу срока службы. С его помощью можно оперировать менее громоздкими массивами данных о сроке службы объектов и корректно интерпретировать получаемую информацию;

- он универсален, поскольку описывает распределения сроков службы самых разных объектов;

- он соответствует принципу полного описания, так как семейство распределений Вейбулла описывает все периоды эксплуатации изделий, независимо от того, что вероятность выбытия меняется с течением времени;

- он отвечает принципу достаточной аппроксимации при наименьшем числе параметров - нормативном сроке службы, известном практически для всех изделий, и коэффициенте вариации срока службы (случайной величины), который можно принять, согласно многочисленным исследованиям по теории машин, равным 0,3-0,4 [10].

Благодаря вышеперечисленному, можно считать, что семейство распределений Вейбулла применимо в качестве инструмента при оценке количества образующихся за год отходов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилов-Данильян В.И., Лосев К.С., Рейф И.Е. Перед главным вызовом цивилизации. Взгляд из России. М.: Инфра-М, 2005. 224 с.

2. Найман С.М. Системный анализ и альтернативная оценка отходов: монография. Казань: Ихлас, 2016. 185 с.

3. Лейфер Л.А., Кашникова П.М. Определение остаточного срока службы машин и оборудования на основе вероятностных моделей // Имущественные отношения в Российской Федерации. 2008. № 1 (76). С. 66-79.

4. Федяков И.В. Электроэнергетика: износ оборудования как системная проблема отрасли // Академия Энергетики. 2013. № 1 (51). С. 4-9.

5. Социально-экономические показатели Российской Федерации в 1991-2013 гг. (приложение к сборнику «Российский статистический ежегодник. 2014») // Официальный сайт Росстата. URL: http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1270707126016

6. Цветков В.А., Аносова Л.А., Зоидов К.Х., Большаков А.В. Мониторинг экономического развития России в период с 1991 по 2010 гг.: опыт циклического анализа макроэкономической динамики // Annual Report on BRICS' Social-Economic Development Sciences Academic Press. 2011. 39 с. URL: http://www.ipr-ras.ru/articles/brics-2011-ch3.pdf

7. Ефремов Л.В. Практика вероятностного анализа надежности техники с применением компьютерных технологий. СПб.: Наука, 2008. 216 с.

8. Рейли Р., Швайс Р. Оценка нематериальных активов. М.: Квинто-Консалтинг, 2005. 792 с.

9. ГОСТ 23502-79 Обеспечение надежности на этапе производства. Технологический прогон изделий бытового назначения. М.: Госстандарт СССР, 1979. 21 с.

10. Надежность и эффективность в технике. Справочник в 10 томах. М.: «Машиностроение», 1987.

Поступила в редакцию 12.12.2016

Найман Софья Михайловна, к. б. н., профессор, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ, 420111, Россия, г. Казань, ул. К.Маркса, 10.
E-mail: nsofa@rambler.ru

Вачагина Екатерина Константиновна, д. т. н., профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории теплофизических исследований, Казанский научный центр Российской академии наук, 420111, Россия, г. Казань, ул. Лобачевского, д. 2/3.
E-mail: vachaginae@mail.ru

S. M. Nayman, E. K. Vachagina
Probability laws and waste generation

Keywords: probability laws, product life cycles, waste, model of waste generation, Weibull distribution.

The paper deals with the life cycle of objects and exit of products out of service. It is shown that the transition facilities in the waste can be described by probability models. A comparative analysis of different types of distributions of continuous random variables was conducted to select the best approximation of the real distribution of product life: normal, lognormal, exponential, Weibull, gamma distribution, demographic tables, Gompertz-Makeham law of mortality, Iowa curves. The study of the form and function parameters of these distributions showed that the probabilistic assessment waste generation speed more suited Weibull law.

REFERENCES

1. Danilov-Danil'yan V.I., Losev K.S., Reyf I.E. *Pered glavnym vyzovom tsivilizatsii. Vzglyad iz Rossii* (Before the main challenge of civilization. A View from Russia), Moskow: INFRA-M, 2005, 224 p.

2. Nayman S.M. *Sistemnyi analiz i al'ternativnaya otsenka othodov: monografiya* (System analysis and alternative evaluation of waste: monograph), Kazan: Ihlas, 2016, 185 p.

3. Leifer L.A., Kashnikova P.M. Determination of the residual life of machinery and equipment based on probabilistic models, *Imushchestvennyye otnosheniya v Rossiyskoy Federatsi*i, 2008, no. 1 (76), pp. 66-79.

4. Fedyakov I.V. Electric power industry: wear equipment as a systemic problem the industry, *Energoacademy*, 2013, no. 1 (51), pp. 4-9.

5. Social and Economic indicators of the Russian Federation: 1991 - 2013 (Appendix to the "Statistical Yearbook of Russia. 2014"), *Russian Federal State Statistics Service*. URL: http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1270707126016.

6. Tsvetkov V.A., Anosova L.A., Zoidov K.Kh., Bolshakov A.V. Russia's social and economic development: retrospect and prospect, *Annual Report on BRICS' Social-Economic Development*, 2011, Ed. by Lin Yueqin, Zhou Wen. Social Sciences Academic Press. 2011-04-01 (in Chinese), pp. 111-169.

7. Efremov L.V. Computerized Analyses of Reliability of Mechanics, *Theory and Practice*, St. Petersburg: Nauka, 2008, 216 p.

8. Reilly R., Schweihs R. *Otsenka nematerial'nyh aktivov* (Valuing Intangible Assets), McGraw Hill Professional, 1999, 518 p.

9. GOST 23502-79 Reliability assurance at the manufacturing stage. Technological burn-in of the consumer's goods. Moskow: Goskomstat of Soviet Union, 1979, 21 p.

10. The reliability and the effectiveness of the technique. Directory in 10 volumes. Moskow: 1987.

Received 12.12.2016

Nayman Sofya Mikhailovna, Ph. D, Professor, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev, K. Marx st. 10, Kazan, 420111, Russia.
E-mail: nsofa@rambler.ru

Vachagina Ekaterina Konstantinovna, Doctor of Engineering Sciences, Head of Laboratory Thermophysical investigation, Professor, Kazan scientific center Russian Academy of Sciences, Lobachevskogo st. 2/3, Kazan, 420111, Russia.
E-mail: vachaginae@mail.ru