

УДК 53.01; 53.02; 539

*Ю. С. Владимиров,¹ Д. А. Терещенко²***РЕЛЯЦИОННО-СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ
O(4)-СИММЕТРИИ АТОМА ВОДОРОДА**

В рамках реляционно-статистического подхода к геометрии и физике предложено решение задачи атома водорода. С помощью математического аппарата теории бинарных систем комплексных отношений показана O(4)-симметрия атома водорода. Произведено сопоставление данного решения с работами В. А. Фока и Е. А. Хиллерааса об O(4)-симметрии, выполненных в рамках общепринятой квантовой механики. Данная работа является составной частью реализации программы вывода классических пространственно-временных представлений из более элементарных понятий и закономерностей, присущих физике микромира.

Ключевые слова: теория систем отношений, квантовая механика, атом водорода, O(4)-симметрия, энергетические уровни атома, уравнение Лагерра.

РАС: 03.65.Са.; 03.65.Fd.; 03.65.Та

Введение

Одной из ключевых задач квантовой физики является задача описания атомов, решение которой в свое время заложило основы всей квантовой теории. Именно исходя из необходимости решения этой задачи было записано нерелятивистское уравнение Шредингера, затем было записано релятивистское уравнение Клейна–Фока–Гордона и потом уравнения Дирака. Очевидно, что запись всех этих уравнений предполагает наличие априорно заданного классического пространства-времени. Наличие пространственно-временного фона и постулирование на его основе уравнений поля составляет базис ныне доминирующей теоретико-полевой парадигмы.

Однако наряду с этой парадигмой в XX веке проводились исследования также в рамках еще двух парадигм [1]: клиффорд-эйнштейновской геометрической и реляционной, основания которой были заложены в трудах Г. Лейбница и Э. Маха. В рамках названных трех парадигм ряд понятий и закономерностей физического мироздания выглядят по-разному, можно сказать, раскрываются под разными углами зрения. Как нам представляется, наиболее полную информацию об окружающем мире можно получить только научившись смотреть на него с позиций трех названных парадигм. В частности, это относится и к пониманию структуры атомов. Более того, поскольку решение этой задачи явилось истоком создания квантовой теории, иной взгляд на эту задачу со стороны других парадигм может пролить дополнительный свет на сущность (интерпретацию) квантовой механики и всей квантовой теории поля.

В этой статье предлагается взглянуть на задачу атома водорода с точки зрения реляционно-статистического подхода к геометрии и физике. Напомним, что в реляционном подходе отсутствует априорно заданный пространственно-временной фон, а следовательно, теряют силу и формулируемые на его основе дифференциальные уравнения. Вместо этого строится теория отношений между материальными объектами и событиями. Для сопоставления двух парадигм, как нам представляется, чрезвычайно важную роль играет открытая в 30-х годах XX века Е. А. Хиллераасом [2] и В. А. Фоком [3, 4] O(4)-симметрия водородоподобных атомов.

1. O(4)-симметрия атома водорода

Обсуждение данного вопроса начнем с напоминания результата Е. А. Хиллерааса и В. А. Фока, а также способа его получения. Так, в работе В. А. Фока [3] показано, что нерелятивистское уравнение Шредингера в задаче атома водорода можно преобразовать в интегральное уравнение на трехмерной гиперсфере в 4-мерном (евклидовом) импульсном пространстве.

Поясним этот результат, опираясь на методику, отличную от использованной Фоком и более близкую к изложенной в работе Хиллерааса [2]. В качестве исходного возьмем соответствующее

¹ E-mail: yusvlad@rambler.ru

² E-mail: dima91ter@yandex.ru

нерелятивистское соотношение между 3-импульсом \vec{p} и энергией E в центральном кулоновом поле заряда Ze :

$$\frac{\vec{p}^2}{2\mu} - \frac{Ze^2}{r} = E \rightarrow (\hat{p}^2 - 2\mu E)\hat{r} = 2\mu Ze^2, \quad (1.1)$$

где правое выражение записано в операторном виде.

Чтобы перейти от этого выражения к дифференциальному уравнению в импульсном представлении нужно, во-первых, предварительно возвести (1.1) в квадрат, во-вторых, позаботиться о правильном выборе порядка операторов \hat{p} и \hat{r} . В качестве правильного порядка выбирается следующий:

$$(\hat{p}^2 - 2\mu E)\hat{r}(\hat{p}^2 - 2\mu E)\hat{r}\phi = 4\mu^2 Z^2 e^4 \phi. \quad (1.2)$$

В-третьих, следует прокоммутировать операторы \hat{r} и $(\hat{p}^2 - 2\mu E)$, чтобы \hat{r} входило квадратично. Для этого используются известные в квантовой механике правила коммутации операторов \hat{r} и \hat{p} :

$$\hat{r}(\hat{p}^2 - 2\mu E) = (\hat{p}^2 - 2\mu E)\hat{r} + 2i\hbar(\hat{p}_1\hat{x}_1 + \hat{p}_2\hat{x}_2 + \hat{p}_3\hat{x}_3) + \frac{2(i\hbar)^2}{r}. \quad (1.3)$$

В-четвертых, следует перейти к операторам в импульсном представлении, где $\hat{x}_i = i\hbar\partial/\partial p_i$. Тогда, подставляя (1.3) в (1.2), приходим к дифференциальному уравнению в импульсном представлении:

$$\left[(p^2 - 2\mu E)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_3^2} \right) + 2(p^2 - 2\mu E) \left(p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial p_2} + p_3 \frac{\partial}{\partial p_3} + 1 \right) + \frac{4\mu^2 Z^2 e^4}{\hbar^2} \right] \varphi(p) = 0. \quad (1.4)$$

Далее следует перейти от импульсов на трехмерной гиперплоскости к импульсам на трехмерной гиперсфере в 4-мерном импульсном пространстве $\{P_1, P_2, P_3, P_5\}$. Здесь дополнительная компонента импульса обозначена символом P_5 , поскольку она является пространственно-подобной, то есть калуцевского типа. Названный переход осуществляется с помощью так называемой стереографической проекции. В работе Фока рассматривалась трехмерная гиперсфера радиуса $\rho = \sqrt{-\mu E/2}$, касающаяся в начале координат трехмерной гиперплоскости \vec{p} . Точки на гиперплоскости сопоставлялись с точками на гиперсфере посредством проведения прямых линий из верхней точки гиперсферы до пересечений с гиперсферой и гиперплоскостью. В аналитическом виде такое преобразование записывается следующим образом:

$$P_1 = \frac{4\rho^2 p_1}{4\rho^2 + p^2}; \quad P_2 = \frac{4\rho^2 p_2}{4\rho^2 + p^2}; \quad P_3 = \frac{4\rho^2 p_3}{4\rho^2 + p^2}; \quad P_5 = \frac{(-4\rho^2 + p^2)\rho}{4\rho^2 + p^2}. \quad (1.5)$$

Легко видеть, что имеет место уравнение гиперсферы в 4-мерном евклидовом многообразии: $P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_5^2 = \rho^2$. Перейдем к сферическим координатам α , θ и φ на трехмерной гиперсфере согласно известным формулам:

$$P_1 = \rho \sin \alpha \sin \theta \cos \varphi; \quad P_2 = \rho \sin \alpha \sin \theta \sin \varphi; \quad P_3 = \rho \sin \alpha \cos \theta; \quad P_5 = \rho \cos \alpha. \quad (1.6)$$

Произведя замену функции $\phi(\alpha, \theta, \varphi) = \sin^2(\alpha/2)\Phi(\alpha, \theta, \varphi)$, уравнение (1.4) приводим к виду

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2ctg\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + ctg\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \alpha \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 1 + \frac{\mu^2 Z^2 e^4}{4\hbar^2 \rho^2} \right] \Phi(\alpha, \theta, \varphi) = 0. \quad (1.7)$$

Легко убедиться, что это уравнение представляет собой сферическую часть 4-мерного уравнения Лапласа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial P_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial P_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial P_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial P_5^2} \right) \Psi(P_1, P_2, P_3, P_5) = 0 \quad (1.8)$$

после разделения переменных, когда Ψ представляется в виде $\Psi = R(P_r)\Phi(\alpha, \theta, \varphi)$. Постоянная разделения переменных Λ_1 связана со слагаемыми в (1.7) следующим образом:

$$\Lambda_1 = -1 + \frac{\mu^2 e^4 Z^2}{4\hbar^2 \rho^2}. \quad (1.9)$$

Уравнение (1.7), в свою очередь, допускает разделение переменных на обычные углы θ и φ на двумерной сфере и угол α . Полагая $\Phi(\alpha, \theta, \varphi) = A(\alpha)Y(\theta, \varphi)$, получаем уравнения:

$$\left[\sin^2 \alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2ctg\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \Lambda_1 \sin^2 \alpha - \Lambda_2 \right] A(\alpha) = 0; \quad (1.10)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + ctg\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \Lambda_2 \right] Y(\theta, \varphi) = 0, \quad (1.11)$$

где Λ_2 — постоянная. Очевидно, уравнение (1.11) представляет собой известное уравнение для сферических функций на двумерной сфере. Его собственные значения: $\Lambda_2 = l(l+1)$, где $l = 0, 1, \dots$

Решение уравнения (1.10) также легко найти. Подставляя в него значение Λ_2 и производя замены $z = \cos \alpha$ и $A(z) = (1-z^2)^{-1/4} B(z)$, приводим (1.10) к присоединенному уравнению Лежандра. Его собственные функции также известны, а собственные значения имеют вид

$$\Lambda_1 + \frac{3}{4} = L'(L'+1) = \left(L + \frac{1}{2} \right) \left(L + \frac{3}{2} \right), \quad (1.12)$$

то есть $\Lambda_1 = L(L+2)$, где L — целое число, равное $0, 1, 2, \dots$. Вспоминая (1.9) и ранее сделанное отождествление $4\rho^2 = -2\mu E$, находим энергетические уровни атома водорода:

$$\frac{\mu^2 Z^2 e^4}{4\hbar^2 \rho^2} = (L+1)^2 = n^2 \rightarrow E = -\frac{\mu e^4 Z^2}{2\hbar^2 n^2}. \quad (1.13)$$

Таким образом, полученное уравнение (1.4) в импульсном пространстве обладает $O(4)$ -симметрией, его собственные значения в точности те же, что и для уравнения Шредингера в координатном представлении, а радиус гипersферы, использованной для построения стереографической проекции, не постоянен, а жестко связан с энергетическими уровнями атома водорода. Расстояние от центра гипersферы до гиперплоскости $\{\bar{p}\}$ также переменено по построению.

В. А. Фок по поводу полученного результата писал: «Симметрия основного уравнения атома водорода совпадает с симметрией четырехмерного шара. Эта симметрия является, очевидно, более высокой, чем симметрия трехмерного шара; последняя получается из первой в том частном случае, когда четырехмерные вращения происходят вокруг одной определенной оси и приводятся к трехмерным» [3].

Более того, он подчеркивал то обстоятельство, что гипersфера возникает только в случае, когда электрон находится в связанном состоянии атома, однако, когда он оказывается свободным, «вместо четырехмерного шара мы получаем четырехмерный гиперболоид вращения. Трехмерная поверхность этого гиперболоида будет представлять собой *пространство с постоянной отрицательной кривизной*. В таком пространстве имеет место *геометрия Лобачевского*» [3].

Отметим, что получающаяся на основе уравнения Шредингера формула для энергетических уровней атома водорода не в полной мере соответствует экспериментальным значениям. Правильные уровни получаются при решении задачи атома водорода на основе релятивистских уравнений Дирака.

2. Основные положения бинарных систем комплексных отношений

Теперь рассмотрим задачу атома водорода с позиций реляционно-статистического подхода, в котором среди первичных понятий отсутствует классическое пространство-время, а следовательно, теряют смысл дифференциальные уравнения поля в общепринятом их понимании. Вместо этого предлагается использовать алгебраическую теорию систем отношений, в которой представлены два варианта: 1) на одном множестве элементов — унарные системы вещественных отношений (УСВО), в терминах которых переформулируются классические геометрии и классическая физика и 2) на двух множествах элементов — бинарные системы комплексных отношений (БСКО), пригодные для описания закономерностей квантовой физики.

Теория бинарных систем комплексных отношений (БСКО) достаточно подробно изложена в ряде наших публикаций [5–7]. Тем не менее напомним самые необходимые для решения данной задачи положения.

1. Задаются два множества элементов, описывающих начальные и конечные состояния квантовых систем, и вводятся комплексные парные отношения между элементами двух множеств. Поступается, что парные отношения удовлетворяют некому алгебраическому закону, справедливому

для отношения между любыми r элементами одного множества и s элементами второго множества. Совокупность чисел (r, s) называется рангом БСКО. Показывается, что элементы характеризуются соответственно $s - 1$ и $r - 1$ параметрами, имеющими смысл отношений к эталонным элементам противоположных множеств. Особо следует подчеркнуть, что при развитии этой теории нигде не используются понятия классического пространства-времени или классической физики. Более того, ставится задача вывода классических пространственно-временных отношений и физических взаимодействий из понятий теории БСКО.

2. В наших работах показано, что ряд важных закономерностей физики микромира адекватно описывается БСКО симметричных минимальных рангов $(2, 2)$, $(3, 3)$ и $(4, 4)$. При этом БСКО минимального ранга $(2, 2)$ оказывается подсистемой БСКО более высоких рангов. Показано, что элементы БСКО ранга $(3, 3)$ описываются 2-компонентными спинорами. В такой теории важную роль играет группа преобразований $SL(2, C)$. В развиваемой теории предлагается описывать элементарные частицы двойками или тройками элементов, отношения между которыми удовлетворяют специальным условиям связи. От данной теории своеобразным квадрированием можно перейти к унарной геометрии Лобачевского.

3. Для решения поставленной задачи описания водородоподобных атомов следует использовать БСКО ранга $(4, 4)$, для которой закон имеет вид:

$$\Phi_{(4,4)} = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} & u_{i\delta} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} & u_{k\delta} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} & u_{j\delta} \\ u_{s\alpha} & u_{s\beta} & u_{s\gamma} & u_{s\delta} \end{vmatrix} = 0, \quad (2.1)$$

где i, k, j, s — элементы первого множества, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — элементы второго множества а $u_{i\alpha}$ — парные отношения между элементами двух множеств, представимые в виде

$$u_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i^3\alpha^3. \quad (2.2)$$

Здесь i^1, i^2, i^3 — три параметра элемента первого множества, а $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ — три параметра элемента второго множества. Показывается, что в этой теории элементы описываются 3-компонентными финслеровыми спинорами и в ней ключевую роль играет группа преобразований $SL(3, C)$.

4. В наших работах предложено описывать в рамках данной теории все известные виды физических взаимодействий: сильные, электрослабые, электромагнитные. При этом полагается, что общий случай теории соответствует сильным взаимодействиям, опирающимся на группу преобразований $SU(3)$ (подгруппу группы $SL(3, C)$), специфическое вырождение общего случая соответствует электрослабым взаимодействиям, а интересующий нас случай электромагнитных взаимодействий соответствует вырождению теории, когда из группы $SL(3, C)$ выделяется один из трех вариантов подгруппы $SL(2, C)$. Это означает, что первые два параметра элементов (финслеровых спиноров) рассматриваются как обычные 2-компонентные спиноры, тогда как третьи параметры являются инвариантами.

5. Для решения задачи атома водорода следует ограничиться случаем электромагнитных взаимодействий и достаточно полагать, что каждая из двух взаимодействующих частиц (электрон и протон) описываются парами элементов. Пусть, например, электрон описывается элементами i и k в начальном состоянии и сопряженными элементами $\alpha = i^*$ и $\beta = k^*$ в конечном состоянии, а протон — элементами j и s в начальном состоянии и $\gamma = j^*$ и $\delta = s^*$ в конечном состоянии.

6. Отметим, что ранее в работе [8] был предложен первый вариант обоснования $O(4)$ -симметрии в задаче атома водорода на базе реляционно-статистического подхода, однако при этом использовался ряд недостаточно обоснованных постулатов. В данной статье предлагается новый вариант обоснования, свободный от прежних недостатков.

3. Базовое 4×4 -отношение

В реляционной теории взаимодействия двух частиц в общем случае описываются так называемым базовым 4×4 -отношением, симметричным образом содержащим две пары элементов в начальном и две пары элементов в конечном состояниях. Оно строится окаймления единицами определителя в законе (2.1), так что является инвариантным относительно группы $SL(3, C)$ и в общем случае отлично от нуля.

1. Пусть две взаимодействующие частицы в двух множествах описываются элементами (i, k, α, β) и (j, s, γ, δ) , тогда базовое 4×4 -отношение принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ i & k & j & s \end{array} \right\} \equiv - \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & \\ 1 & u_{i\alpha} & u_{i\beta} & \\ \hline 1 & u_{k\alpha} & u_{k\beta} & \\ 1 & u_{s\alpha} & u_{s\beta} & \end{array} \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & \\ u_{i\gamma} & u_{i\delta} & \\ \hline u_{k\gamma} & u_{k\delta} & \\ u_{s\gamma} & u_{s\delta} & \end{array} = \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ i^1 & k^1 & j^1 & s^1 \\ \hline i^2 & k^2 & j^2 & s^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 & s^3 \end{array} \times \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 & \delta^1 \\ \hline \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 \end{array}. \quad (3.1)$$

В верхнем определителе вертикальные и горизонтальные линии, как и ранее, разделяют парные отношения элементов, соответствующих двум взаимодействующим частицам, а горизонтальные линии в нижних определителях отделяют дополнительные параметры (с индексом 3) от параметров, соответствующих БСКО ранга (3, 3).

2. Подчеркнем, что базовое отношение описывает взаимодействие двух частиц без участия каких бы то ни было промежуточных полей. В нем присутствуют лишь характеристики (параметры) частиц в духе теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера–Фейнмана [13]. При желании промежуточные бозоны можно ввести как вторичные, вспомогательные понятия.

Кроме того, для описания стационарных состояний атома достаточно использовать вариант теории, где элементы второго множества элементов описываются комплексно сопряженными параметрами. Это означает, что в дальнейшем везде будем полагать: $\alpha = i^*$; $\beta = k^*$; $\gamma = j^*$; $\delta = s^*$.

3. Произведем процедуру (2+1)-расщепления параметров на два импульсных и дополнительный третий. Для этого достаточно расписать определители справа в (3.1) по второй и третьей строкам. В итоге находим комбинацию из 36 слагаемых:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} i^* & k^* & j^* & s^* \\ i & k & j & s \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} i^* k^* \\ i k \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} j^* s^* \\ j s \end{array} \right) - \left[\begin{array}{cc} i^* k^* \\ i j \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} j^* s^* \\ k s \end{array} \right) + \left[\begin{array}{cc} i^* k^* \\ i s \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} j^* s^* \\ k j \end{array} \right) + \left[\begin{array}{cc} i^* k^* \\ k j \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} j^* s^* \\ i s \end{array} \right) - \left[\begin{array}{cc} i^* k^* \\ k s \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} j^* s^* \\ i j \end{array} \right) + \left[\begin{array}{cc} i^* k^* \\ j s \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} j^* s^* \\ i k \end{array} \right) \\ \hline - \left[\begin{array}{cc} i^* j^* \\ i k \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} k^* s^* \\ j s \end{array} \right) + \left[\begin{array}{cc} i^* j^* \\ i j \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} k^* s^* \\ k s \end{array} \right) - \left[\begin{array}{cc} i^* j^* \\ i s \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} k^* s^* \\ k j \end{array} \right) - \left[\begin{array}{cc} i^* j^* \\ k j \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} k^* s^* \\ i s \end{array} \right) + \left[\begin{array}{cc} i^* j^* \\ k s \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} k^* s^* \\ i j \end{array} \right) - \left[\begin{array}{cc} i^* j^* \\ j s \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} k^* s^* \\ i k \end{array} \right) \\ \hline + \left[\begin{array}{cc} i^* s^* \\ i k \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} k^* j^* \\ j s \end{array} \right) - \left[\begin{array}{cc} i^* s^* \\ i j \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} k^* j^* \\ k s \end{array} \right) + \left[\begin{array}{cc} i^* s^* \\ i s \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} k^* j^* \\ k j \end{array} \right) + \left[\begin{array}{cc} i^* s^* \\ k j \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} k^* j^* \\ i s \end{array} \right) - \left[\begin{array}{cc} i^* s^* \\ k s \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} k^* j^* \\ i j \end{array} \right) + \left[\begin{array}{cc} i^* s^* \\ j s \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} k^* j^* \\ i k \end{array} \right) \\ \hline + \left[\begin{array}{cc} k^* j^* \\ i k \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} i^* s^* \\ j s \end{array} \right) - \left[\begin{array}{cc} k^* j^* \\ i j \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} i^* s^* \\ k s \end{array} \right) + \left[\begin{array}{cc} k^* j^* \\ i s \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} i^* s^* \\ k j \end{array} \right) + \left[\begin{array}{cc} k^* j^* \\ k j \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} i^* s^* \\ i s \end{array} \right) - \left[\begin{array}{cc} k^* j^* \\ k s \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} i^* s^* \\ i j \end{array} \right) + \left[\begin{array}{cc} k^* j^* \\ j s \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} i^* s^* \\ i k \end{array} \right) \\ \hline - \left[\begin{array}{cc} k^* s^* \\ i k \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} i^* j^* \\ j s \end{array} \right) + \left[\begin{array}{cc} k^* s^* \\ i j \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} i^* j^* \\ k s \end{array} \right) - \left[\begin{array}{cc} k^* s^* \\ i s \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} i^* j^* \\ k j \end{array} \right) - \left[\begin{array}{cc} k^* s^* \\ k j \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} i^* j^* \\ i s \end{array} \right) + \left[\begin{array}{cc} k^* s^* \\ k s \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} i^* j^* \\ i j \end{array} \right) - \left[\begin{array}{cc} k^* s^* \\ j s \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} i^* j^* \\ i k \end{array} \right) \\ \hline + \left[\begin{array}{cc} j^* s^* \\ i k \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} i^* k^* \\ j s \end{array} \right) - \left[\begin{array}{cc} j^* s^* \\ i j \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} i^* k^* \\ k s \end{array} \right) + \left[\begin{array}{cc} j^* s^* \\ i s \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} i^* k^* \\ k j \end{array} \right) + \left[\begin{array}{cc} j^* s^* \\ k j \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} i^* k^* \\ i s \end{array} \right) - \left[\begin{array}{cc} j^* s^* \\ k s \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} i^* k^* \\ i j \end{array} \right) + \left[\begin{array}{cc} j^* s^* \\ j s \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} i^* k^* \\ i k \end{array} \right), \end{array} \quad (3.2)$$

где использованы обозначения:

$$\left[\begin{array}{cc} i^* k^* \\ i k \end{array} \right] = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i^{*1} & k^{*1} \\ i^{*2} & k^{*2} \end{vmatrix} = (i^1 k^2 - i^2 k^1)(i^{*1} k^{*2} - i^{*2} k^{*1});$$

$$\left(\begin{array}{cc} i^* k^* \\ i k \end{array} \right) = \begin{vmatrix} i^3 & k^3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ i^{*3} & k^{*3} \end{vmatrix} = (i^3 - k^3)(k^{*3} - i^{*3}). \quad (3.3)$$

Данное выражение специально представлено в виде 6×6 -таблицы так, что строки различаются перестановками четырех индексов: i^* , k^* , j^* , s^* , а столбцы — перестановками индексов i , k , j , s .

4. Анализ базового 4×4 -отношения

Произведем анализ получившегося базового 4×4 -отношения, исходя из возможных значений дополнительных, третьих параметров финслеровых спиноров, которые при выделении группы $SL(2, C)$ являются инвариантными. Представим эти параметры в следующем виде:

$$i^3 = b_1 + a_1; \quad k^3 = b_1 - a_1; \quad j^3 = b_2 + a_2; \quad s^3 = b_2 - a_2, \quad (4.1)$$

где будем полагать, что a_1, a_2, b_1, b_2 — некоторые вещественные числа.

Анализ показывает, что имеется три характерных варианта выбора параметров. Для решения поставленной задачи наиболее интересным является случай, когда $a_1 = a_2 = 0$. Для оставшейся комбинации введем обозначение $b_2 - b_1 = 2b$. Тогда из совокупности слагаемых в (3.2) останутся отличными от нуля лишь 16 центральных слагаемых:

$$\left\{ \begin{matrix} i^* k^* j^* s^* \\ i k j s \end{matrix} \right\} = -4b^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + \begin{bmatrix} i^* j^* \\ i j \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} i^* j^* \\ i s \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} i^* j^* \\ k j \end{bmatrix} & + \begin{bmatrix} i^* j^* \\ k s \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & - \begin{bmatrix} i^* s^* \\ i j \end{bmatrix} & + \begin{bmatrix} i^* s^* \\ i s \end{bmatrix} & + \begin{bmatrix} i^* s^* \\ k j \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} i^* s^* \\ k s \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & - \begin{bmatrix} k^* j^* \\ i j \end{bmatrix} & + \begin{bmatrix} k^* j^* \\ i s \end{bmatrix} & + \begin{bmatrix} k^* j^* \\ k j \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} k^* j^* \\ k s \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & + \begin{bmatrix} k^* s^* \\ i j \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} k^* s^* \\ i s \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} k^* s^* \\ k j \end{bmatrix} & + \begin{bmatrix} k^* s^* \\ k s \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Легко показать, что выражение в скобках представляет собой квадрат инварианта, образованного двумя 2-компонентными спинорами, характеризующими две отдельные частицы:

$$\begin{pmatrix} i^1 - k^1 \\ i^2 - k^2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} j^1 - s^1 \\ j^2 - s^2 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Два других характерных варианта соответствуют либо 1) условиям на третьи параметры: $b_2 - b_1 = 0$, $a_1 - a_2 = 0$ и $a_1 + a_2 = 2a$, либо 2) условиям: $b_2 - b_1 = 0$, $a_1 + a_2 = 0$, $a_1 - a_2 = 2c$. В этих двух случаях также оказываются отличными от нуля комбинации из 16 слагаемых, но уже иных. Можно показать, что их также можно представить через инварианты от пар 2-компонентных спиноров, однако теперь они будут составлены из комбинаций параметров разных частиц.

5. Условия стационарности атомов

Если две частицы образуют единое связанное состояние, то их параметры должны удовлетворять неким условиям. При этом следует различать, во-первых, алгебраические условия связи параметров элементов двух частиц и, во-вторых, условия, обусловленные статистическим характером связанных состояний.

5.1. Алгебраические условия на параметры частиц

1. Естественно полагать, что второй и третий вариант условий на третьи (инвариантные) параметры соответствуют описанию атома как целого, тогда как первый вариант соответствует описанию внутренних отношений между двумя частицами, составляющими атом. Эта ситуация соответствует общепринятому подходу в квантовой механике, когда общая волновая функция атома разбивается на произведение двух волновых функций: 1) на описывающую движение атома как целого и 2) на волновую функцию электрона относительно центра масс системы.

Исходя из этого ограничимся здесь первым вариантом, то есть положим:

$$a_1 = a_2 = 0; \quad b_2 - b_1 = 2b. \quad (5.1)$$

2. Далее следует учесть, что два 2-компонентных спинора, соответствующих двум частицам, составляющим атом, не произвольны, а удовлетворяют неким условиям. Естественно полагать, что эти условия аналогичны тем, которые накладывались на левую и правую компоненты единой спинорной частицы. Напомним, что в собственной системе отношений эти условия состояли в постулировании одинаковости парных отношений между состояниями в двух множествах для каждого из элементов и равенства нулю перекрестных парных отношений (2.2).

Обобщим эти условия на случай составных 2-компонентных спиноров из двух частиц, образующих атом:

$$(i^1 - k^1)(i^{*1} - k^{*1}) + (i^2 - k^2)(i^{*2} - k^{*2}) = (j^1 - s^1)(j^{*1} - s^{*1}) + (j^2 - s^2)(j^{*2} - s^{*2}) = \tilde{\lambda}_1; \quad (5.2)$$

$$(i^1 - k^1)(j^{*1} - s^{*1}) + (i^2 - k^2)(j^{*2} - s^{*2}) = (i^{*1} - k^{*1})(j^1 - s^1) + (i^{*2} - k^{*2})(j^2 - s^2) = \tilde{\lambda}_2, \quad (5.3)$$

где $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$ некоторые параметры, характеризующие состояние атома. Отметим, что в (5.3) произведено обобщение на случай отличия от нуля перекрестных парных отношений. Кроме того, в общем случае следует полагать значение $\tilde{\lambda}$ зависимым от третьих параметров.

3. Кроме этого, аналогично тому, как это делалось для отдельной частицы, постулируем, что инвариант, построенный из двух спиноров (4.3), имеет некоторое фиксированное значение $\tilde{\lambda}$, также характеризующее состояние атома:

$$(i^1 - k^1)(j^2 - s^2) - (i^2 - k^2)(j^1 - s^1) = \tilde{\lambda}, \quad (5.4)$$

Выражая из (5.2), например, $(j^1 - s^1)$ и подставляя в инвариант (5.4), получаем вместе с (5.2) и (5.3) систему уравнений, из которой находим условия связи параметров двух частиц в атоме

$$(j^1 - s^1) = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_1}(i^{*2} - k^{*2}) + \frac{\tilde{\lambda}_2}{\lambda_1}(i^1 - k^1); \quad (j^2 - s^2) = -\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_1}(i^{*1} - k^{*1}) + \frac{\tilde{\lambda}_2}{\lambda_1}(i^2 - k^2). \quad (5.5)$$

Эти соотношения можно трактовать как прообраз уравнений Дирака для атома в собственной системе отношений.

4. В выписанных уравнениях содержатся три параметра: $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_2$ и $\tilde{\lambda}$ вместо одного параметра в определении свободной частицы. Легко показать, что эти три параметра удовлетворяют следующему соотношению:

$$\tilde{\lambda}^2 = \tilde{\lambda}_1^2 - \tilde{\lambda}_2^2. \quad (5.6)$$

В случае, если бы парные отношения между частицами (5.3) обратились в нуль (при $\tilde{\lambda}_2 = 0$), то два оставшихся параметра совпали бы, как это имело место в случае отдельной частицы.

5. Далее можно было бы пойти по тому же пути, что и при выводе прообраза уравнений Дирака для свободной частицы в произвольной системе отношений [8], то есть произвести преобразование бустов. Однако пойдем по другому пути — будем анализировать значения инварианта, что фактически означает переход к квадрированному уравнению Дирака. Начнем с того, что положим перекрестные отношения равными нулю, то есть пусть

$$\tilde{\lambda}_2 = 0; \quad \rightarrow \tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_1, \quad (5.7)$$

тогда инвариант (5.4) можно представить в виде:

$$[(i^1 - k^1)(i^{*1} - k^{*1}) + (i^2 - k^2)(i^{*2} - k^{*2})] = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = \tilde{\lambda}_1, \quad (5.8)$$

где использованы естественные обозначения для произведений комплексных чисел на их сопряженные значения:

$$(i^1 - k^1)(i^{*1} - k^{*1}) = y_1^2 + y_2^2; \quad (i^2 - k^2)(i^{*2} - k^{*2}) = y_3^2 + y_4^2. \quad (5.9)$$

6. Таким образом, при наложенном условии базовое 4×4 -отношение (4.2) представляется в виде:

$$-4b^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)^2 = -4b^2\tilde{\lambda}_1^2 = -\lambda_1^2. \quad (5.10)$$

Это выражение можно понимать как задание точки на некой 3-мерной гиперболе в абстрактном 4-мерном евклидовом пространстве.

5.2. Условие стационарности

1. Естественно возникает вопрос: чему соответствуют точки на 3-мерной гиперболе? Чтобы на него ответить необходимо использовать блок идей о макроскопической (статистической) природе пространства-времени. Согласно этому подходу классические пространственно-временные понятия являются статистическим итогом наложения огромного числа неких микроскопических факторов. Об этом писали П. К. Рашевский, Е. Циммерман, Р. Пенроуз и ряд других авторов [9–11]. Однако, как правило, при этом не назывались суммируемые факторы.

2. В реляционно-статистическом подходе явление электромагнитного “излучения” не сопряжено с процессом распространения электромагнитной волны, поскольку в этом подходе среди первичных понятий нет пространственно-временного континуума, по которому может распространяться

волна. Вместо этого создается глобальная матрица “фотонных” отношений между излучателем и всеми возможными поглотителями. Но излученных, но еще не поглощенных излучений во Вселенной чрезвычайно много. Есть основания утверждать, что классические (геометрические) понятия являются итогом наложения именно этих “фотонных” вкладов.

Все изложенное выше в данной статье следует отнести к свойствам отношений, создаваемых в каждой из таких “фотонных” матриц, а точка указанная выше на 3-мерной гиперсфере соответствует вкладу лишь одной из таких “фотонных” матриц. Но таких точек много. Естественно полагать, что совокупность таких точек удовлетворяет некому условию стационарности (атома).

3. К введению условия стационарности можно подойти с разных позиций. Предлагается следующее обоснование, которое более подробно обсуждается в работах [6, 8]. Дело в том, что закон БСКО ранга (4, 4), выписанный в 2.1 допускает конформное преобразование, соответствующее в данной теории выделению БСКО ранга (2, 2) как подсистемы БСКО ранга (4, 4). Можно показать, что параметры этой БСКО ранга (2, 2) имеют равные единице модули, то есть отличающиеся лишь инвариантными фазовыми параметрами. Последние определяются инвариантами из совокупности параметров в “импульсном” и “координатном” представлениях.

4. Если введенные выше параметры y_k считать импульсными, то их значения можно получить дифференцированием экспонент по сопряженным им “координатным” параметрам z_k , как это принято в квантовой механике. Полагая, что распределение фотонных вкладов характеризуется некой функцией $\Psi(z_1, z_2, z_3, z_4)$, соотношению (5.10) можно сопоставить следующее дифференциальное условие стационарности:

$$\pm 2b \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} \right) \Psi(z_1, z_2, z_3, z_4) = \lambda_1 \Psi(z_1, z_2, z_3, z_4), \quad (5.11)$$

где слева стоит оператор Лапласа, действующий на функцию $\Psi(z_1, z_2, z_3, z_4)$, а λ_1 — собственное значение оператора Лапласа, характеризующее радиус гиперсферы.

5. Отметим, что полученное выражение фактически обосновывает результат Фока и Хиллерааса, открывших в 30-х годах $O(4)$ -симметрию в задаче атома водорода при ее решении на основе уравнения Шредингера.

6. Разделение переменных и уравнение Лагерра

1. Перейдем от переменных z_1, z_2, z_3, z_4 к сферическим координатам $\rho, \alpha, \theta, \varphi$, согласно формулам:

$$z_1 = \rho \sin \alpha \sin \theta \cos \varphi; \quad z_2 = \rho \sin \alpha \sin \theta \sin \varphi; \quad z_3 = \rho \sin \alpha \cos \theta; \quad z_4 = \rho \cos \alpha, \quad (6.1)$$

тогда уравнение (5.11) принимает вид

$$2b \left[\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + 3\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2ctg\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + ctg\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right] \Psi(\rho, \alpha, \theta, \varphi) = \pm \lambda_1 \rho^2 \Psi(\rho, \alpha, \theta, \varphi). \quad (6.2)$$

2. Представим функцию распределения Ψ в виде произведения двух слагаемых, отдельно зависящих от двух пар переменных: $\Psi(\rho, \alpha, \theta, \varphi) = R(\rho, \alpha)\Phi(\theta, \varphi)$.

Далее произведем разделение переменных по указанным двум парам.

3. Для функции $\Phi(\theta, \varphi)$ получаем известное уравнение для сферических функций на двумерной сфере:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + ctg\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \Lambda_2 \right] \Phi(\theta, \varphi) = 0, \quad (6.3)$$

где Λ_2 — константа разделения переменных.

Решение этого уравнения хорошо известно. Его собственные значения: $\Lambda_2 = l(l+1)$, где $l = 0, 1, \dots$

4. Уравнение для второй функции $R(\rho, \alpha)$ находится в виде

$$\left[\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + 3\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2ctg\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \pm \rho^2 \frac{\lambda_1}{2b} - \frac{\Lambda_2}{\sin^2 \alpha} \right] R(\rho, \alpha) = 0. \quad (6.4)$$

5. Перепишем полученное уравнение в новых координатах:

$$x = \rho \sin \alpha; \quad y = \rho \cos \alpha. \quad (6.5)$$

В итоге имеем:

$$\left[x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \Lambda_2 \pm x^2 \frac{\lambda_1}{2b} \right] R(x, y) = 0. \quad (6.6)$$

6. Обратим внимание на то, что в этом уравнении роль координаты y резко отличается от роли координаты x . Это обусловлено тем, что в формулах (6.1) 3-мерные угловые координаты непосредственно связаны лишь с переменной x . Произведем в (6.6) разделение переменных, положив $R(x, y) = Y(y)\phi(x)$. Для функции $Y(y)$ находим уравнение и решение в виде

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + \Lambda_1 \right] Y(y) = 0, \quad Y(y) = C_1 \exp(i\sqrt{\Lambda_1}y), \quad (6.7)$$

где Λ_1 — константа разделения.

7. Произведя преобразование функции

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\psi(x) \quad (6.8)$$

и разделив все уравнение на x , приходим к *реляционно-статистическому уравнению* (PCУ)

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - \frac{1}{4x}(1 + 4\Lambda_2) - x\Lambda_1 \pm x \frac{\lambda_1}{2b} \right] \psi(x) = 0. \quad (6.9)$$

8. Полученное уравнение очень напоминает уравнение Лагерра:

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - \frac{s^2}{4x} - \frac{1}{4}x + \lambda \right] \psi(x) = 0. \quad (6.10)$$

Для совпадения уравнений следует в формуле (5.11) выбрать знак минус и положить:

$$1 + 4\Lambda_2 = (2l + 1)^2 = s^2; \quad \Lambda_1 = \frac{1}{4}; \quad 2b = x; \quad \lambda_1 = \lambda. \quad (6.11)$$

9. Напомним, что решение уравнения Лагерра представляется в виде $\psi(x) = x^{s/2}e^{-x/2}Q_n^{(s)}(x)$, где $Q_n^{(s)}(x)$ — обобщенные полиномы Чебышева–Лагерра, а собственные значения записываются через целые числа:

$$s = 2l + 1; \quad \lambda = n_r + \frac{1}{2}(s + 1) = n_r + (l + 1). \quad (6.12)$$

Таким образом, исходя из реляционно-статистических соображений можно прийти к собственным значениям, характеризующим состояние атома в общепринятой квантовой механике.

Подчеркнем, что в данных рассуждениях нигде не использовались ни классическое пространство-время, ни общепринятые уравнения квантовой механики: Шредингера или Клейна–Фока–Гордона.

7. Сопоставление двух вариантов перехода от гиперсферы к уравнениям квантовой механики

Произведем сравнение результатов в двух описанных подходах: теоретико-полевого и реляционно-статистического. Как уже отмечалось, главное различие состоит в исходных позициях: в теоретико-полевого подходе Фок и Хиллераас исходили из априорно заданного пространства-времени и постулированного уравнения Шредингера, тогда как в реляционно-статистическом подходе исходными были положения БСКО, которыми описывались отношения между двумя частицами, составляющими атом.

Для сопоставления двух подходов целесообразно рассмотреть различия и общие моменты в процедуре обратного перехода от гиперсферы к общепринятым уравнениям квантовой механики. При этом будем опираться на проанализированный в работе одного из авторов [12] обратный переход для варианта теории Фока и Хиллерааса.

1. Прежде всего, следует подчеркнуть принципиально важное различие при переходе от алгебраических уравнений гиперсферы (5.10) к дифференциальному уравнению (5.11). В теоретико-полевым подходе это обосновано уже использованными дифференциальными уравнениями, а в реляционно-статистическом подходе данный переход обусловлен идеологией суммирования огромного количества вкладов от ранее случившихся электромагнитных процессов в окружающем мире. Дифференциальное уравнение возникло как эффективный способ работы с огромным количеством комплексных вкладов. Это принципиально важный момент, существенный для всей реляционно-статистической переформулировки квантовой механики.

2. Примечательно, что в обоих подходах сначала осуществляется переход к соотношениям четвертой степени по используемым координатам. В теоретико-полевым подходе это уравнение (1.4), получаемое квадратурой уравнения Шредингера, а в реляционно-статистическом подходе это квадрат инварианта (5.10), к которому сводится базовое 4×4 -отношение.

3. Далее следует учесть, что в теоретико-полевым подходе в правой части уравнения Лапласа стоит нуль, а в реляционно-статистическом подходе справа пишется выражение, пропорциональное собственному значению, которое подлежит определению.

4. В обоих случаях оператор Лапласа расписывается в 4-мерных сферических координатах, однако имеются существенные различия. В теоретико-полевой парадигме ограничиваются 3-мерной сферической частью, игнорируя радиальную. А в реляционно-статистическом подходе производится $(2+2)$ -разделение переменных на двумерную сферическую часть (с углами θ, φ) и на радиально-сферическую часть (с ρ и третьим углом α).

5. В теоретико-полевой парадигме переход к 3-мерным декартовым координатам осуществляется методом стереографической проекции с 3-мерной гиперсферы на 3-мерную гиперплоскость и лишь потом производится разделение на 2-мерную угловую часть и 1-мерное радиальное уравнение. При этом в качестве радиального уравнения получается уравнение Лежандра.

В реляционно-статистическом подходе в радиально-угловом уравнении через ρ и α определяются две декартовы координаты x и y , и производится разделение этих переменных так, что оставшееся уравнение зависимости от x оказывается совпадающим с уравнением Лагерра, к которому приводится уравнение Шредингера в общепринятом изложении решения задачи атома водорода.

6. Заметим, что в обоих подходах можно осуществить переход как к нерелятивистскому уравнению Шредингера, так и к релятивистскому уравнению Клейна–Фока–Гордона [14].

7. В реляционно-статистическом подходе имеется естественный переход от $O(4)$ -симметричных решений для уравнений Шредингера или Клейна–Фока–Гордона к решениям, где снимается вырождение по орбитальному квантовому числу l . Однако в данной работе этот вопрос не затрагивается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров Ю.С. Метафизика. М.: БИНОМ (Лаборатория базовых знаний), 2009.
2. Хиллераас Е.А. Волновые уравнения задачи Кеплера в импульсном пространстве // *Zeitschrift fur Physik*. 1932. В74. № 3, 4. Р. 216.
3. Фок В.А. Атом водорода и неевклидова геометрия // *Известия АН СССР*. 1935. Т. 2. С. 169–184.
4. Фок В.А. Симметрия атома водорода // *Сорена*. 1935. Т. 5. С. 3–9.
5. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. Теория систем отношений. М.: Изд-во Московского гос. ун-та, 1996.
6. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 2. Теория физических взаимодействий. М.: Изд-во Московского ун-та, 1998.
7. Владимиров Ю.С. Физика дальнего действия. Природа пространства-времени. М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2016.
8. Владимиров Ю.С. Основания физики. М.: БИНОМ (Лаборатория базовых знаний), 2008.
9. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 658 с.
10. Zimmerman E.J. The macroscopic nature of space-time // *Amer. J. Phys.* 1962. Vol. 30. P. 97–105.
11. Пенроуз Р. Структура пространства-времени. М.: Мир, 1972.
12. Владимиров Ю.С. Геометрофизика. М.: БИНОМ (Лаборатория базовых знаний), 2005.
13. Wheeler J.A., Feynman R.P. Interaction with the absorber as the mechanism of radiation // *Rev. Mod. Phys.* 1945. Vol. 17. P. 157–181.

14. Vladimirov Yu.S., Tereshchenko D.A. Relational statistical nature of the metric // Abstracts of XIIth International Conference on Gravitation, Astrophysics and Cosmology. PFUR. Moscow, 2015. P. 61–62.

Поступила в редакцию 09.03.2016

Владимиров Юрий Сергеевич, д.ф.-м.н., профессор, кафедра теоретической физики, Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, 119991, Россия, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: yusvlad@rambler.ru

Терещенко Дмитрий Александрович, аспирант, Институт гравитации и космологии РУДН, 115419, Россия, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3.

E-mail: dima91ter@yandex.ru

Yu. S. Vladimirov, D. A. Tereshchenko

Relational-statistical justification of the hydrogen atom's $O(4)$ -symmetry

Keywords: relations systems theory, quantum mechanics, hydrogen atom, $O(4)$ -symmetry, energy levels of atom, Laguerre equation.

PACS: 03.65.Ca.; 03.65.Fd.; 03.65.Ta

There is suggested a solution to the hydrogen atom problem in the framework of relational-statistical approach to geometry and physics. Using the mathematical formalism of the binary systems of complex relations theory there was shown the $O(4)$ -symmetry of the hydrogen atom. There is made a comparison of this solution with the works of V. Fock and E. Hilleraas on $O(4)$ -symmetry, which were made in terms of conventional quantum mechanics. This paper is a realization component of classical space-time concepts deduction from the fundamental patterns and laws, specific for microworld.

REFERENCES

1. Vladimirov Yu.S. *Metafizika* (Metaphysics), Moscow: BINOM (Laboratoriya bazovykh znaniy), 2009.
2. Hilleraas E.A. Wellengleichung des Kepler-Problems im Impulsraum, *Zeitschrift fur Physik*, 1932, vol. 74, no. 3, 4, pp. 216.
3. Fock V.A. The hydrogen atom and non-Euclidean geometry, *Izvestiya AN SSSR*, 1935, vol. 2, pp. 169–184.
4. Fock V.A. Symmetry of hydrogen atom, *Sorena*, 1935, vol. 5, pp. 3–9.
5. Vladimirov Yu.S. *Relyatsionnaya teoriya prostranstva-vremeni i vzaimodeystviy. Chast' 1. Teoriya sistem otnosheniy* (Relational theory of space-time and interactions. Part 2. Relations systems theory), Moscow: Izdatel'stvo Moskovskogo Universiteta, 1996.
6. Vladimirov Yu.S. *Relyatsionnaya teoriya prostranstva-vremeni i vzaimodeystviy. Chast' 2. Teoriya fundamental'nykh vzaimodeystviy* (Relational theory of space-time and interactions. Part 2. The theory of fundamental interactions), Moscow: Izdatel'stvo Moskovskogo Universiteta, 1998.
7. Vladimirov Yu.S. *Fizika dal'nodeystviya. Priroda prostranstva-vremeni* (The Physics of action at a distance. Nature of space-time), Moscow: Knizhny dom "LIBROCOM", 2016.
8. Vladimirov Yu.S. *Osnovaniya fiziki* (Foundations of physics), Moscow: BINOM (Laboratoriya bazovykh znaniy), 2008.
9. Rashevskiy P.K. *Rimanova geometriya i tenzornyy analiz* (Riemann geometry and tensor analysis), Moscow: Nauka, 1967, 658 p.
10. Zimmerman E.J. The macroscopic nature of space-time, *Amer. J. Phys.*, 1962, vol. 30, pp. 97–105.
11. Penrose R. *Struktura prostranstva-vremeni* (The structure of space-time), Moscow: Mir, 1972.
12. Vladimirov Yu.S. *Geometrofizika* (Geometrophysics), Moscow: BINOM (Laboratoriya bazovykh znaniy), 2005.
13. Wheeler J.A., Feynman R.P. Interaction with the absorber as the mechanism of radiation, *Rev. Mod. Phys.*, 1945, vol. 17, pp. 157–181.
14. Vladimirov Yu.S., Tereshchenko D.A. Relational statistical nature of the metric, *Abstracts of XIIth International Conference on Gravitation, Astrophysics and Cosmology*, PFUR, Moscow, 2015, pp. 61–62.

Received 09.03.2016

Vladimirov Yuriy Sergeevich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Physics, Lomonosov State University, Moscow, 119991, Russia.

E-mail: yusvlad@rambler.ru

Tereshchenko Dmitriy Aleksandrovich, Postgraduate Student, Institute of gravitation and cosmology PFUR, Moscow, 115419, Russia.

E-mail: dima91ter@yandex.ru