

УДК 539.376; 004.94:517/519

М. Н. Курсанов¹**ПРИКЛАДНЫЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ СТАБИЛЬНОСТИ**

Обсуждается постановка и физический смысл задач теории стабильности. Приводятся примеры нелинейных физических задач различной природы, дифференциальные уравнения которых допускают вырожденные связи между производными функций, приводящее к нестабильности.

Ключевые слова: стабильность, начальная задача, дифференциальное уравнение, нелинейность.

PACS: 83.00.00

Введение

Традиционное решение задач механики следует классической схеме: явление — модель — дифференциальное уравнение модели — решение уравнения — анализ решения. Предполагается, что решение уравнения описывает все свойства данной модели явления, следующие из уравнения. В тех случаях, когда результаты теоретических исследований не сходятся с экспериментом, исследователь уточняет или меняет модель, или уточняет решение. Однако, к сожалению, самым тщательным образом рассчитанные модели, учитывающие все тонкости явления, не дают стопроцентной гарантии надежной работоспособности системы при различных воздействиях и различных условиях. Конструкции, тщательно рассчитанные, могут разрушиться, механизмы неожиданно начинают давать сбой и так далее. Что является причиной необъяснимого поведения систем? На первый взгляд это непонятно, так как все мыслимые и немыслимые расчеты сделаны, внешние воздействия учтены, проверены и перепроверены! Напрашивается вывод, что есть еще что-то такое, что исследователь не заметил, но что, возможно, уже имеется в модели и уравнениях, её описывающих. Теория стабильности выдвигает и частично обосновывает гипотезу, что белые пятна не в указанной цепочке (явление — ... — анализ решения), а вне её. В этой цепочке есть неисследованная боковая ветвь: дифференциальное уравнение модели — свойства самого уравнения. Это направление не исследуется, так как обычно предполагается, что *решение* уравнения описывает *все* то, что может дать данное уравнение явления. Возможно, уравнение имеет еще какие-либо свойства, непосредственно с решением не связанные, но содержащие механический смысл, соответствующий в какой-то мере критическим ситуациям.

Механическое движение твердых тел, деформирование упругих и неупругих сред и конструкций описывается дифференциальными уравнениями. Для задач о движении материальной точки или тела необходимо ставить какие-то начальные условия, или какие-то условия на характеристики этого движения, позволяющие найти константы интегрирования. Принят наиболее естественный вариант: в некоторый момент времени, например, при $t = 0$, известны координаты точки и её скорость. Отсюда можно получить зависимость координат точки во все последующее время. Число начальных условий равно порядку дифференциального уравнения. Но ничто не запрещает поставить условия и на ускорение или даже высшие производные — третьи, четвертые и более высокие порядки. Такую начальную задачу будем называть *обобщенной задачей Коши* [1]. В этом случае с помощью уравнения движения можно найти значения начального положения и скорости, выразив их через заданные высшие производные. Здесь мы и подходим к сути теории стабильности. *Процедура выражения функции и скорости через высшие производные в некоторых случаях может не состояться!* Эти случаи являются *особыми точками* начальной задачи и называются потерей стабильности процесса, или, иначе, нестабильностью. Имеем, например, дифференциальное уравнение $\dot{x} + (a - t)x = 0$, где точка над символом означает производную по времени $\dot{x} = dx(t)/dt$, a — некоторое число. Если поставить условие на скорость $\dot{x}(t_0) = v_0$, то найти $x(t_0)$ можно лишь при $t \neq a$. Таким образом, в предлагаемом определении, значение $t = a$ является точкой нестабильности (особой точкой) процесса. В рамках одной теории будем различать две постановки: анализ стабильности процесса и анализ стабильности *возмущенного* движения (или процесса).

¹E-mail: c216@ya.ru

Второй случай относится в большей степени к процессам, описываемых нелинейными уравнениями. Поясним это на примере [2]. Уравнение прямолинейного движения точки массой m под действием в общем случае переменной силы F имеет вид $m\dot{v} = F$, где $v(t)$ — скорость точки. Пусть сила зависит от скорости: $F = -av - b/v$, где a и b — некоторые константы. Для скорости точки имеем, таким образом, обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$m\dot{v} + av^2 + b = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим малое отклонение от основного процесса, выбрав условно за основной процесс решение уравнения при определенном заданном начальном условии на $v(t)$. В результате возмущения функция $v(t)$ и её скорость $\dot{v}(t)$ приобретут приращения Δv , $\Delta \dot{v}$. Линеаризуя (1), получаем

$$mv\Delta\dot{v} + (m\dot{v} + 2av)\Delta v = 0.$$

В те моменты времени, когда скобка при Δv обращается в нуль, связь приращений $\Delta \dot{v}$ и Δv

$$\Delta v = -\frac{v}{\dot{v} + (2a/m)v} \Delta \dot{v}$$

вырождается. Равенство знаменателя в этом выражении соответствует неустойчивости возмущенного процесса. Так как из уравнения движения следует $\dot{v} = -(av + b/v)/m$, то неустойчивость наблюдается при совершенно определенной скорости движения, не зависящей ни от массы, ни от начальных значений

$$v = \sqrt{b/a}. \tag{2}$$

Если из решения уравнения движения известна функция $v(t)$, то из (2) можно найти значение t , при котором малые или даже как угодно малые возмущения $\Delta \dot{v}$ скорости должны соответствовать неограниченно большим возмущениям Δv . Безусловно, такая особенность что-то значит для основного процесса. Однако проявляется это не так явно, как в задачах устойчивости, так как здесь требуется возмущение совершенно определенного вида, да еще и приложенного в соответствующий момент, но пренебрегать этим фактом в расчетах нельзя.

Приведем две математические модели, иллюстрирующие проявление неустойчивости в двух, в общем-то совершенно разных по природе, механических процессах.

1. Модель 1. Выпучивание стержня при ползучести

Проблема поиска критического времени конструкций в условиях ползучести, связанная с важными технологическими задачами ядерной энергетики (стержневые элементы реакторов), космонавтике и авиации (сжатые оболочки двигателей при высоких температурах), широко обсуждалась в середине прошлого века [3-7]. Здесь непосредственное применение теории устойчивости либо не дает объективных решений, привязываясь к величинам начальных несовершенств, величины которых найти затруднительно или невозможно, либо просто дает тривиальный вывод о неустойчивости любой конструкции в условиях ползучести. В [8] для решения этой задачи привлекается теория стабильности.

Найти для примера точки неустойчивости второго порядка и критическое время продольно сжатого постоянной силой P , шарнирно опертого стержня из реологического материала

$$\dot{p}p^\alpha = f(\sigma), \tag{3}$$

$p = \varepsilon - \sigma/E$ — деформация ползучести, α — константа материала (коэффициент упрочнения), $f(\sigma)$ — заданная функция, определяющая зависимость деформации ползучести от уровня напряжений (степенная, гиперболический синус и другие). Длина стержня l , рисунок 1.

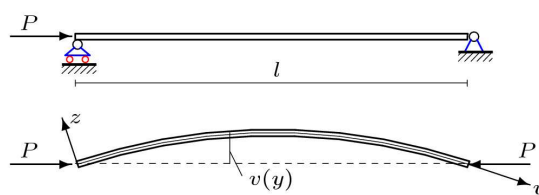


Рис. 1. Выпучивание стержня

Рассмотрим малое отклонение стержня от прямолинейного состояния. Деформации в изогнутом стержне получают приращения. Ось y материальной системы координат (“вмороженной” в тело) направим по срединной линии стержня, ось z — по нормали к ней. На основании гипотезы плоских сечений

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_0 + z\Delta v_{,yy}, \quad (4)$$

где $\Delta\varepsilon$ — приращение осевой деформации на расстоянии z от срединного сечения, $\Delta\varepsilon_0$ — приращение деформации срединного сечения, равные нулю, если в результате возмущения нагрузка на стержень не изменилась, Δv — приращение прогиба стержня, $\Delta v_{,yy}$ — вторая производная приращения прогиба по осевой координате y . Умножаем (4) на z и интегрируем по площади сечения. Так как приращение деформации срединной поверхности стержня $\Delta\varepsilon_0$ не зависит от z , а для симметричного относительно оси y сечения статический момент $\int_F z dF$ равен нулю, то получим

$$\int_F \Delta\varepsilon z dF = J\Delta v_{,yy}, \quad (5)$$

$J = \int_F z^2 dF$ — момент инерции поперечного сечения стержня. Уравнение равновесия (моментов) отсеченной части стержня относительно точки на срединной линии сечения дает

$$\int_F \Delta\sigma z dF = -P\Delta v, \quad (6)$$

где $P = \int_{\sigma} dF$ — нагрузка, действующая на стержень в продольном направлении. В случае линейной упругости приращения напряжений и деформаций связаны законом Гука

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon.$$

Умножим это уравнение на z и проинтегрируем по площади F . Интегралы от $z\Delta\varepsilon$ и $z\Delta\sigma$ выразим через (5) и (6). Получим

$$EJ\Delta v_{,yy} + P\Delta v = 0.$$

Форму прогиба выберем в виде, удовлетворяющем условию шарнирного опирания по концам ($\Delta v = 0$ при $y = 0$ и $y = l$):

$$\Delta v = u \sin ky, \quad (7)$$

где k — параметр волнообразования, $k = m_1\pi/l$, m_1 — число полуволн по длине стержня. Условия отсутствия моментов на опорах $\Delta v_{,yy} = 0$ при этом удовлетворяются автоматически. Получим

$$u \sin ky(-k^2 EJ + P) = 0.$$

Из условия $u \neq 0$ найдем критическую нагрузку (формула Эйлера) $P_0 = k^2 EJ$. Соответствующее напряжение обозначим $\sigma_0 = k^2 EJ/F$. Пусть стержень выполнен из реологического материала (3). В результате отклонения от прямолинейного положения приращения напряжений и деформаций ползучести, согласно (3), удовлетворяют соотношению

$$\Delta\dot{p}^\alpha + \alpha\Delta p\dot{p}^{\alpha-1} = f'(\sigma)\Delta\sigma, \quad (8)$$

где p , \dot{p} и σ относятся к оси стержня, а Δp , $\Delta\dot{p}$ и $\Delta\sigma$ означают малые приращения соответствующих величин по толщине стержня.

Введем обозначения безразмерного напряжения, отнесенного к эйлеровому значению $\omega = \sigma/\sigma_0$, и параметра, зависящего только от напряжений,

$$\zeta = (f'/f)E\omega/(1-\omega). \quad (9)$$

Из (6) с учетом выражения $\Delta p = \Delta\varepsilon - \Delta\sigma/E$ и уравнения (5) следует

$$\int_F \Delta p z dF = -P\Delta v/E + J\Delta v_{,yy}.$$

Умножим (8) на z и проинтегрируем по площади F :

$$p^\alpha \int \Delta \dot{p} z dF + \alpha \dot{p} p^{\alpha-1} \int \Delta p z dF = f'(\sigma) \int \Delta \sigma z dF.$$

Разделим обе части уравнения на p^α и, учитывая, что величины без значков Δ не зависят от z , с помощью (6) получим отсюда

$$J \Delta \dot{v}_{,yy} + P \Delta \dot{v} / E + \dot{p} (P \Delta v / E + J \Delta v_{,yy}) \alpha / p = -P \Delta v f' p^{-\alpha}. \quad (10)$$

Если выбирать форму прогиба в виде синусоиды (7), то из (10) следует, что скорость прогиба должна иметь такой же вид $\Delta \dot{v} = \dot{u} \sin ky$, при этом $\Delta \dot{v}_{,yy} = -k^2 \dot{u} \sin ky$. Заменив в правой части p^α на f / \dot{p} , получим

$$(-k^2 J + P / E) \dot{u} + \dot{p} (P / E - k^2 J) u \alpha / p = -P u \dot{p} f' / f.$$

Эйлерова нагрузка упругого стержня $P_0 = E J k^2$. Делим последнее равенство на $P / E - k^2 J = P_0(\omega - 1) / E$:

$$\dot{u} + u \dot{p} (\alpha / p - (f' / f) E \omega / (1 - \omega)) = 0.$$

Пользуясь обозначением (9), получим уравнение для u :

$$\dot{u} p + u \dot{p} (\alpha - p \zeta) = 0. \quad (11)$$

Точка неустойчивости второго порядка соответствует вырождению связи приращений прогиба, скорости прогиба с заданным (как угодно малым) приращением ускорения [8]. Искусственно поднимаем порядок (11), дифференцируя его по времени. Помня, что по условию задачи нагрузка постоянная, $\zeta = \text{const}$, а деформация ползучести удовлетворяет (3), после некоторых преобразований, получим

$$\ddot{u} p^2 + \dot{u} p \dot{p} (\alpha - p \zeta) + u \dot{p}^2 \alpha (p \zeta - \alpha - 1) = 0. \quad (12)$$

Введем обозначение $\xi = p \zeta$. Систему (11), (12) запишем в матричном виде

$$A \bar{U} = \bar{V}, \quad (13)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} \dot{p}(\alpha - \xi) & p \\ -\alpha \dot{p}^2 (\alpha - \xi + 1) & \dot{p} p (\alpha - \xi) \end{bmatrix}, \quad \bar{U} = \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix}, \quad \bar{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ p^2 \ddot{u} \end{bmatrix}.$$

Равенство нулю определителя матрицы A соответствует неустойчивости второго порядка:

$$\dot{p} \xi^2 - 3 \dot{p} \alpha \xi + \dot{p} \alpha (2 \alpha + 1) = 0. \quad (14)$$

Находим корни уравнения

$$\xi = \frac{3\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha}}{2}. \quad (15)$$

Это решение существует при $\alpha > 4$. Для того чтобы найти критическое время, проинтегрируем (3) при постоянных нагрузках и нулевых начальных условиях:

$$t = p^{\alpha+1} / ((\alpha + 1) f).$$

Соответствующую деформацию ползучести подставим сюда из (15), взяв меньшее значение:

$$p = \frac{3\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha}}{2\zeta}.$$

С увеличением нагрузки критическое время уменьшается. При $P \rightarrow P_0$ параметр ζ (9) стремится к бесконечности, а критическое время к нулю, что соответствует физическому смыслу задачи. Эйлерова нагрузка приводит к мгновенному выпучиванию стержня.

Аналогично можно получить точки неустойчивости других порядков. Если точка неустойчивости второго порядка является корнем полинома (14), который обозначим за Q_2 , для точки третьего порядка (задается возмущение третьей производной, а прогиб, скорость и ускорение

прогиба неограниченно растут в момент возмущения) найдем полином Q_3 как определитель матрицы 3×3 . Выпишем первые четыре полинома:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \xi - \alpha, \\ Q_2 &= \xi^2 - 3\xi\alpha + \alpha(2\alpha + 1), \\ Q_3 &= \xi^3 - 6\alpha\xi^2 + \alpha(4 + 11\alpha)\xi - \alpha(2\alpha + 1)(3\alpha + 2), \\ Q_4 &= \xi^4 - 10\alpha\xi^3 + 5\alpha(2 + 7\alpha)\xi^2 - 5\alpha(2\alpha + 1)(5\alpha + 2)\xi + \\ &\quad + \alpha(2\alpha + 1)(3\alpha + 2)(4\alpha + 3). \end{aligned}$$

Имеется дифференциальная рекуррентная зависимость

$$Q_N = Q_{N-1}(\xi + 1 - N(1 + \alpha)) + Q'_{N-1}\xi, \quad N = 2, 3, 4, \dots,$$

где штрихом обозначена производная по ξ . Корни полиномов для определения точек неустойчивости порядков 1-7 в зависимости от коэффициента упрочнения α изображены на рисунке 2. Полиномы нечетных порядков имеют корни для любых α , четных — при достаточно больших коэффициентах упрочнения. Для построения кривых в Maple не потребовалось искать корни, в этом случае оказался особо удобным оператор `implicitplot` для изображения неявных функций. Точка неустойчивости первого порядка $\xi = \alpha$ совпадает с известным (полуэмпирическим) критерием Работнова-Шестерикова [4, 5], выделяющим критическую точку по знаку скорости роста прогиба после возмущения.

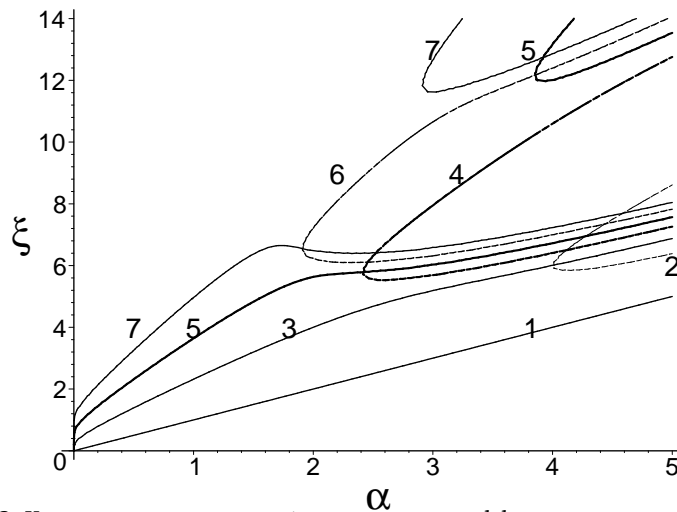


Рис. 2. Критические значения ξ при разных коэффициентах упрочнения

2. Модель 2. Динамика системы с двумя степенями свободы

Рассмотрим задачу о качении цилиндра радиуса r по бруску. Брусок скользит по гладкой горизонтальной поверхности (3). Качение происходит без проскальзывания. Масса бруска равна m_1 , масса точки, расположенной на ободке цилиндра, равна m_2 , цилиндра — m_3 . К цилиндру приложен момент M . В [9] выведены дифференциальные уравнения движения для обобщенных координат $x(t)$ и $\varphi(t)$. Рассмотрим уравнение для угла поворота цилиндра φ

$$\begin{aligned} & r \frac{m_2(m_2 \sin \varphi - m_1) \cos \varphi}{m_S} \dot{\varphi}^2 - \\ & - r \frac{m_3(3m_2 + m_3 + 3m_1) + 4(1 + \sin \varphi)m_1 m_2 + 2m_2^2 \cos^2 \varphi}{2m_S} \ddot{\varphi} - \\ & - m_2 g \cos \varphi - M/r = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где $m_S = m_1 + m_2 + m_3$.

Уравнение (16), описывающее движение системы, нелинейное. Интересно проанализировать связь приращений функций, описывающих движение системы и их производных, и выявить их особые точки. Под особыми точками здесь мы будем понимать точки неустойчивости,

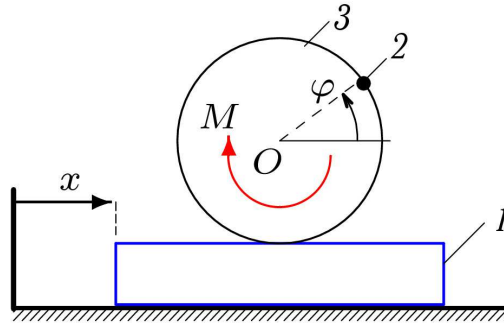


Рис. 3. Механизм с двумя степенями свободы

то есть те значения параметров системы, при которых связь приращений высших и низших производных процесса вырождается. Будем рассматривать возмущения (малые приращения) функции φ . Пусть задано приращение $\Delta\varphi$ и вторая производная приращения $\Delta\ddot{\varphi}$. Согласно определению [1] это соответствует поиску особой точки порядку 0/2. Уравнение (16) перепишем в виде

$$\ddot{\varphi}(a + 2b_2 \sin \varphi + b_1 \cos^2 \varphi) + \dot{\varphi}^2(b_2 - b_1 \sin \varphi) \cos \varphi + c \cos \varphi + M = 0, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} a &= r^2(4m_1m_2 + m_3(3m_1 + 3m_2 + m_3))/(2m_s), \\ b_1 &= r^2m_2^2/m_s, \\ b_2 &= r^2m_1m_2/m_s, \\ c &= m_2gr. \end{aligned}$$

После линеаризации это уравнение в приращениях имеет вид

$$A_{1,0}\Delta\varphi + A_{1,1}\Delta\dot{\varphi} + A_{1,2}\Delta\ddot{\varphi} + A_{1,3}\Delta\ddot{\varphi} = 0, \quad (18)$$

где $A_{1,3} = 0$. Для замыкания этого уравнения на третью производную приращения поднимем его порядок, продифференцировав по времени

$$A_{2,0}\Delta\varphi + A_{2,1}\Delta\dot{\varphi} + A_{2,2}\Delta\ddot{\varphi} + A_{2,3}\Delta\ddot{\varphi} = 0, \quad (19)$$

где $A_{1,1} = 2\dot{\varphi}(b_2 - b_1 \sin \varphi) \cos \varphi$, $A_{2,3} = 2b_2 \sin \varphi + b_1 \cos^2 \varphi + a$.

Для того, чтобы свести обобщенную задачу Коши к классической, необходимо выразить первую производную через заданные функции. Систему (18)-(19) перепишем в матричном виде

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\dot{\varphi} \\ \Delta\ddot{\varphi} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A_{1,0}\Delta\varphi\Delta\ddot{\varphi} + A_{1,2}\Delta\ddot{\varphi} \\ A_{2,0}\Delta\varphi\Delta\ddot{\varphi} + A_{2,2}\Delta\ddot{\varphi} \end{bmatrix}.$$

Особая точка процесса в приращениях (аналог устойчивости) соответствует равенству нулю определителя

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,3} \end{bmatrix} &= A_{2,3}A_{1,1} - A_{1,3}A_{2,1} = \\ &= 2\dot{\varphi}(2b_2 \sin \varphi + b_1 \cos^2 \varphi + a)(b_2 - b_1 \sin \varphi) \cos \varphi = 0. \end{aligned}$$

Легко показать, что уравнение $A_{2,3} = 2b_2 \sin \varphi + b_1 \cos^2 \varphi + a$ сводится к квадратному и корней не имеет. Имеются три возможных точки неустойчивости

$$\cos \varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = 0, \quad \sin \varphi = b_2/b_1 = m_1/m_2.$$

При этом корень последнего уравнения существует только при $m_1 \leq m_2$.

Что происходит с системой в особой точке? Уравнения показывают, что при как угодно малых возмущениях функции и её ускорения в этот момент скорость возмущения и третья производная могут неограниченно расти. Такие ситуации в реальных объектах могут соответствовать

различного рода неоднородностям и срывам. В поршневых системах это приводит к заклиниванию механизма [10]. Возможно, в реальной ситуации этот момент будет несколько смягчен за счет проскальзывания трущихся частей и неточности попадания в особую точку. В любом случае, особая, в таком понимании, точка имеет смысл только при наличии соответствующего возмущения. В рассмотренном случае это возмущение угла и углового ускорения. При отсутствии возмущения механизм минует это состояние без каких-либо последствий.

Также можно исследовать и стабильность рассмотренной механической системы и для других порядков: $0/3$, $1/2$, $1/3$. При задании приращения и его скорости (порядок $0/1$) особых точек в системе нет (классическая задача Коши).

Аналогичные проблемы динамики нелинейных систем исследовались в нелинейных задачах резанья металлов [11-14], в исследованиях особенностей обыкновенных дифференциальных уравнений [15-23]. Постановка задачи теории стабильности возможна не только при исследовании динамических или квазистатических процессов, но и плоской задаче теории упругости с уравнениями в частных производных [24].

Заключение

Явление неустойчивости присуще исключительно нелинейным процессам и состояниям [2]. Процедура выявления особых точек в смысле неустойчивости отработана и, несмотря на очевидные математические трудности, характерные для любых нелинейных задач, не имеет принципиальных ограничений. Интересно отметить, что во всех решенных задачах по этой теме применялись аналитические методы с применением систем компьютерной математики. Численные методы, развитые для *решения* уравнений, а не исследование постановок начальных задач, пока еще не применялись. Численные методы для выявления условия обращения в нуль определителя менее эффективны, чем аналитические. Другой особенностью задач стабильности является некоторая неопределенность критического поведения системы после достижения особой (в смысле неустойчивости) точки, что вызывает критику [25]. Для решения посткритического состояния или движения системы необходимо рассмотреть уравнения типа (18)-(19) с учетом квадратов приращений функции и её производных. Это составит материал для дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кирсанов М. Н. Определение, свойства и приложения одного нелинейного дифференциального оператора // Вестник ТГГПУ. 2010. № 4(22). С. 43-48.
2. Кирсанов М.Н. Стабильность элементов конструкций в условии ползучести. Часть 1. Стержни: учебное пособие. М.: ИНФРА-М., 2015. 184 с.
3. Shanley F. R. Weight-strength analysis of aircraft structures. New York: Mc Graw-Hill Book Co., 1952. 394 p.
4. Ключников В. Д. Лекции по устойчивости деформируемых систем. М.: Изд-во МГУ, 1986. 224 с.
5. Куршин Л. М. Устойчивость при ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 3. С. 125-160.
6. Vinet A., Gamby D. Prediction of long-term mechanical behaviour of fibre composites from the observation of micro-buckling appearing during creep compression tests // Science and Technology. 2008. Vol. 68. № 2. P. 526-536.
7. Локощенко А. М., Шестериков С. А. Сплющивание цилиндрических оболочек при ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. P. 113-118.
8. Kirsanov M.N. Singular points of the creep deformation and buckling of a column // Int.J.Eng.Sci. 1997. Vol. 5. № 3. P. 221-227.
9. Kirsanov M.N. The analysis of the degenerate case of oscillations of a mechanical system // Math. Meth. Appl. Sci. 2016. Vol. 39. P. 4545-4548.
10. Сафронов В.М., Кирсанов М.Н. Оценка возможности заклинивания поршня в пневмоприводах // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2006. № 10. С. 37-40.
11. Ивахненко А.Г., Куц В.В., Еренков О.Ю., Олейник А.В., Сариллов М.Ю. Методология структурно-параметрического синтеза металлорежущих систем. Комсомольск-на-Амуре: Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, 2015. 282 с.

12. Еренков О.Ю., Куц В.В., Сарилов М.Ю. Токарная обработка полимерных композиционных материалов. Комсомольск-на-Амуре: Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, 2016. 278 с.
13. Ивахненко А.Г., Куц В.В. Структурно-параметрический синтез технологических систем. Курск: Курский государственный технический университет, 2010. 153 с.
14. Еренков О.Ю. Комбинированные способы токарной обработки полимерных композиционных материалов. Хабаровск: Тихоокеанский государственный университет, 2015. 228 с.
15. Сайпулаев Г.Р. Анализ стабильности и решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения в системе Maple // Научный альманах. 2016. № 5-3 (19). С. 232-235.
16. Бадертдинов Р.Р. О стабильности нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в системе Maple // Научный альманах. 2016. № 6-2 (19). С. 194-197.
17. Бойко О.О. Анализ стабильности нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в системе Maple // Научный альманах. 2016. № 6-2 (19). С. 202-204.
18. Евстигнеев Д.Е. Исследование стабильности и решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения в системе Maple // Научный альманах. 2016. № 6-2 (19). С. 218-220.
19. Ерзунов И.А. Условие стабильности нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения в системе Maple // Научный альманах. 2016. № 6-2 (19). С. 221-223.
20. Китаев С.С. Пример неустойчивости нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка // Научный альманах. 2016. № 6-2 (19). С. 232-235.
21. Показаньев И.Д. Стабильность и численное решение одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения // Научный альманах. 2016. № 6-2 (19). С. 285-288.
22. Семенова Г.Д. Пример неустойчивости нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения // Научный альманах. 2016. № 6-2 (19). С. 292-295.
23. Тихонюк О.А. Введение в теорию неустойчивости на примере особых точек начальной задачи процесса деформирования сжатых стержней в условии ползучести // Журнал технических исследований. 2015. Т. 1. № 2. С. 3.
24. Кирсанов М.Н. Неустойчивость распределения напряжений в плоской задаче теории упругости неоднородного тела // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 3 (319). С. 166-169.
25. Зубчанинов В. Г. Устойчивости и пластичность. Т.1. Устойчивость. М.: Физматлит, 2007. 448 с.

Поступила в редакцию 28.11.2016

Кирсанов Михаил Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, кафедра робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин Национального исследовательского университета "МЭИ", 111250, Россия, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14.
E-mail: c216@ya.ru

M. N. Kirsanov

Theoretical and applied problems of theory of stability

Keywords: stability, initial value problem, differential equation, nonlinearity.

PACS: 83.00.00

The formulation and physical meaning of the problems in the theory of stability is discussed. Given the examples of nonlinear physical problems of different nature, partial differential equations of which admit the degeneration of the relationship between derivatives of functions, leading to instability.

REFERENCES

1. Kirsanov M. N. Definition, properties and applications of a nonlinear differential operator, *Vestnik TGGPU*, 2010, no. 4(22), pp. 43-48.
2. Kirsanov M. N. *Stabil'nost' elementov konstrukcij v uslovii polzuchesti. Chast' 1. Sterzhni* (Stability of structural elements in the condition of creep. Part 1. Rods: a tutorial), Moscow: INFRA-M, 2015, 184 p.

3. Shanley F.R. *Weight-strength analysis of aircraft structures*, New York: Mc Graw-Hill Book Co, 1952, pp. 343-385.
4. Klyushnikov V. D. *Lekcii po ustojchivosti deformiruemym sistem* (Lectures on stability of deformable systems), Moscow: Izdatelstvo MGU, 1986, 224 p.
5. Kurshin L. M. Stability during creep, *Izvestiya: Mathematics*, 1978, no. 3, pp. 125-160.
6. Vinet A., Gamby D. Prediction of long-term mechanical behaviour of fibre composites from the observation of micro-buckling appearing during creep compression tests, *Science and Technology*, 2008, vol. 68, no. 2, pp. 526-536.
7. Lokoshchenko A. M., Shesterikov S. A. Flattening of cylindrical shells under creep, *Izvestiya: Mathematics*, 1985, no. 3, pp. 113-118.
8. Kirsanov M.N. Singular points of the creep deformation and buckling of a column, *Int.J.Eng.Sci*, 1997, vol. 5, no. 3, pp. 221-227.
9. Kirsanov M.N. The analysis of The degenerate case of oscillations of a mechanical system, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2016, vol. 39, pp. 4545-4548.
10. Safronov V.M., Kirsanov M.N. Evaluation of the possibility of jamming of the piston in the pneumatic actuators, *Devices and systems. Management, control, diagnostics*, 2006, no. 10, pp. 37-40.
11. Ivakhnenko A.G., Kuts V.V., Erenkov O.Yu., Oleynik A.V., Surilov M.Yu. *Metodologiya strukturno-parametricheskogo sinteza metallorazhushchih sistem* (Methodology of structural and parametric synthesis of metal-cutting systems), Komsomolsk-on-Amur: Komsomol'skij-na-Amure gosudarstvennyj tekhnicheskij universitet, 2015, 282 p.
12. Erenkov O.Yu., Kuts V.V., Kurilov M.Y. *Tokarnaya obrabotka polimernyh kompozicionnyh materialov* (The turning of composite materials), Komsomolsk-on-Amur: Komsomol'skij-na-Amure gosudarstvennyj tekhnicheskij universitet, 2016, 278 p.
13. Ivakhnenko A.G., Kuts V.V. *Strukturno-parametricheskij sintez tekhnologicheskikh sistem* (Structural-parametric synthesis of technological systems), Kursk: Kursk state technical University, 2010, 153 p.
14. Erenkov O.Y. *Kombinirovannye sposoby tokarnoj obrabotki polimernyh kompozicionnyh materialov* (Combined forms turning of composite materials), Khabarovsk: Pacific state university, 2015, 228 p.
15. Saypulaev G. R. Analysis of stability and solution of nonlinear ordinary differential equation in system Maple, *Scientific almanac*, 2016, no. 5-3(19), pp. 232-235.
16. Badretidinov R.R. On the stability of the nonlinear ordinary differential equation of second order in the system Maple, *Scientific almanac*, 2016, no. 6-2(19), pp. 194-197.
17. Boiko O.O. The Analysis of the stability of nonlinear ordinary differential equations of second order system Maple, *Scientific almanac*, 2016, no. 6-2(19), pp. 202-204.
18. Evstigneev D.E. Study of the stability and the solution of the nonlinear ordinary differential equation in system Maple, *Scientific almanac*, 2016, no. 6-2(19), pp. 218-220.
19. Erzunov I.A. Condition of stability of a nonlinear ordinary differential equation in system Maple, *Scientific almanac*, 2016, no. 6-2(19), pp. 221-223.
20. Kitaev S.P. Example of instability for nonlinear ordinary differential equation of second order, *Scientific almanac*, 2016, no. 6-2(19), pp. 232-235.
21. Pokazanyev I.D. Stability and numerical solution of a nonlinear ordinary differential equation, *Scientific almanac*, 2016, no. 6-2(19), pp. 285-288.
22. Semenova D. An example of the instability of nonlinear ordinary differential equations, *Scientific almanac*, 2016, no. 6-2(19), pp. 292-295.
23. Tikhonuk O.A. Introduction to the theory of instability on the example of the singular points of the initial problem, the deformation of compressed rods with the creep, *Journal of technical research*, 2015, vol. 1, no. 2, p. 3.
24. Kirsanov M.N. The instability of the stress distribution in the plane problem of theory of elasticity of inhomogeneous bodies, *Journal of applied mechanics and technical physics*, 2013, vol. 54, no. 3(319), pp. 166-169.
25. Zubchaninov V. G. *Ustojchivost i plastichnost'. T.1. Ustojchivost'* (Stability and plasticity. Vol. 1. Stability), Moscow: Fizmatlit, 2007, 448 p.

Received 28.11.2016

Kirsanov Mikhail Nikolaevich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of robotics, mechatronics, dynamics and strength of machines, National research University "MPEI", ul. Krasnokazarmennaya, 14, Moscow, 111250, Russia.
E-mail: c216@ya.ru