

# К столетию общей теории относительности



УДК 530.12

М. П. Коркина<sup>1</sup>

## ЗНАМЕНИТЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Рассматривается вклад двух знаменитых точных решений уравнений Общей теории относительности (ОТО) - решения Шварцшильда и решения Фридмана в развитие ОТО. Именно эти два решения были получены в самом начале становления ОТО, однако, значение их обоих было понято далеко не сразу. В настоящее время стал ясен их глубокий смысл и их выдающаяся роль в становлении современной космологии.

**Ключевые слова:** общая теория относительности, решение Шварцшильда, решение Фридмана.

**РАС:** 04.20.-q, 04.20.Jb

1. Общая теория относительности (ОТО), возможно, самая великая физическая теория, известная в настоящее время, естественно, ее 100-летие широко отмечалось во всем мире.

Гениальность Эйнштейна, его потрясающая интуиция позволили ему связать гравитацию с кривизной пространства-времени и получить свои знаменитые уравнения ОТО:

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\mu}R = \frac{8\pi\gamma}{c^4}T_{\nu}^{\mu}, \quad (1)$$

где  $R_{\nu}^{\mu}$  – тензор Риччи,  $R$  – скалярная кривизна.

Представляя 25 ноября 1915 года свою новую теорию гравитации – ОТО, Эйнштейн даже не задумывался над тем, можно ли получить точные решения, слишком сложной казалась сама теория. Его, в первую очередь, интересовала возможность ее экспериментального подтверждения и, следовательно, признания физическим обществом.

На основании приближенного решения уравнений ОТО Эйнштейн сделал расчет отклонения световых лучей в поле Солнца. После того, как в 1919 году экспедиция Эддингтона подтвердила расчеты Эйнштейна, началось триумфальное шествие ОТО не только в мире ученых.

А. Эйнштейн стал признанным гением.

2. Дальнейшее успешное развитие ОТО связано с нахождением двух уникальных точных решений уравнений Эйнштейна. Именно эти два решения кардинально изменили и существенно обогатили наши знания об окружающем мире.

О значимости в любой теории точных решений хорошо сказал Дж. Синг:

*«В той сложной ситуации, которую мы перед собой имеем, точное решение уравнений поля гораздо предпочтительнее всяких приближений, причем даже точное математическое решение представляет собой лишь приближение к физической действительности, на большее не могла бы претендовать ни одна математическая формула»* [3, стр. 168].

Первое из этих двух уникальных решений – это решение, полученное немецким астрономом – Карлом Шварцшильдом в 1916 году, практически одновременно с созданием ОТО. К. Шварцшильд получил его в госпитале, служа в это время в немецкой армии. Он прислал свою статью в письме к Эйнштейну с просьбой напечатать ее в журнале, что Эйнштейн и сделал.

Решение таких сложных уравнений (1) имело удивительно простой вид:

$$dS^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 d\sigma^2, \quad (2)$$

<sup>1</sup> E-mail: korkina.m.p@gmail.com

где  $c = 1$ ,  $d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ ,  $r_g$  – гравитационный радиус.

Именно из этого решения можно получить и искривление лучей света гравитационным полем, и смещение перигелия, и многие другие эффекты, которые в настоящее время нашли свое экспериментальное подтверждение.

Все эти результаты были получены для случая  $r > r_g$ . При  $r = r_g$  метрические коэффициенты решения (2) имеют особенность. Эта особенность является координатной и может быть устранена переходом к другой системе координат, например, гауссовой.

Глубокий физический смысл этой особенности ( $r = r_g$ ) был понят далеко не сразу.

Как известно, идея о возможности существования звезд, обладающих столь сильным гравитационным полем, таким что даже свет не может выйти за его пределы, была предложена Джоном Мичелом еще в 1723 году. Лаплас также обсуждал такую возможность в своем труде «Система Мира», однако, впоследствии, видно отказался от этой идеи, так как исключил упоминание о ней в последующих изданиях своего труда.

В своей работе «Внутреннее строение звезд» Эдингтон уже понял, как из существования предельной массы звезды вытекает наличие в природе черных дыр. Однако, с таким выводом он не согласился и написал следующие: «Когда мы доказываем результат, не понимая его просто потому что он появился из лабиринта математических формул – нет оснований надеяться, что мы сможем его где-то применить».

А. Эйнштейн придерживался такой же точки зрения «*Прекрасная физика, но отвратительная математика*» – его слова.

Путь к пониманию физического смысла решения Шварцшильда был достаточно долг.

Чандрасекар и Ландау, независимо друг от друга, показали возможность гравитационного коллапса для звезд, масса которых превышает предельную массу (предел Чандрасекара). Однако, этот вывод не был принят физическим сообществом. Даже после работы Опенгеймера (1939 г.), в которой он на основании решения Шварцшильда показал неизбежность гравитационного коллапса, то есть неизбежность существования черных дыр, ситуация, в целом, осталась такой же.

Причиной этого, в первую очередь, явилась невозможность наблюдения ни одного из предсказанных эффектов из-за недостаточно высоких технических возможностей того времени. Война, также, существенно замедлила развитие научных исследований в этой области.

**3.** Второе решение, значение которого в развитии ОТО трудно переоценить, без которого ОТО не могла бы достигнуть таких замечательных результатов в объяснении свойств Вселенной, – это решение Фридмана.

А. А. Фридман получил свое уникальное решение в 1922 году.

К этому времени в космологии все еще считалось, что Вселенная вечна и неизменна. Сейчас кажется даже удивительным тот факт, что никто из величайших умов человечества не задумывался над возможным изменением Вселенной во времени, то есть о возможном развитии Вселенной. Хокинг считает, что, возможно, это объясняется склонностью людей верить в «вечные истины».

В Ньютоновой теории тяготения модель статической бесконечной Вселенной вызывала серьезные возражения, главное из которых – известный парадокс Ольберса.

Казалось, что проблема возможности существования статической Вселенной полностью решена самим Эйнштейном. В 1917 году Эйнштейн построил на основе ОТО статическую замкнутую модель Вселенной.

Интересно, что при построении своей модели Эйнштейну пришлось ввести новую постоянную, которую он назвал космологической постоянной. Позже он считал это своей ошибкой. Сейчас мы понимаем, что это не ошибка, а предвидение гения.

Простая и элегантная модель Вселенной Эйнштейна, казалось, решила все вопросы. В 1919 году экспедиция А. Эдингтона подтвердила, предсказанное ОТО, искривление лучей света полем Солнца. С доклада Эдингтона в ноябре 1919 года начался триумф ОТО и самого А. Эйнштейна.

И в таких условиях А. Фридман работает над моделью Вселенной, развивающейся во времени. Это уже был вызов общепринятым представлениям космологов.

Первая работа Фридмана «О кривизне пространства», посвященная построению нестатической модели Вселенной опубликована в 1922 году. В ней предполагается, что Вселенная однородна, изотропна и замкнута, то есть интервал выбирается в виде:

$$dS^2 = dt^2 - a^2(t) (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\sigma^2). \quad (3)$$

Для масштабного фактора  $a^2(t)$  Фридман получил свое знаменитое уравнение:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{8\pi\gamma}{c^4}\varepsilon + \lambda, \quad (4)$$

где  $\varepsilon$  – плотность энергии,  $\lambda$  – космологическая постоянная.

Фридман учел в своем уравнении (4) космологическую постоянную для того, чтобы его решение включало в себя в качестве частных случаев не только решение Эйнштейна, но и решение де Ситтера.

Результат Фридмана был настолько неожиданным, что Эйнштейн вначале не принял его и даже написал небольшую заметку в журнал, опубликовавший статью Фридмана, в которой отрицал возможность существования «нестационарного мира».

Как известно, после того как Ю. А. Крютков по просьбе А. Фридмана привез Эйнштейну подробный вывод уравнений, описывающий нестационарный мир – то есть уравнений Фридмана, Эйнштейн признал, что уравнения ОТО «допускают наряду со статическими также динамические центрально-симметричные решения» [5].

Статья А. Фридмана «О кривизне пространства» написана достаточно ясно и последовательно. Безусловно, А. Эйнштейн прекрасно бы все понял, если бы захотел ее прочитать. Однако, он считал мир неизменным и поэтому предположил, что А. Фридман в своих вычислениях ошибся.

А. Фридман проложил путь к построению сферически-симметричных однородных и изотропных нестатических космологических моделей. После его статьи 1922 года построить две другие модели такого типа (то есть модель с пространством Лобачевского и с плоским пространством) не представляло особого труда. Однако, никто этим не заинтересовался, что также свидетельствует о том, насколько революционна и неожиданная была идея Фридмана. В 1924 году А. Фридман написал еще одну работу по космологии «О возможности мира с постоянной отрицательной кривизной пространства». В этой работе он построил однородную и изотропную космологическую модель с пространством Лобачевского:

$$dS^2 = dt^2 - a^2(t) (d\chi^2 + sh^2\chi d\sigma^2), \quad (5)$$

то есть показал возможность существования не только замкнутого мира, но и открытого, который бесконечно расширяется.

Работы А. Фридмана не вызвали должного интереса, так как идея расширяющейся Вселенной была чужда большинству физиков, тем более, что эта идея не подтверждалась астрономическими наблюдениями. Исследование спектров звезд других галактик только начиналось.

В 1928 году Эдвин Хаббл опубликовал статью, в которой показал, что у большей части галактик спектры смещаются в красную сторону. Это значит, что галактики удаляются от нас, то есть Вселенная расширяется. Причем величина красного смещения пропорциональна расстоянию до галактики. Именно такой процесс расширения следует из модели Фридмана, так что можно считать, что уже в 1929 году модель Вселенной Фридмана была подтверждена наблюдениями. Однако, ни наблюдения Хаббла, ни значимый вклад Ж. Леметра в теорию расширяющейся Вселенной, в корне не изменили ситуацию.

Даже после замечательной работы Г. Гамова (1948 г.), который на основании уравнений Фридмана, построил модель Вселенной, как модель Большого Взрыва и вычислил современную температуру Вселенной, модель расширяющейся Вселенной не стала общепринятой. Достаточно популярны были другие модели, например, модель стационарной Вселенной Ф. Хойла и модель Я. Зельдовича.

**4.** Интересна аналогия между двумя выдающимися учеными, вклад которых в развитие ОТО невозможно переоценить, между К. Шварцшильдом и А. Фридманом.

Оба они были разносторонними учеными, достигшими значительных успехов в различных областях физики. С именем К. Шварцшильда связано основание точной фотографической фотометрии в астрофизике, также новые инструменты и методы в области астрономии, астрофизики и оптики. Достаточно весомы и его теоретические исследования. Например, работы о Солнце привели его к теории солнечной атмосферы и к введению понятия лучистого равновесия в энергетическом балансе Солнца.

А. Фридман плодотворно работал в области динамической метеорологии, гидродинамики сжимаемой жидкости и физики атмосферы. Он впервые предложил изучать «куб воздуха» с помощью аэростатов. Фридман также проявил себя как талантливый организатор науки.

Оба они, и К. Шварцшильд, и А. Фридман, принимали участие в 1-ой Мировой войне. Оба опубликовали только по две работы, посвященные ОТО. Жизнь и К. Шварцшильда и А. Фридмана прервалась в самом расцвете творческих сил. К. Шварцшильд опубликовал две свои работы, посвященные ОТО в 1916 году, и в этом же году его не стало.

А. Фридман опубликовал свои работы по ОТО в 1922 и 1924 годах, а в 1925 году его жизнь закончилась.

5. Глубокий физический смысл как решения Шварцшильда, так и решений Фридмана был понят далеко не сразу. Понимания глубины и значимости этих замечательных решений началось с 60-х годов XX-го века.

Экспериментальные возможности стали таковыми, что можно было проверить теорию горячей Вселенной Гамова, основанную на модели Фридмана. Дикке и Пиблс планировали поставить эксперимент по обнаружению реликтового излучения. Однако, в 1965 году его случайно обнаружили Пензиас и Вильсон, и этим подтвердили теорию Фридмана.

Начался золотой век ОТО. Космологией стало заниматься престижно. Естественно, этому способствовали экспериментальные возможности.

В настоящее время имеется стандартная космологическая модель, которая описывает как эволюцию Вселенной в целом, так и образование её крупномасштабной структуры. Эта модель Вселенной подтверждается данными наблюдений. Была обнаружена, предсказанная теоретиками, анизотропия реликтового излучения (Д. Мазер, Д. Смут, 2006 г.), было обнаружено ускоренное расширение Вселенной (С. Перлмуттер, Б. Шмидт, А. Рисс, 2011 г.), для объяснения которого в решении Фридмана нужно учитывать космологическую постоянную, то есть выбрать уравнение таким, каким его первоначально предложил А. Фридман.

Благодаря работам выдающихся ученых, таких как Уилер, Торн, Зельдович, Новиков, Керр, Пенроуз, Хокинг и многих других, черные дыры превратились из математической абстракции в реальный объект, они стали такой же реальной частью Вселенной, как звезды и планеты. Мы понимаем неизбежность черных дыр с одинаковой массой, моментом и зарядом, знаем, что черные дыры обладают энтропией и температурой. Роль черных дыр во Вселенной весьма значительна. В центре нашей Галактики и многих других находятся черная дыра. Обнаруженные недавно гравитационные волны являются следствием слияния черных дыр.

Конечно, нерешенных проблем достаточно и, несомненно, в будущем нас ждут интереснейшие открытия, но сейчас мы можем сказать, что современная космология представляет собой один из самых больших успехов ОТО и всей современной науки, а в основе этих успехов лежат две математические драгоценности ОТО – решение Шварцшильда и решение Фридмана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Том 2. М.: Наука, 1966. 883 с.
2. Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология. М.: Наука, 1974. 520 с.
3. Синг Дж. Общая теория относительности. М.: Ин.Лит., 1963. 432 с.
4. Крамер Д., Штефани Х., Херльт Э., Мак-Каллум М. Точные решения уравнений Эйнштейна. Под ред. Э. Шмутцера. М.: Энергоиздат, 1982. 416 с.
5. Альберт Эйнштейн и теория гравитации. Сб. статей. М.: Мир, 1979. 592 с.
6. Гамов Дж. Моя мировая линия. М.: Наука, 1994. 293 с.
7. Чандрасекар С. Математическая теория черных дыр. Часть 1. М.: Мир, 1986. 271 с.
8. Хокинг С., Торн К.С., Новиков И., Феррис Т., Лайтман А., Прайс Р. Будущее пространства-времени. С.– П.: Амфора, 2009. 253 с.
9. Феррейра П. Идеальная теория. Битва за Общую Теорию Относительности. С.– П.: Питер, 2014. 320 с.
10. Каку М. Космос Эйнштейна. М.: Москва, 2016. 272 с.

Коркина Марина Петровна, д. ф.-м. н., профессор, кафедра теоретической физики, Днепропетровский национальный университет, 49010, Украина, г. Днепропетровск, пр-т Гагарина, 72.  
E-mail: korkina.m.p@gmail.com

**M. P. Korkina**

**Famous exact solutions of General Relativity equations**

*Keywords:* General Relativity, Friedmann solution, Schwarzschild solution.

PACS: 04.20.-q, 04.20.Jb

Two famous exact solutions of Einstein equations that made a considerable contribution to the development of General Relativity are considered. Namely, the Friedmann and Schwarzschild solutions were obtained at the very beginning of General relativity elaboration, although their significance was not understood immediately. At present times the deep meaning of these solutions and their outstanding role in modern cosmology progress become clear.

REFERENCES

1. Einstein A. *Sobranie nauchnykh trudov. Tom 2* (The Collected Papers. Vol. 2), Moscow: Nauka, 1966, 883 p.
2. Tolman R.C. *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology*, Oxford: Clarendon Press, 1969. Translated under the title *Otnositel'nost', termodinamika i kosmologiya*, Moscow: Nauka, 1974, 520 p.
3. Synge J.L. *Relativity: the General Theory*, Amsterdam: North-Holland, 1960. Translated under the title *Obschaya teoriya otnositelnosti*, Moscow: In. Lit., 1963, 432 p.
4. Kramer D., Stephane H., MacCallum M., Heritage E. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980. Translated under the title *Tochnyye resheniya uravneniy Eynshteyna*, Moscow: Energoizda, 1982, 416 p.
5. *Albert Eynshteyn i teoriya gravitatsii. Sb. statey* (Albert Einstein and Theory of Gravity. Collection of the articles), Moscow: Myr, 1979, 592 p.
6. Gamow G. *My World Line: An Informal Autobiography*, New York: The Viking Press, 1970. Translated under the title *Moya mirovaya liniya*, Moscow: Nauka, 1994, 293 p.
7. Chandrasekhar S. *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford: Oxford University Press, 1983. Translated under the title *Matematicheskaya teoriya chernyih dyir. Chast 1*, Moscow: Myr, 1986, 271 p.
8. Hawking S., Thorne K., Novikov I., Ferris T., Lightman A., Price R. *The Future of Spacetime*, New York: W. W. Norton & Company, 2002, 220 p. Translated under the title *Budushee prostranstva-vremeni*, St. Petersburg: Amfora, 2009, 253 p.
9. Ferreira P. *The Perfect Theory: A Century of Geniuses and the Battle of General Relativity*, Houghton Mifflin Harcourt, 2014. Translated under the title *Ideal'naya teoriya. Bitva za Obschuyu Teoriyu Otnositelnosti*, St. Petersburg: Piter, 2014, 320 p.
10. Kaku M. *Einstein's Cosmos: How Albert Einstein's Vision Transformed Our Understanding of Space and Time. Front Cover*, New York: W. W. Norton & Company, 2004, 251 p.

Received 22.03.2016

Korkina Marina Petrovna, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Theoretical Physics, Dniepropetrovsk National University, Haharin ave., 72, Dniepropetrovsk, 49010, Ukraine.  
E-mail: korkina.m.p@gmail.com