

УДК 537.8, 52-334.7

*М. А. Мастерова¹, В. Я. Энн²***БЕССИЛОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ В ОКРЕСТНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ
НАМАГНИЧЕННОГО НЕБЕСНОГО ТЕЛА³**

Исследована геометрия бессилловой поверхности – поверхности, на которой вектор электрического поля ортогонален вектору магнитного поля в магнитосфере вращающегося однородно намагниченного небесного тела. Предполагается, что магнитная ось тела не совпадает с осью вращения. Получены формулы для бессилловой поверхности и скорости ее движения, справедливые на любом расстоянии от тела. Исследована геометрия этой поверхности в окрестности и за пределами светового цилиндра. Построены трехмерные графики, иллюстрирующие поведение бессилловой поверхности в центральной области, вблизи светового цилиндра и вне этого цилиндра. Показано, что с удалением от центрального тела бессилловая поверхность закручивается вокруг оси вращения этого тела. Вне светового цилиндра бессилловая поверхность трансформируется в спираль, витки которой близки к сферическим поверхностям. Вращение такой трехмерной спирали создает движение поверхности, скорость которого может быть меньше скорости света, в том числе, далеко за световым цилиндром. Известно, что при определенных условиях на бессилловой поверхности могут накапливаться заряженные частицы, теряющие энергию вследствие излучения. Эти частицы могут двигаться вместе с расширяющейся бессилловой поверхностью, формируя таким образом пульсарный ветер.

Ключевые слова: бессилловая поверхность, пульсар, поле диполя, магнитосфера, планеты, звезды.

PACS: 97.10.Ld, 94.30.Xy

Введение

Структура электромагнитного поля в окрестности намагниченного небесного тела имеет большое значение для анализа динамики заряженных частиц в окрестности этого тела. В частном случае, когда ось вращения тела совпадает с магнитной осью, геометрия магнитного поля и движение заряженных частиц в этом поле довольно подробно изучены на примере Земли [1]. Более общий случай, когда ось магнитного поля наклонена относительно оси вращения, привлекает внимание уже несколько десятилетий в связи с открытием пульсаров. Детальное представление об электромагнитных полях и распределении зарядов в магнитосфере пульсаров необходимо для понимания механизмов наблюдаемого электромагнитного излучения этих объектов. Этим темам посвящено большое количество работ (см., например, монографию [2] и цитируемые в ней работы).

Модель вращающейся нейтронной звезды с сильным магнитным полем впервые описали Голдрейх и Джулиан [3]. Они предположили, что под действием электрического поля, которое генерируется за счет вращения сильно намагниченного тела, электроны вырываются с поверхности звезды и движутся с ускорением вдоль силовых линии магнитного поля. Джексон [4] первым отметил, что над полюсами намагниченного тела, вращающегося вокруг своей магнитной оси, существует поверхность, на которой заряженные частицы, теряя энергию на излучение, могут накапливаться. Эта поверхность определяется условием, что напряженность электрического поля ортогональна напряженности магнитного поля. Такая поверхность получила название бессилловой поверхности. Джексон показал, что в случае, когда ось вращения совпадает с магнитной осью, а электрическое поле обусловлено зарядом, индуцированным на поверхности звезды, бессилловая поверхность имеет форму купола, опирающегося на поверхность звезды. При этом, отрицательно заряженные частицы, скапливающиеся на бессилловой поверхности, могут стекать в тело звезды, образуя потоки турбулентной плазмы. Геометрия бессилловой поверхности на расстояниях много меньших радиуса светового цилиндра исследована в статье [5], а в работе [6] – на расстояниях вплоть до светового цилиндра во вращающейся вместе со звездой системе отсчета.

В настоящей работе исследована геометрия бессилловой поверхности для произвольных расстояний в инерциальной системе отсчета и представлены детали этой поверхности, не рассмотренные в работе [6]. Получены формулы для скорости движения бессилловой поверхности и показано, что даже на больших расстояниях от источника поля эта скорость может быть меньше скорости света.

¹E-mail: kolesnikova_ma88@mail.ru

²E-mail: epp@tspu.edu.ru

³Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, грант № 3.867.2014/К.

1. Движение бессиловой поверхности

Найдем уравнение поверхности $\mathbf{E}\mathbf{H} = 0$, где \mathbf{E} и \mathbf{H} – напряженности электрического и магнитного полей соответственно. Аналитические выражения для электромагнитного поля в окрестности вращающегося намагниченного тела существенно зависят от используемой модели. Мы будем использовать модель идеально проводящей однородно намагниченной сферы, магнитная ось которой наклонена к оси вращения. Поле в окрестности такого тела найдено в [7].

Поскольку вращающееся твердое тело несовместимо с теорией относительности, формулы для поля, полученные в [7], справедливы в приближении нерелятивистского вращения тела. Поэтому достоверную часть этих выражений можно выделить разложением по малому параметру $R\omega/c$, где ω – угловая скорость вращения, R – радиус тела, c – скорость света. Первые члены такого разложения в сферической системе координат r, θ, φ (ось Z направлена вдоль вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$) имеют вид [8]:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\mu k^3 a^2}{2\rho^4} [\cos \alpha (3 \cos 2\theta + 1) + \sin \alpha \sin 2\theta (3C - \rho^2 \cos \lambda)], \\ E_\theta &= -\frac{\mu k^3}{\rho^2} \left[C \sin \alpha \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \cos 2\theta \right) + \frac{a^2}{\rho^2} \cos \alpha \sin 2\theta \right], \\ E_\varphi &= \frac{\mu k^3}{\rho^2} S \sin \alpha \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right), \\ H_r &= \frac{2\mu k^3}{\rho^3} [C \sin \alpha \sin \theta + \cos \alpha \cos \theta], \\ H_\theta &= \frac{\mu k^3}{\rho^3} [\cos \alpha \sin \theta - \sin \alpha \cos \theta (C - \rho^2 \cos \lambda)], \\ H_\varphi &= \frac{\mu k^3}{\rho^3} \sin \alpha (S - \rho^2 \sin \lambda). \end{aligned} \quad (1.1)$$

где μ – магнитный момент тела, α – угол между магнитной осью и осью вращения, $\rho = \omega r/c$, $a = \omega R/c$, $\lambda = \rho + \varphi - \omega t$, $k = \omega/c$, $S = \sin \lambda - \rho \cos \lambda$, $C = \cos \lambda + \rho \sin \lambda$.

Поле описываемое формулами (1.1) состоит из магнитного поля вращающегося точечного магнитного диполя и электрического поля, которое является суперпозицией дипольного и квадрупольного полей. Квадрупольное электрическое поле создается поверхностным зарядом, который индуцируется вращением проводящего тела в собственном магнитном поле. Эта часть представлена членами, пропорциональными a^2/ρ^2 и убывающими с расстоянием как ρ^{-4} . На больших расстояниях $\rho \gg a$ эта часть обращается в ноль и электромагнитное поле становится полем вращающегося магнитного диполя.

Условие $\mathbf{E}\mathbf{H} = 0$ дает следующее уравнение бессиловой поверхности

$$4 \cos \theta (C \sin \alpha \sin \theta + \cos \alpha \cos \theta)^2 + \sin \alpha (C \cos \alpha \sin \theta - \sin \alpha \cos \theta) \left(\frac{\rho^2}{a^2} - 1 \right) = 0. \quad (1.2)$$

Зависимость от времени входит в это уравнение в форме $\varphi - \omega t = \psi$. Это означает, что бессиловая поверхность вращается как целое вместе с телом с угловой скоростью ω . В связи с этим возникает вопрос – имеет ли эта поверхность какой-либо физический смысл за пределами светового цилиндра, где ее линейная скорость больше скорости света? Интерес к бессиловой поверхности связан с тем, что если заряженная частица находится на этой поверхности, то электрическое поле не ускоряет эту частицу вдоль магнитного поля. В сильных полях, когда радиационное трение существенно влияет на движение заряженных частиц, они могут накапливаться на бессиловой поверхности, вращаясь вместе с этой поверхностью [4, 5, 9].

По существу – бессиловая поверхность есть не что иное, как геометрическое место точек. Наблюдаемым движением поверхности является ее движение в направлении, ортогональном ее поверхности. Например, скольжение плоскости вдоль самой себя не является реальным движением. В связи с этим представляет интерес скорость движения бессиловой поверхности в направлении ее нормали при вращении этой поверхности вместе с телом. Нормаль к поверхности, заданной уравнением $F(\mathbf{r}) = 0$ параллельна вектору градиента функции $F(\mathbf{r})$ и может быть вычислена по формуле

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}. \quad (1.3)$$

Проекция линейной скорости $[\omega r]$ на нормаль в сферической системе координат равна

$$v_n = (\mathbf{n}[\omega r]) = \frac{\omega}{|\nabla F|} \frac{\partial F}{\partial \varphi}. \quad (1.4)$$

Значение функции в правой части этого выражения нужно брать на бессиловой поверхности.

Найдем нормальную скорость бессиловой поверхности вдали от поверхности звезды, на расстояниях $\rho \gg a$. Из уравнения (1.2) следует, что в этом случае бессиловая поверхность задается уравнением

$$F \equiv C \cos \alpha \sin \theta - \sin \alpha \cos \theta = 0. \quad (1.5)$$

Градиент этой функции равен

$$\nabla F = \frac{\omega}{c} \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial F}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right), \quad (1.6)$$

где

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \rho \sin \theta \cos \alpha \cos \lambda, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = C \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = -S \sin \theta \cos \alpha. \quad (1.9)$$

Сферические координаты в последних формулах должны удовлетворять уравнению (1.5). Для этого выразим $\operatorname{tg} \theta$ из (1.5) и подставим в (1.6). Далее с помощью формулы (1.4) найдем модуль нормальной скорости поверхности в единицах скорости света $\beta_n = v_n/c$

$$|\beta_n| = \frac{\rho |S \sin 2\alpha|}{2\sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha [C^2(1 + \rho^2 \cos^2 \alpha) + \rho^2 \sin^2 \alpha + \rho^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda]}}. \quad (1.10)$$

Внутри светового цилиндра эта величина, очевидно, меньше единицы, а за пределами светового цилиндра она может быть как больше единицы, так и меньше. Но на очень больших расстояниях нормальная скорость бессиловой поверхности стремится к скорости света. Действительно, из уравнения (1.5) следует, что если $\rho \gg 1$ и $\cos \alpha$ и $\sin \theta$ не малы, то $\sin \lambda \ll 1$, следовательно $S \approx -\rho \cos \lambda \gg 1$. Используя эти приближения получим для $\rho \gg 1$

$$|\beta_n| \approx \frac{\rho \sin \alpha |\cos \lambda|}{\sqrt{\rho^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda + C^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}}. \quad (1.11)$$

Предел этой величины при $\rho \rightarrow \infty$ равен единице. Действительно, с ростом ρ величина C остается ограниченной в силу уравнения (1.5). Потому при больших ρ первое слагаемое в подкоренном выражении становится преобладающим.

Таким образом, если заряженные частицы накапливаются на бессиловой поверхности, то они имеют возможность перемещаться вместе с этой поверхностью и за пределами светового цилиндра.

2. Геометрия бессиловой поверхности

Геометрия бессиловой поверхности в области $\rho \ll 1$ исследована довольно подробно в работе [5]. Структура этой поверхности на больших расстояниях изучена во вращающейся вместе со звездой системе отсчета в статье [6]. Использование вращающейся системы отсчета ограничивает область исследования поверхностью светового цилиндра. В настоящей работе мы исследуем форму бессиловой поверхности и характер ее движения на произвольных расстояниях от оси вращения. Представлены изображения бессиловой поверхности, демонстрирующих ее геометрию как в окрестности светового цилиндра так и на больших расстояниях. Все графики построены для угла наклона магнитной оси к оси вращения $\alpha = \pi/3$ и радиуса звезды $R = 0.3c/\omega$.

Бессиловая поверхность внутри светового цилиндра, построенная по формуле (1.2) для некоторого фиксированного момента времени приведена на рисунке 1. Числа на осях декартовой системы

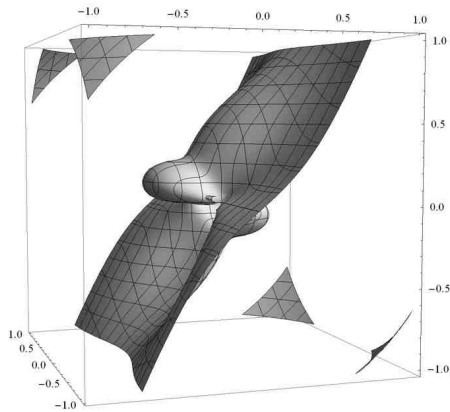


Рис. 1. Бессиловая поверхность вблизи небесного тела

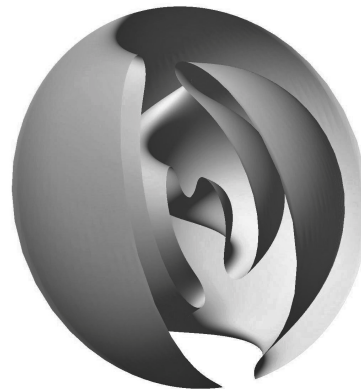


Рис. 2. Бессиловая поверхность в области $\rho < 12$

координат указывают расстояние в единицах $\frac{\omega}{c}(x, y, z)$. За пределами светового цилиндра бессиловая поверхность образует спиралевидную структуру, показанную на рисунке 2. Чтобы показать внутреннюю часть, из поверхности вырезан сектор с угловым раствором $\pi/2$.

Витки этой пространственной спирали близки к сферическим поверхностям, но они не касаются оси вращения. С удалением от центра поверхность витков асимптотически приближается к сферической поверхности. Более точное представление о характере бессиловой поверхности дают сечения, представленные на рисунках 3 – 5.

Сечение экваториальной плоскостью $z = 0$ в области $\rho \leq 5$ показано на рисунке 3, а сечения взаимно ортогональными плоскостями, проходящими через ось вращения (ось Z), представлены на рисунках 4 и 5. Рисунки 3 – 5 показывают, каким образом формируется сферическая спираль, изображенная на рисунке 2.

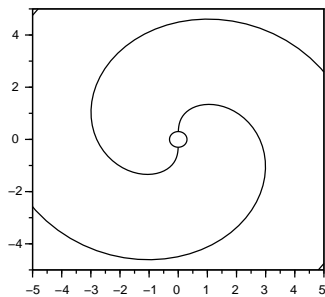


Рис. 3. Сечение бессиловой поверхности плоскостью $z = 0$

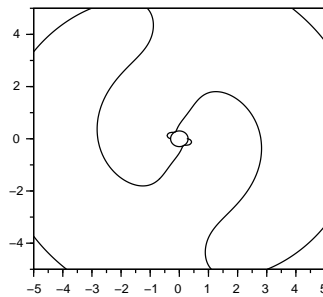


Рис. 4. Сечение бессиловой поверхности плоскостью $\varphi = 0$

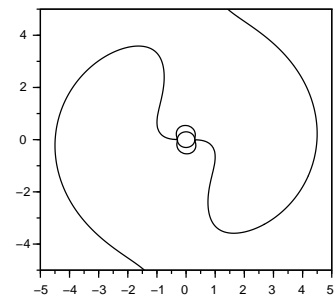


Рис. 5. Сечение бессиловой поверхности плоскостью $\varphi = \pi/2$

При вращении поверхности, изображенной на рисунке 2, наблюдаемое ее изменение состоит в том, что каждый виток сферической спирали расширяется от центра, а новые витки рождаются в начале координат в результате вращения источника. Наблюдаемая нормальная скорость движения поверхности описывается формулой (1.10), а на больших расстояниях приближенной формулой (1.11). Если бы бессиловая поверхность представляла собой вращающееся физическое тело, то каждая точка этого тела за пределами светового цилиндра имела бы сверхсветовую скорость. Но так как эта поверхность не более чем геометрическое место точек, физический смысл имеет только нормальная составляющая скорости. Другими словами, если бессиловая поверхность является ловушкой для заряженных частиц, то частицы могут двигаться вместе с этой поверхностью и за пределами светового цилиндра. Это явление может быть одним из механизмов ускорения заряженных частиц в магнитосфере нейтронной звезды. Принцип действия такого механизма аналогичен винтовому транспорту с плавно изменяющимся шагом винта.

Заклучение

Принято считать, что световой цилиндр является физической границей для многих явлений в магнитосфере вращающихся небесных тел, поля которых не обладают аксиальной симметрией. Например, считается, что силовые линии магнитного поля замкнуты в пределах светового цилиндра, а вне этого цилиндра разрываются истекающей из магнитосферы плазмой. Предполагается также, что световой цилиндр является границей плазмы вращающейся вместе с намагниченной звездой. Пример рассмотренной в настоящей работе бессиловой поверхности говорит о том, что это не совсем так. Вследствие конечной скорости распространения электромагнитного поля зависимость поля от времени имеет вид $f(\omega t - \varphi - \omega r/c)$. Вследствие этого геометрия электромагнитного поля и других характеристик, выражаемых через напряженности электрического и магнитного полей, приобретает спиралевидную структуру типа сечения, показанного на рисунке 3. Эта структура вращается как целое с угловой скоростью ω . Другим примером физического объекта такого рода является волновой фронт, задаваемый уравнением $\omega t - \varphi - \omega r/c = \text{const}$. Сечение этой поверхности плоскостью, ортогональной оси вращения, представляет собой архимедову спираль. В радиальном направлении эта поверхность движется со скоростью света, но поскольку волновой фронт не ортогонален лучу, проведенному из начала координат, нормальная составляющая этой скорости меньше скорости света и равна

$$v_n = \frac{c\rho \sin \theta}{\sqrt{\rho^2 \sin^2 \theta + 1}},$$

Следовательно, частица ненулевой массы может двигаться вместе с волновым фронтом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Størmer C. The polar aurora. International monographs on radio. Clarendon Press, 1955.
2. Малов И.Ф. Радиопульсары. М.: "Наука", 2004.
3. Goldreich P., Julian W.H. Pulsar Electrodynamics // ApJ. 1969. Vol. 157. P. 869–880.
4. Jackson E.A. A new pulsar atmospheric model. I - Aligned magnetic and rotational axes // ApJ. 1976. Vol. 206. P. 831–841.
5. Истомин Я.Н., Собьянин Д.Н. Заполнение плазмой магнитосферы нейтронных звезд: динамика движения электронов и позитронов // ЖЭТФ. 2009. Т. 136. № 3(9). С. 458–475.
6. Epp V., Masterova M.A. On the "Force-free Surface" of the Magnetized Celestial Bodies // Acta Physica Polonica B. 2015. Vol. 46. № 8. P. 1593–1602.
7. Deutsch A. J. The electromagnetic field of an idealized star in rigid rotation in vacuo // Annales d'Astrophysique. № 1. P. 1–10.
8. Epp V., Masterova M. Effective potential energy for relativistic particles in the field of inclined rotating magnetized sphere // Astrophysics and Space Science. 2014. Vol. 353. № 2. P. 473–483.
9. Shibata S. A numerical method to determine the electromagnetic field of the pulsar magnetosphere with inclined magnetic moment // Astrophysics and Space Science. 1989. Vol. 161. № 1. P. 145–158.

Поступила в редакцию 30.12.2015

Мастерова Мария Александровна, к. ф.-м. н., кафедра высшей математики и математической физики, Томский политехнический университет, 634050, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30.
E-mail: kolesnikova_ma88@mail.ru

Эпп Владимир Яковлевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра теоретической физики, Томский государственный педагогический университет, 634061, Россия, г. Томск, ул. Киевская, 60.
E-mail: epp@tspu.edu.ru

M. A. Masterova, V. Ya. Epp

Force free surface around a rotating magnetized celestial body

Keywords: force free surface, pulsar, dipole field, magnetosphere, planets, stars.

PACS: 97.10.Ld, 94.30.Xy

Geometry of the surface where the electric field of rotating magnetized cosmic body is orthogonal to the magnetic field is studied. This surface is usually referred to as a force-free surface. It is widely accepted that the relativistic charged particles moving in the magnetosphere of a neutron star can be trapped by the force-free surface, or at least by some segments of the surface due to radiation losses of the particles. Present paper concentrate on geometry of the force-free surface and its motion related to rotation of the magnetized body. The case when the axis of the magnetic field is not parallel to the axis of rotation is considered.

The force-free surface is defined by equation

$$4 \cos \theta (C \sin \alpha \sin \theta + \cos \alpha \cos \theta)^2 + \sin \alpha (C \cos \alpha \sin \theta - \sin \alpha \cos \theta) \left(\frac{\rho^2}{a^2} - 1 \right) = 0,$$

where $C = \cos \lambda + \rho \sin \lambda$, $\lambda = \rho + \varphi - \omega t$, ω is the vector of angular velocity, r, θ, φ are the spherical coordinates with axis z parallel to vector ω , $\rho = \omega r/c$, $a = \omega R/c$, R is the radius of the celestial body, α is the angle between the axis of rotation and the magnetic axis. Geometry of this surface is investigated in the neighborhood and outside the light cylinder defined by equation $r \sin \theta = \omega/c$. It is shown that the force-free surface at great distances is twisted around the axis of rotation. Outside the light cylinder the force-free surface is transformed into a 3D spiral which coils are close to the spherical surfaces. Rotation of such a three-dimensional spiral leads to radial expansion of the surface.

Actually, the force-free surface is nothing more than a geometric locus. The observed motion of the surface is its motion in the direction orthogonal to it. In this regard, it is of interest to calculate the velocity of surface v_n in the direction of its normal, while the surface is co-rotating with the magnetized body. The speed of the surface v_n is calculated for arbitrary distance from the axis of rotation. It is shown that even outside the light cylinder the speed v_n can be less than the speed of light. Far from the rotating body ($\rho \gg 1$) the speed of the surface is equal to

$$|v_n| \approx c \frac{\rho \sin \alpha |\cos \lambda|}{\sqrt{\rho^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda + C^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}}$$

and approaches asymptotically the speed of light as $\rho \rightarrow \infty$. Hence, the charged particles accumulated on the force-free surface due to radiation damping can move along with the expanding force-free surface even in the area beyond the light cylinder, thus forming the pulsar wind.

REFERENCES

1. Störmer C. *The Polar Aurura*, Oxford: Clarendon Press, 1955, 403 p.
2. Malov I. F. *Radiopulsary (Radiopulsars)*, Moscow: "Nauka", 2004.
3. Goldreich P., Julian W.H. Pulsar Electrodynamics, *ApJ*, 1969, vol. 157, pp. 869–880.
4. Jackson E.A. A new pulsar atmospheric model. I - Aligned magnetic and rotational axes, *ApJ*, 1976, vol. 206, pp. 831–841.
5. Istomin Ya. N., Sobyenin, D. N. The Filling of Neutron Star Magnetospheres with Plasma: Dynamics of the Motion of Electrons and Positrons, *J. Exp. Theor. Phys*, 2009, vol. 109, pp. 393–407.
6. Epp V., Masterova M.A. On the "Force-free Surface" of the Magnetized Celestial Bodies, *Acta Physica Polonica B*, 2015, vol. 46, no. 8, pp. 1593–1602.
7. Deutsch A.J. The electromagnetic field of an idealized star in rigid rotation in vacuo, *Ann. d'Astrophys.*, 1955, vol. 18, pp. 1–10.
8. Epp V., Masterova M.A. Effective potential energy for relativistic particles in the field of inclined rotating magnetized sphere, *Astrophys. Space Sci.*, 2014, vol. 353, pp. 473–483.
9. Shibata S. A numerical method to determine the electromagnetic field of the pulsar magnetosphere with inclined magnetic moment, *Astrophysics and Space Science*, 1989, vol. 161, no. 1, pp. 145–158.

Received 30.12.2015

Masterova Maria Aleksandrovna, PhD in Physics and Mathematics, Department of Higher Mathematics and Mathematical Physics, Tomsk Polytechnic University, pr. Lenina, 30, Tomsk, 634050, Russia.

E-mail: kolesnikova_ma88@mail.ru

Epp Vladimir Yakovlevich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Theoretical Physics, Tomsk State Pedagogical University, ul. Kievskaya, 60, Tomsk, 634061, Russia.

E-mail: epp@tspu.edu.ru